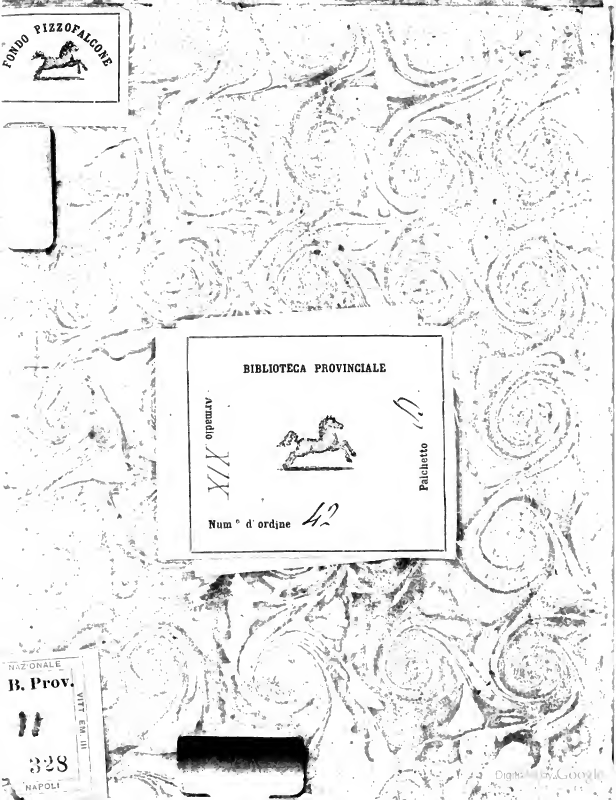



FONDO PIZZOFALCONE
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XIX
Palchetto
Num° d' ordine 42
NAZIONALE
B. Prov.
328
VITT. EM. III
NAPOLI
Digitized by Google



INTRODUCTION

A

L'ANALYSE

DES

LIGNES COURBES

ALGÉBRIQUES.

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE

DES

LIGNES COURBES ALGÉBRIQUES.

Par

GABRIEL CRAMER,

Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.

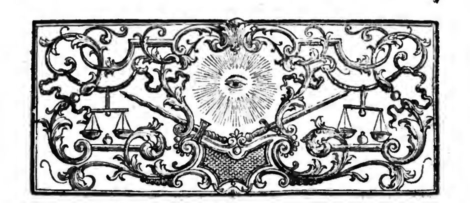




A GENEVE,

Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.

MDCCL.



PREFACE



A Théorie des Lignes courbes fait une partie conſidérable des Mathématiques : Elle commence où finiſſent les Elémens, au delà deſquels on ne va point ſans elle. On ne ſauroit s'en paſſer dans les Sciences dont la perfection dépend de la Géométrie, telles que la Méchanique, l'Aſtronomie, la Phyſique. Les Syſtèmes modernes ſuppoſent néceſſairement cette connoiſſance.

Si l'étude en eſt utile, elle n'eſt pas moins agréable. Des variétés perpétuelles, rappellées conſtamment à l'unité, offrent à l'Eſprit un ſpectacle dont il ne ſe laſſe jamais.

Auſſi les Courbes ont-elles toujours fait un des prin-

principaux objets des ſpéculations des Géométres. A peine la Géométrie ſortoit-elle de l'enfance, qu'elle s'occupa des Sections coniques: bientôt après elle admira les propriétés de la Conchoïde, de la Ciſſoïde, des Spirales, (Courbes très différentes de celles que nous déſignons par ce nom, & qui ſont les Hélices des Anciens) & de pluſieurs autres Lignes, dont le nom & la connoiſſance a péri avec la plûpart des monuments de l'ancienne Géométrie.

Dans ce qui nous en reſte, on voit que ſi les Anciens ont eu autant d'eſprit & de génie que les Modernes, ils leur cédent par la Méthode, par cet art infiniment utile de déduire d'un ſeul Principe univerſel un grand nombre de Vérités, de les ſoumettre à des Règles générales, de les développer par des conſéquences uniformes, & de les lier les unes aux autres de la maniére la plus propre à faire naître de nouvelles découvertes.

Ce que les Anciens avoient démontré ſur les Courbes, quelque important, quelque ſubtil qu'il fut, n'étoit pourtant qu'un amas de Propoſitions particuliéres, qui ne pouvoient guéres ſervir à en trouver d'autres, qu'autant que ces Recherches donnoient des éxemples & des modèles, qu'un Eſprit né Géométre s'efforçoit d'imiter. Une grande application & l'étude opiniatre d'une Courbe pouvoit y faire voir des propriétés ſinguliéres: L'Inventeur en étoit redevable à ſon génie, & ſouvent à la Fortune.

II

Il en étoit à peu près de même de toutes les branches des Mathématiques, jusqu'à l'invention de l'Algébre; moyen ingénieux de réduire les Problèmes au Calcul le plus simple & le plus facile que la Question proposée puisse admettre. Cette clef universelle des Mathématiques en a ouvert la porte à plusieurs Esprits, pour lesquels elle eut toujours été fermée sans ce secours: On peut dire que cette découverte a produit une véritable révolution dans les Sciences qui dépendent du Calcul.

Il y a donc, ce semble, de l'humeur, & une sorte de caprice, à mépriser une Méthode si utile, & à faire gloire de n'employer que l'Analyse géométrique des Anciens. Celle-ci, je l'avoue, a sur l'Algébre le mérite d'une évidence plus sensible, & d'une certaine élégance qui plaît infiniment: mais il s'en faut beaucoup qu'elle soit aussi commode & aussi universelle. Donnez lui donc, si vous voulez, la préférence; mais ne donnez point d'exclusion à l'autre Méthode. Les Vérités mathématiques ne sont pas si faciles à trouver, qu'on doive chercher du mérite à se fermer quelcune des routes qui peuvent y conduire.

C'est sur-tout dans la Théorie des Courbes qu'on éprouve bien sensiblement l'utilité d'une Méthode aussi générale que l'est celle de l'Algébre. DES CARTES, dont l'esprit inventeur ne brille pas moins dans la Géométrie que dans la Philosophie, n'eut pas plû-

plûtôt introduit la maniére d'exprimer la nature des Courbes par des équations algébriques, que cette Théorie changea de face. Les découvertes se multipliérent avec une extraordinaire facilité: chaque ligne de Calcul enfantoit de nouveaux Théorémes.

Par ce moyen, l'art supplée au génie, & le génie aidé d'un art si secourable a eu des succès qu'il n'auroit jamais obtenu par ses propres forces. Car ce qu'il y a d'admirable ici, c'est qu'on ne sauroit découvrir par le moyen de l'Algébre quelque propriété d'une Courbe particuliére, qu'elle ne fasse aussi-tôt connoitre des propriétés semblables, ou analogues, dans une infinité d'autres Courbes.

Ajoutez que l'Algébre seule fournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Classes, Genres & Espéces: ce qui, comme dans un Arsenal où les armes sont bien rangées, met en état de choisir, sans hésiter, celles qui peuvent servir dans la Résolution d'un Problème proposé.

C'est à l'Illustre Mr. NEWTON que la Géométrie est sur-tout redevable de cette distribution. Son *Enumération des Lignes du troisiéme Ordre* est un excellent modèle de ce qu'il faut faire en ce genre, & une preuve convaincante que ce grand Homme avoit pénétré jusqu'au fonds de ce que la Théorie des Courbes a de plus delié & de plus intéressant.

Il est facheux que Mr. NEWTON se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre les Démonstrations,

trations, & qu'il ait préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire.

Ce n'est pas que dans une Lecture attentive de son Traité on ne puisse apercevoir quelques traces de sa Méthode: on découvre que ses principaux guides dans ces Recherches ont été la Doctrine des *Séries infinies*, qui lui doit presque tout, & l'usage du *Parallélogramme analytique*, dont il est l'Inventeur: on peut même entrevoir qu'en quelques endroits il n'a pas suivi ces guides avec l'exactitude qu'on admire dans ses autres ouvrages.

Ces légéres inadvertences n'ont pas échappé à Mr. STIRLING, qui a développé les Principes & la Méthode de Mr. NEWTON, dans l'excellent *Commentaire* qu'il nous a donné sur son Livre. On y voit qu'il ne manquoit presque rien à Mr. STIRLING pour donner une Théorie complette des Courbes, & qu'il n'auroit laissé que peu de choses à dire, s'il ne s'étoit pas attaché avec trop de scrupule à ne point s'écarter de son Auteur.

Mr. NICOLE a donné, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, une explication aussi nette qu'exacte des Principes que Mr. NEWTON a pû suivre dans son Enumération des Lignes du troisiéme Ordre: c'est grand dommage qu'un commencement si heureux n'aît pas eu de suite. Que ne pouvoit-on pas attendre du génie & du savoir de Mr. NICOLE?

On trouve dans le même Recueil quelques Mé-

moires de Mr. DE BRAGELOGNE, rélatifs à une Enumération des Lignes du quatriéme Ordre, qu'il avoit entreprise à l'imitation de celle que Mr. NEWTON a donnée des Lignes du troisiéme Ordre. Il y a de très bonnes choses dans ces Mémoires; mais l'Auteur s'étant arrêté au milieu de sa course, on ne voit pas si sa Méthode étoit la plus propre à le mener avec exactitude & avec certitude à l'Enumération qu'il avoit en vue. Il s'étend assez sur les Points multiples, qui servent de fondement à la subdivision des Genres en Espèces, & en Variétés; mais il ne dit rien, ou ne dit que peu de choses, des Branches infinies, dont doit dépendre la Division générale des Courbes de chaque Ordre en leurs Classes & Genres.

Voilà ce que j'avois devant les yeux lorsque je commençai cet Ouvrage. La longueur du tems qu'il a resté entre mes mains devroit lui avoir donné un dégré de perfection, que je crains avec raison qu'on n'y trouve pas.

L'illustre Mr. s' GRAVESANDE, qui m'honoroit de son amitié & dont la perte me sera toujours amere, m'avoit communiqué ses Recherches sur les Séries, & ce qu'il avoit ajouté aux découvertes de Mrs TAYLOR & STIRLING. Quelques observations que je fis sur sa Méthode parurent lui plaire, & trop prévenu en ma faveur, il eut la bonté de me dire, qu'ayant la clé de la Théorie des Courbes il ne me seroit pas difficile d'en faire usage. Si j'ai eu tort de l'en croire,

re, qu'on pardonne cette erreur au respect dont j'étois pénétré pour ce grand Homme.

Cet Essai étoit à peu près fini, quand Mr. l'Abbé DE GUA fit paroître l'*Usage de l'Analyse de* DESCARTES *pour découvrir les propriétés des Lignes géométriques de tous les Ordres*. La substitution qu'il y fait du Triangle algébrique au Parallélogramme de NEWTON est une idée heureuse, dont j'ai profité avec reconnoissance, aussi bien que de quelques autres pensées ingenieuses de cet Auteur : mais je n'ai pas cru devoir le suivre dans la méprise où il est tombé sur les Branches infinies des Courbes & sur leurs Points multiples, pour avoir négligé l'usage des Séries infinies, ou pour avoir voulu juger d'une Série entiére par son seul premier terme.

J'aurois tiré une grande utilité de l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits* de Mr. EULER, si ce Livre m'avoit été plûtôt connu. Son objet étant presque le même que le mien, il n'est pas surprenant que nous nous soions souvent rencontré dans les Conclusions. Mais la différence des Méthodes est aussi grande qu'elle peut l'être quand on travaille sur un même sujet: ce que je ne dis point pour préférer la route que j'ai prise à celle qu'à tenu Mr. EULER; mais seulement pour avertir le Lecteur de cette diversité. Voici une légere idée de l'ordre que j'ai cru devoir suivre.

Le premier Chapitre expose en général la nature

des Lignes courbes, & la maniére de les repréſenter par des Equations. On diviſe d'abord les Lignes en réguliéres & irréguliéres. Celles-ci n'ont ni Définition, ni Deſcription règlée & connue. Celles-là ſont décrites par une loi certaine, qui conſtitue leur eſſence ou leur nature. On diviſe enſuite les Lignes réguliéres, en celles qui peuvent être décrites ſur une ſuperficie plane, & celles qui ont une double courbure. Puis on expoſe la maniére d'exprimer par une Equation la nature des Lignes à ſimple courbure: invention heureuſe de DESCARTES, qui renferme le Principe, ou du moins le Germe, de tout ce que les Modernes ont découvert ſur les Courbes. Delà on paſſe à la diſtinction des Lignes en algébriques & méchaniques: on definit les Courbes exponentielles & les interſcendantes, qui tiennent en quelque ſorte le milieu entre les méchaniques, & les algébriques. On entre dans quelque détail ſur la maniére dont une Courbe algébrique eſt repréſentée par ſon Equation: On indique le moyen de diſcerner ſi une Equation propoſée exprime une ſeule Courbe, ou l'aſſemblage de pluſieurs. On parle des Branches de Courbes, finies ou infinies, réelles ou imaginaires. On fait voir en quel ſens le cours d'une Ligne algébrique eſt continu, quoique la Courbe puiſſe être compoſée de parties détachées. On montre enfin la maniére de décrire une Courbe en aſſignant la poſition d'une infinité de ſes points; non-

non-ſeulement lorſque ſon Equation peut être reſoluë, mais encore en pluſieurs autres cas. Il faut pourtant avouer qu'il manque une Méthode generale pour cela : ſi l'Algébre pouvoit la donner, on auroit, par cela ſeul, tout ce qui eſt néceſſaire pour la connoiſſance des Courbes.

On indique, dans le ſecond Chapitre, une maniére générale de transformer l'Equation d'une Courbe, quand on veut la raporter à d'autres coordonnées que celles dont le raport eſt exprimé par l'Equation propoſée. On donne, pour faire ces transformations, dans les cas les plus utiles & les plus communs, des maniéres abregées, qui peuvent être ſuperflues lorſque l'Equation eſt fort ſimple, mais qui deviennent preſque néceſſaires, ou du moins très commodes, quand cette Equation eſt d'un dégré aſſez élevé, ou qu'elle eſt compoſée d'un grand nombre de termes.

Le troiſiéme Chapitre développe la diviſion des Lignes algébriques ſelon leurs différents Ordres. On y voit les Equations générales de chacun de ces Ordres, le nombre de leurs termes, celui des Points donnés par leſquels on peut faire paſſer une Ligne d'un Ordre donné, & le nombre des Points dans leſquels une Ligne d'un Ordre donné peut rencontrer une Ligne du même Ordre, ou d'un autre Ordre auſſi donné. La Règle qui détermine ce nombre eſt très importante dans la Théorie des Cour-

bes, plusieurs grands Géométres l'ont supposée, mais personne, que je sache, n'en a donné la Démonstration. On la prouve ici, par une maniére, expliquée dans l'Appendice N°. 2, de faire évanouir une grandeur indéterminée, au moyen de deux Equations dans lesquelles elle entre. C'est-là proprement un Problème de pure Algébre; mais les Méthodes connues ayant paru insuffisantes, on en a cherché une autre, qui rend la chose facile au moyen d'une façon singuliére d'employer les nombres, ou chiffres, pour exprimer les indéterminées & leurs fonctions. L'usage de cette Notation peut s'étendre à d'autres Recherches, & en général cette Méthode est assez féconde en Corollaires utiles dans l'Algébre.

La Règle démontrée dans le Chapitre précédent étant le fondement de la Méthode usitée pour la construction des Egalités, on en a pris occasion de faire dans le Chapitre quatriéme quelques Remarques sur cette construction. On en dévelope le Principe; on en détermine l'étendue; on en marque les limitations. On indique la source des difficultés que Mr. Rolle a élevées contre cette Méthode, & les moyens d'éviter surement les inconvénients qu'il y a trouvés. On propose enfin une maniére générale de fixer le nombre & la nature des racines d'une Egalité, de discerner les imaginaires des réelles, & parmi celles-ci les négatives des affirmatives. On l'ap-

l'applique aux Egalités du ſecond, troiſiéme & quatriéme dégré; ce qui eſt néceſſaire & ſuffiſant pour la ſuite de cet Eſſai.

Le Chapitre cinquiéme démontre un Théorème fort général ſur la valeur du produit de toutes les ordonnées d'une même abſciſſe; & il en fait l'application aux Courbes du ſecond & du troiſiéme Ordre. Ce ſeul Théorème renferme tout ce que les Anciens ont démontré ſur la comparaiſon du quarré de l'ordonnée avec le rectangle des portions du diamètre dans les Sections Coniques: ce qui fait la plus grande partie de ce qu'ils ont connu de ces Courbes. On l'étend à d'autres Cas dont les Anciens n'ont pas fait mention; & on donne les propriétés analogues des Courbes du troiſiéme Ordre. Il n'y a aucune difficulté à le ſuivre dans les Courbes des Ordres ſupérieurs.

Dans le Chapitre ſixiéme, on conſidere d'abord deux Lignes telles que la ſomme des ordonnées de l'une eſt égale à la ſomme des ordonnées de l'autre, ces ordonnées ayant une même abſciſſe. On fait voir que l'une de ces Lignes peut, en une infinité de Cas, être l'aſſemblage de pluſieurs Droites, & que toutes ces Droites peuvent ſe réduire à une ſeule, qui eſt alors le Diamètre de la Courbe. On démontre que chaque Courbe a néceſſairement un ou pluſieurs Diamètres. On définit les Diamètres curvilignes, & le Diamètre abſolu. On prouve que dans les Lignes du ſecond

cond Ordre tout Diamètre eſt un Diamètre abſolu, mais qu'il n'en eſt pas de même dans les Courbes des Ordres ſupérieurs. On enſeigne à chercher les Diamètres abſolus d'une Courbe. On explique ce que c'eſt qu'un Contre-Diamètre & un Centre général. On donne des Règles pour les trouver.

Il s'agit dans les Chapitres ſuivants de ce qu'il y a de plus remarquable dans le Cours d'une Ligne. Ce ſont ſes Branches infinies & ſes Points ſinguliers. C'eſt par les Branches infinies qu'on diviſe les Courbes de chaque Ordre en leurs Genres, & c'eſt par les Points ſinguliers qu'on ſubdiviſe en Eſpèces les Courbes de chaque Genre.

Pour déterminer ces Branches & ces Points, on n'a point de Méthode plus ſûre & plus générale que celle des Séries. C'eſt pour cela qu'on a crû devoir l'expliquer avec ſoin dans le Chapitre ſeptiéme; d'autant mieux que cette Méthode n'a été donnée juſqu'ici que d'une maniére imparfaite; qu'on a laiſſé ſans Démonſtration une partie du procédé qu'il faut ſuivre; & que ce procédé, de la façon qu'il eſt propoſé dans les Auteurs, conduit ſouvent à des réſultats bornés & par là vicieux. La vraye Méthode des Séries eſt fondée ſur le *Parallélogramme* de Mr. NEWTON, invention excellente, mais dont l'Auteur n'a pas donné la Démonſtration, dont il ſemble même n'avoir pas ſenti tout le prix. Après lui, Mrs. TAYLOR & STIRLING en ont étendu l'uſage; mais leurs Rè-

Règles n'ont ni la généralité ni l'exactitude nécessaires. Mr. S'GRAVESANDE les a rectifiées jusqu'à un certain point. Cependant sa Méthode, qui n'est qu'un abrégé de la Méthode générale, n'en conserve pas toute l'universalité; elle n'a lieu que dans certains Cas, & dans ces Cas elle n'est pas toujours autant abrégée qu'elle pourroit l'être: il en est même, où elle peut jetter dans l'erreur d'une énumération imparfaite. Pour éviter ces inconvéniens, on a crû devoir remonter aux Principes de la Méthode des Séries & en démontrer exactement le procédé. On en donne même l'Investigation, & on indique quelques moyens d'abréger les calculs à la longueur desquels la Méthode générale est sujette: On s'est ici borné à ce qui est nécessaire pour la Théorie des Courbes. La matiére est vaste, & on pourroit en composer des Volumes sans l'épuiser.

Le Chapitre huitiéme est employé à déterminer le nombre, la nature, & la position des Branches infinies que peut avoir une Courbe dont l'Equation est donnée.

Ces Branches s'éloignent infiniment ou de l'Axe des abscisses, ou de celui des ordonnées, ou de l'un & de l'autre. Cela se discerne aisément, presque par la seule inspection de l'Equation proposée. On en indique la maniére; après quoi on explique la différence des Branches hyperboliques & paraboliques. On donne, pour cet effet, une idée des

Hyperboles & des Paraboles de tous les Ordres: on expose les variétés du nombre & de la position de leurs Branches, & on fait voir en quels Cas elles sont réelles ou imaginaires. Ensuite on donne les moyens de reconnoitre si les Branches infinies qu'indique l'Equation d'une Courbe sont imaginaires ou réelles; de décider, dans ce dernier Cas, si elles sont hyperboliques ou paraboliques, c'est-à-dire, si elles ont une Asymptote droite, ou si elles n'en ont point; & dans le Cas où elles ont cette Asymptote, de déterminer sa position; de trouver, dans tous les Cas, leurs Asymptotes-courbes, c'est-à-dire la Courbe la plus simple qui règle la position, &, pour ainsi dire, la marche des Branches infinies de la Courbe proposée. Ces Règles sont éclaircies par un grand nombre d'Exemples choisis. Et ce Chapitre est terminé par quelques Théorèmes généraux sur le nombre de Branches infinies & d'Asymptotes droites, que peuvent ou ne peuvent pas avoir les Courbes des différents Ordres.

Dans le Chapitre neuviéme, on établit les Divisions générales des Lignes Courbes, fondées sur le nombre, la nature, & la position de leurs Branches infinies. On fait voir qu'il n'y a que trois Courbes du second Ordre; l'Ellipse, sous laquelle est comprise le Cercle; l'Hyperbole; & la Parabole: ce qui donne, en peu de mots, ce qu'on appelle

pelle la Conſtruction des Lieux Géométriques. On réduit les Courbes du troiſiéme Ordre à quatre Claſſes, qui ſe ſubdiviſent en quatorze Genres, conformément à ce que Mr. NEWTON a établi dans ſon *Enumération des Lignes du troiſiéme Ordre*, dont cet article peut être regardé comme un petit Commentaire. Il y a neuf Claſſes des Courbes du quatriéme Ordre, & chacune ſe ſubdiviſe en divers Genres; mais l'énumération en eſt comme impoſſible. Il a donc fallu ſe borner à donner les Principes néceſſaires pour réduire à ſa Claſſe & à ſon Genre toute Courbe donnée de cet Ordre. On indique ſeulement que celles du cinquiéme Ordre ont onze Claſſes, & l'on propoſe une Règle générale ſur le nombre des Branches hyperboliques & paraboliques, que peuvent avoir les Courbes d'un Ordre quelconque.

Les Chapitres ſuivants ſont deſtinés à l'examen des Points ſinguliers d'une Courbe. Ces Points ſont ou Points multiples, ou Points d'Inflexion. Les Points multiples ſont ou doubles, ou triples, ou quadruples &c. Les Points d'Inflexion ont une Inflexion ou ſimple, ou double, ou triple, &c. Les Inflexions d'un dégré impair ſont viſibles; celles d'un dégré pair ſont inviſibles, & ne ſe manifeſtent que par le Calcul: on les nomme Serpentements.

On indique au Chapitre dixiéme la maniére de connoitre ſi un Point aſſigné d'une Courbe donnée eſt ſimple ou multiple ; & dans ce dernier Cas, quel eſt le dégré de ſa multiplicité ; de chercher ſi une Courbe d'Equation donnée a des Points multiples, où ils ſont, & quels ils ſont ; de marquer les conditions qui peuvent donner des Points multiples à une Courbe dont l'Equation ou la Conſtruction eſt donnée. Enfin on indique quel eſt le nombre de Points multiples que peuvent avoir les Courbes des différens Ordres, & quel peut être le dégré de leur multiplicité. On montre, par exemple, que les Courbes du cinquiéme Ordre ne peuvent avoir qu'un Point quadruple, & qu'alors elles ne peuvent avoir aucun autre Point multiple : qu'elle ne peuvent avoir qu'un ſeul Point triple, mais qu'avec celui-là elles peuvent avoir trois Points doubles ; enfin qu'elles peuvent avoir juſqu'à ſix Points doubles, quand elles n'ont aucun autre Point multiple.

Le Chapitre onziéme donne les moyens de diſcerner les différentes eſpèces des Points ſimples ou multiples, par le nombre & la poſition de leurs Tangentes. On y explique la maniére de mener les Tangentes d'un Point quelconque. Cette maniére, qui revient dans le fonds aux Méthodes connues & en particulier à celle des Infiniment petits, eſt

eſt démontrée ici par cette ſeule conſidération, que la Sécante d'une Courbe devient ſa Tangente lorſque les deux Points de ſection ſe réuniſſent en un ſeul. La ſolution du Problème des Tangentes mêne trop naturellement à celui *de Maximis & Minimis*, pour qu'il fut permis de n'en rien dire. La Méthode qu'on propoſe revient encore aux Méthodes connues; mais on y a joint quelques Remarques qui, ſans être abſolument nouvelles, ne ſont pas communes. Elles ſervent à diſcerner un *Maximum* d'un *Minimum*, & à diſtinguer les uns & les autres des Points multiples & des Points d'Inflexion, avec leſquels il eſt aiſé de les confondre. On tire de cette Méthode quelques uſages pour déterminer le cours des Lignes Courbes, & on finit par la maniére de trouver les Points d'Inflexion ſimple ou multiple, que peut avoir une Courbe d'Equation donnée.

On entre au Chapitre douziéme dans un plus grand détail ſur la courbure des Lignes Courbes en leurs différents Points. Elle ſe meſure par la courbure du Cercle, qui étant uniforme dans tout le contour d'un même Cercle, varie ſelon que le Cercle eſt plus grand ou plus petit. On enſeigne à trouver, pour chaque Point d'une Courbe donnée, le Cercle de même courbure. La méthode qu'on donne pour cela, & qui n'eſt qu'une ſuite des principes établis dans le Chapitre précédent,

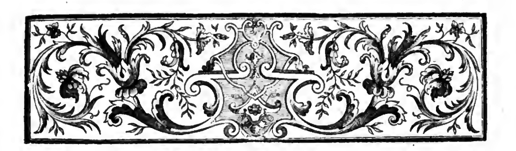
dent, réſoud facilement ces Problèmes: Trouver en quels Points de ſon cours une Courbe a une courbure donnée, une courbure infinie, une courbure infiniment petite, ſa plus grande ou ſa plus petite courbure, &c. On compare entr'elles les courbures infinies, & auſſi les courbures infiniment petites; & on en aſſigne les dégrés, en indiquant pour chaque Point, dont la courbure n'eſt pas finie, la Parabole de même courbure; car ici le Cercle eſt inutile, puiſque tout Cercle a une courbure finie. Cette comparaiſon laiſſe entrevoir une variété infinie dans les Points ſinguliers des Courbes. On n'en ſauroit épuiſer le détail. C'eſt aſſez d'en énumérer les eſpèces les plus ſimples, celles qui peuvent convenir aux Courbes des prémiers Ordres, autour deſquelles roulent nos ſpéculations. On a taché de le faire, dans le treiziéme & dernier Chapitre, pour tous les Points multiples dont ſont ſuſceptibles les Lignes des prémiers Ordres.

L'Appendice contient trois Démonſtrations qui auroient trop interrompu la ſuite du Diſcours ſi on les avoit inſérées où elles ſont citées. Il n'y a proprement que celle du N°. 2. qui ſoit néceſſaire. Elle eſt extraite d'un plus long Mémoire ſur ce même ſujet, lequel devroit faire partie d'un Traité d'Algébre.

Tel eſt le Plan que je me ſuis propoſé dans cet Eſſai.

Essai. C'est à mes Lecteurs à juger si je l'ai rempli. J'ai tant de graces à leur demander, que je ne leur ferai point d'excuses, ni sur le style, où je n'ai cherché que la clarté; ni sur certains détails, que j'ai crû nécessaires aux jeunes Géométres en faveur desquels j'écris; ni sur la longueur de cet Ouvrage, dont je suis moi-même surpris. Elle vient principalement du nombre d'Exemples que j'aporte pour illustrer les Règles que je donne. Je sens fort bien que les Savans en voudroient moins, mais en échange les Commençans en désireroient peut-être davantage. Je puis dire aux uns, que je ne crois pas avoir placé un seul Exemple sans quelque raison particuliére; & j'ose assurer les autres que je ne pense pas qu'ils trouvent dans les Règles aucune difficulté qui ne soit éclaircie par quelque Exemple.





INTRODUCTION A L'ANALYSE DES LIGNES COURBES ALGEBRIQUES.

CHAPITRE I.

De la Nature des Lignes Courbes en général, & de leurs Equations.

I. TOUTE Ligne eſt *Réguliére* ou *Irréguliére*. Les Lignes irréguliéres ſont celles qui ſont décrites ſans aucune régle certaine, ou connuë. Tel eſt le trait que forme au hazard un Ecrivain. Ces Lignes ne ſont point l'objet de la Géométrie : elles ne lui donnent aucune priſe. Car un Géométre, pour chercher & dé-

PLANC. I.

montrer les propriétés d'une Ligne, doit partir de sa Définition, ou, ce qui est la meme chose, de la maniére dont cette Ligne peut être construite ou décrite. Mais les Lignes irréguliéres n'ont aucune Définition ou Description réglée & connuë, qui les distingue de toute autre Ligne. CHAP. I. §. 1.

2. Les Lignes réguliéres sont, au contraire, celles qui sont décrites suivant une Loi constante qui détermine la position de tous leurs points. Il y a quelque propriété uniforme qui convient également à tous les points d'une même Ligne réguliére, & qui ne convient qu'à eux seuls. Cette propriété constituë la *Nature* ou l'*Essence* de cette Ligne. Ainsi la nature du Cercle consiste dans l'égalité de ses raïons. C'est cette égalité des raïons qui distingue la circonférence d'un Cercle de toute autre Ligne courbe, & qui détermine la position de tous les points de la Ligne circulaire, en les fixant tous à une même distance du centre.

3. Cette Définition des Lignes réguliéres convient avec celle des *Lieux géométriques*. Les anciens Géométres donnoient ce nom aux Lignes, Droites ou Courbes, dont chaque point étoit également propre à résoudre un Probléme géométrique indéterminé.

Fig. 1. Si l'on propose, par exemple, de décrire, sur une Ligne droite donnée AB, un Triangle d'une grandeur donnée: ce Problême est indéterminé; parce que sur la Droite AB on peut décrire une infinité de Triangles égaux, qui seront tous de la grandeur donnée, & qui donneront ainsi une infinité de Solutions. Comme tous ces Triangles égaux AcB, ACB, A*c*B &c. ont leurs sommets c, C, *c*, &c. sur une même Droite cC*c* parallele à AB [EUCL. 1. 37], cette Droite cC*c* est ce qu'on appelle le *Lieu* des sommets de tous les Triangles égaux à ACB décrits sur la base AB. De

CHAP. I. §. 3. De même, si l'on demande de décrire un Triangle rectangle sur l'hypothenuse donnée DE; on propose un Problême indéterminé. Car la circonférence DFE, décrite sur le diamétre DE, a cette propriété [EUCL. III. 31] que si d'un de ses points quelconque F on tire deux Droites FD, FE aux deux extrémités du diamétre DE, ces deux Droites feront avec le diamétre un Triangle rectangle. La circonférence DFE est donc le *Lieu* des sommets de tous les Triangles rectangles qui se peuvent décrire sur l'hypothenuse donnée DE. PLANC. I. *Fig.* 2.

4. LES LIGNES se divisent encore en celles qui peuvent être tracées sur une surface plane, & celles qu'on ne peut décrire que sur une surface courbe. Un grand Geométre moderne *, qui a consideré ces derniéres, les appelle *Courbes à double courbure.* On conçoit qu'en général elles sont plus compliquées que les *Courbes à simple courbure*, qui peuvent être décrites sur un plan. Dans cette Introduction nous nous bornerons à celles-ci, dont les propriétés servent de fondement aux recherches qu'on peut faire sur les autres.

5. DES CARTES † est le premier, je pense, qui ait entrepris d'exprimer la nature des Lignes par des Equations algébriques. Voici comment il s'y est pris. Dans le plan, sur lequel une Ligne comme M*M* est tracée, on choisit à volonté un Point fixe, qu'on nomme l'*Origine*, par lequel on méne à discrétion deux Droites AB, AD. De chaque point M de la Ligne M*M* on méne des Droites MP, MQ paralléles aux Droites AB, AC, & qui y sont terminées réciproquement. L'une, comme MP ou son égale AQ, se nomme l'*Ordonnée* ou l'*Appliquée*. L'autre, comme MQ ou son *Fig.* 3.

A 2

* *Mr.* CLAIRAUT, *Recherche sur les Courbes à double courbure.* 4°. Paris 1731.

† *Géométrie*, Livre I. & II.

PLANC. I. son égale AP, se nomme la *Coupée* ou l'*Abscisse*. C'est pourquoi la Droite AB s'apelle la *Ligne* ou l'*Axe des abscisses* ou des *coupées*, & la Droite AD la *Ligne* ou l'*Axe des ordonnées* ou des *appliquées*. Et l'on se sert du mot de *coordonnées* pour exprimer en commun l'abscisse & l'ordonnée d'un même point. MP & MQ, ou MP & PA, ou enfin MQ & QA sont les coordonnées du point M. CHAP. I. §. 5.

6. Chaque point d'une Ligne réguliére ayant une propriété commune [§. 2], qui caractérise cette Ligne & distingue les points qui lui apartiennent de ceux qui ne lui apartiennent pas; cette propriété se réduit ordinairement à un certain raport entre les coordonnées, lequel se peut souvent exprimer par une Equation algébrique indéterminée. C'est cette Equation qu'on apelle l'*Equation de la Ligne* dont elle exprime la nature.

Fig. 4. Soit par ex. le Cercle mM*umM*, décrit du centre C avec le raion donné CM: On demande l'Equation qui exprime la nature de sa circonférence. Qu'on prenne à volonté le Point A pour l'Origine, AB pour la Ligne des abscisses, & AD perpendiculaire à AB pour la Ligne des ordonnées. Si d'un point M, pris à volonté sur la circonférence, on méne MP, MQ paralléles à AD, AB; elles seront les coordonnées du point M. On cherche donc l'équation indéterminée qui exprime leur raport d'une maniére générale, c'est-à-dire, qui exprime, non le raport particulier des Droites MP, MQ tracées dans la Figure, mais le raport général de l'abscisse & de l'ordonnée d'un point quelconque de la circonférence. Cette équation doit se déduire de la propriété commune à tous les points de la circonférence M*mM*, qui consiste en ce que chacun d'eux est à une même distance donnée CM du centre C. Cette propriété dépend donc & de la grandeur donnée du raion CM, & de la position donnée du centre C. La position du

CHAP. I. §. 6. du centre C par raport aux Droites AB, AD, auxquelles tout se doit raporter, est fixée en menant les Droites CF, CE parallèles à AB, AD. Car, le centre C & les Droites AB, AD étant donnés de position, la grandeur des Droites CF, CE est donnée; & réciproquement les Droites CE, CF étant données de position, la position du centre C est fixée. Désignons ces Droites données par des lettres, en nommant CE, a; CF, b; & le raion CM, r. Les lettres a, b, r, marquent donc des *grandeurs constantes*, qui restent toujours les mêmes, en quelque endroit de la circonférence qu'on prenne le point M; parce que leur grandeur est indépendante du choix de ce point M. Mais si on désigne l'abscisse AP, ou MQ, par la lettre x, & l'ordonnée MP, ou AQ, par la lettre y; ces deux lettres x & y exprimeront des *grandeurs variables*. Car, comme on cherche une équation qui convienne également à tous les points de la circonférence, une équation qui exprime également le raport des coordonnées AP, PM du point M, & des coordonnées $A\pi$, $\pi\mu$ de tout autre point μ de la circonférence; la lettre x doit désigner indiféremment l'abscisse AP & l'abscisse $A\pi$, & en général une abscisse quelconque; & la lettre y doit marquer également l'ordonnée PM & l'ordonnée $\pi\mu$, & en général une ordonnée quelconque: observant seulement que, dans l'équation, x & y expriment les coordonnées d'un même point, mais quelconque. Pour fixer les idées, attachons nous au point M. Si son ordonnée MP coupe la droite CF en G, on aura GM $= MP - PG = MP - CE = y - a$, & CG $= CF - FG = CF - AP = b - x$. Mais le triangle CGM étant rectangle, les quarrés de GM & de CG ensemble sont égaux au quarré de l'hypothenuse CM. Donc $(y-a)^2 + (b-x)^2 = rr$, ou $yy - 2ay + aa + bb - 2bx + xx = rr$. Cette équation n'est pas particulière au point M: elle convient aussi bien à tout autre point de la circonférence PLANC. I.

PLANC. I. conférence, par ex. au point μ. Car, à ce point μ, on a $\mu\gamma = \mu\pi - \pi\gamma = \mu\pi - CE = y - a$, & $C\gamma = F\gamma - FC = A\pi - FC = x - b$. De plus $C\mu = CM = r$. Donc l'équation $\mu\gamma^2 + C\gamma^2 = C\mu^2$, que donne le triangle rectangle $C\gamma\mu$, exprimée analytiquement, est $(y-a)^2 + (x-b)^2 = rr$, ou $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, qui est précisément la même que celle du point M. CHAP. I. §. 6.

Ainsi cette équation exprime analytiquement la nature du Cercle. Elle est du genre de celles que les Analystes nomment *indéterminées*, parce qu'elles contiennent deux inconuës, ou plutôt deux variables, qui ont chacune une infinité de valeurs, mais qui sont tellement enchainées l'une à l'autre par le lien de l'équation, que la détermination d'une de ces variables emporte la détermination de l'autre. Dans cette équation $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, si l'on veut que la variable x réprésente l'abscisse determinée AP, que je nommerai c, l'équation indéterminée se change en cette égalité déterminée $yy - 2ay + aa + cc - 2bc + bb = rr$, où y, qui n'est plus une variable mais seulement une inconnuë, exprime la valeur de l'ordonnée determinée PM. Et si l'on donne à x la valeur d, que je suppose être celle de l'abscisse $A\pi$, l'équation indéterminée se transforme en cette égalité déterminée $yy - 2ay + aa + dd - 2bd + bb = rr$, où y maintenant déterminée exprime l'ordonnée $\pi\mu$.

7. On auroit trouvé une équation plus simple pour exprimer la nature du Cercle, en choisissant mieux la position de l'origine. Si on l'avoit prise au centre, laissant toûjours les coordonnées perpendiculaires l'une à l'autre, l'abscisse x auroit été CP, & l'ordonnée y auroit été PM; & le triangle rectangle CPM faisant voir que les quarrés des deux coordonnées sont ensemble égaux au quarré du rayon, on Fig. 5.

CHAP. I. §. 7. on auroit eu, pour l'équation du Cercle, $xx + yy = rr$. PLANC. I.

Une même Ligne peut donc être désignée par des Equations différentes, qui la représentent chacune, pour ainsi dire, sous son point de vuë. Et l'Analyse des Courbes consiste en partie à déterminer la position des Axes, de telle maniére qu'il en résulte, pour exprimer une Courbe, l'équation la plus simple ou la plus convenable au but qu'on se propose.

8. MAIS, avant que d'aller plus loin, il est à propos de remarquer ici, qu'il y a des Courbes réguliéres dont on ne peut pourtant exprimer la nature par aucune équation analytique.

Si on décrit, par ex. sur le diamêtre AB, un Cercle ADB, & qu'abaissant de chaque point D de la circonférence une perpendiculaire DP sur le diamétre AB, on la prolonge en M jusqu'à-ce que PM soit égale à l'arc correspondant AD: la Courbe AMC, qui passe par tous ces points M, sera réguliére, étant décrite suivant une loi uniforme. On ne sauroit pourtant la représenter par aucune équation algébrique, parce que prenant les Sinus verses AP pour les abscisses, on n'a aucune maniére algébrique d'exprimer leur raport aux arcs AD, ou aux ordonnées PM qui sont égales à ces arcs. Fig. 6.

Ces sortes de *Courbes* sont apellées *transcendantes*, *méchaniques*, ou *irrationelles*; pour les distinguer de celles qu'on peut représenter par des équations algébriques, & qu'à cause de cela on nomme *Courbes algébriques*, *géométriques*, ou *rationelles*. C'est surtout pour les Courbes transcendantes qu'on a besoin du *Calcul des infiniment petits*, qui fournit des équations propres à exprimer la nature de ces Courbes.

9. Entre

9. Entre ces deux genres de Courbes, les algébriques & les transcendantes, on peut placer le genre des *Courbes exponentielles.* C'est le nom qu'on donne aux Courbes dont la nature s'exprime par des équations, où il n'entre, à la vérité, aucune grandeur infinie ou infiniment petite, mais qu'on ne peut pourtant pas raporter aux équations algébriques ordinaires, parce qu'elles renferment des termes qui ont des exposants variables.

Une des plus simples Courbes en ce genre est la *Logarithmique*, représentée par l'équation $y = ba^x$. Sa nature consiste en ce que, les abscisses étant prises en progression arithmétique, les ordonnées sont en progression géométrique. Si on désigne par l'unité la différence qui régne dans la progression des abscisses, & par $1 : a$ la raison qui régne dans la progression des ordonnées, on verra que si l'ordonnée à l'origine est b, les abscisses

$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$ &c.

qui sont en progression arithmétique, auront les ordonnées

$b = ba^0, \quad ba = ba^1, \quad ba^2, \quad ba^3, \quad ba^4, \quad ba^5,$ &c.

en progression géométrique. Donc en général à l'abscisse x répond l'ordonnée ba^x. Ainsi, nommant cette ordonnée y, l'équation de la Logarithmique sera $y = ba^x$.

On peut rapporter à ce genre, ou plûtôt à un genre intermédiaire entre les Courbes exponentielles & les algébriques, celles que Mr. LEIBNITZ nomme *interscendentes.* Ce sont celles dans l'équation desquelles on trouve quelques termes avec des exposants irrationels: comme dans l'équation $y^{\sqrt{2}} + y = x$.

10. NÔTRE dessein n'est point de parler ici de toutes ces sortes de Courbes. Les algébriques nous offrent assez de singularités & de variétés. Elles sont ou finies, ou infinies, ou

CHAP. I. §. 10. ou mixtes. Une *Courbe* est *infinie*, quand elle a des branches qui vont à l'infini, comme les Courbes A, B, C, D, E, F. Une *Courbe* est *finie*, quand, renfermée dans un espace borné, elle retourne sur elle-même ; soit qu'elle ne fasse qu'un simple tour, comme le Cercle, ou l'Ovale G, soit qu'elle se noüe & renoüe plusieurs fois, comme un Huit-de-chiffre, ou un Las-d'amour, &c. H, I, K, L, M. Enfin, elle est *mixte*, quand après avoir fait quelques tours & détours dans un espace fini où elle repasse sur elle-même, elle jette enfin des branches à l'infini, comme N, O, P, Q. La partie finie d'une Courbe qui renferme un espace s'apelle une *Feuille*, & le Point où la Courbe se coupe elle-même se nomme un *Nœud*. PLANC. I. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

11. TOUTES ces inflexions & ces courbures, & en général toutes les singularités des Courbes algébriques, dont le §. précédent n'indique qu'une partie, sont si fidélement exprimées par l'équation qui en marque la nature, que la Courbe tracée sur le papier ne présente rien aux yeux qu'on ne puisse lire dans son équation, quand on entend ce langage. Il arrive même souvent que l'Analyse trouve dans une Courbe, par le calcul de son équation, des singularités que les Sens ne pourroient jamais découvrir.

Pour se faire une idée de la maniére dont une équation représente le contour d'une Ligne, il faut concevoir que l'abscisse, qui est zéro à l'Origine, va en croissant par tous les degrés imaginables jusqu'à l'infini, tant négatif que positif. La lettre x, qui désigne l'abscisse, prend donc successivement une infinité de valeurs différentes, positives & négatives. Ces valeurs, substituées l'une après l'autre dans l'équation indéterminée de la Courbe, la transformeroient en autant d'égalités déterminées, où l'on ne verroit plus d'inconnuës que y, dont les valeurs sont les racines

PLANC. I. de ces égalités. Ces valeurs, ou ces racines, expriment les ordonnées qui répondent à chaque abſciſſe. Ainſi chaque abſciſſe porte à ſon extrémité une ou pluſieurs ordonnées, ſuivant qu'il y a une ou pluſieurs racines de l'égalité en laquelle ſe transforme l'équation de la Courbe, quand on ſubſtituë à x la grandeur de l'abſciſſe. La Ligne, paſſant par toutes les extrémités de ces ordonnées, aura autant de branches qu'y a de valeurs différentes dans l'équation. Et quand l'Algébre peut donner ces valeurs, leur examen fait connoitre ſi les branches auxquelles elles ſe raportent ſont finies ou infinies, quel eſt leur cours, & leur poſition ; en un mot, tout ce qu'elles ont de remarquable. CHAP. I. §. 11.

Ainſi dans l'équation du Cercle, qui a été donnée au § 6, $yy - 2ay + aa + bb - 2bx + xx = rr$, ou $yy - 2ay + aa = rr - bb + 2bx - xx$, ſoit $(y-a)^2 = rr - bb + 2bx - xx$, y a deux racines ou valeurs différentes, ſçavoir $a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$, & $a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$. C'eſt pourquoi chaque abſciſſe AP [x] a
Fig. 4. deux ordonnées [y] PM & P*M*. La Courbe a donc deux branches, qui ſont les deux demi-circonférences, la ſupérieure mM*m*, & l'inférieure m*Mm*. La premiére paſſe par les ſommets de toutes les ordonnées PM [y] égales à $a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$, & la ſeconde par les extrémités de toutes les ordonnées P*M* [y] égales à $a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$.

Mais dans cette autre équation indéterminée $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, y n'a qu'une ſeule valeur $\frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$. Chaque abſciſſe de la Courbe, que cette équation repréſente, n'a donc qu'une ſeule ordonnée. A proprement parler, la Courbe n'a qu'une ſeule branche : mais cette branche eſt quelquefois comptée pour deux ; parce qu'elle s'étend à l'infini du côté poſitif & du côté négatif.

12. Non-

CHAP. I. §. 12. 12. Non-seulement l'équation d'une Courbe indique le nombre de ses branches, elle marque encore leur position. Les valeurs positives de x marquent des abscisses positives, & les valeurs négatives de x désignent des abscisses négatives. De même les ordonnées positives sont indiquées par les valeurs positives de y, & les ordonnées négatives, par les valeurs négatives de y. L'usage, mais arbitraire & libre, est de prendre les abscisses positives à la droite, les négatives à la gauche; les ordonnées positives au dessus de l'Axe des abscisses, les négatives au dessous. De là les noms donnés aux quatre angles que font entr'eux les deux Axes. L'angle BAD se nomme l'*Angle des abscisses & des ordonnées positives*, ou l'*Angle des coordonnées positives*, parce que tout point de la Courbe qui se trouve dans cet angle a son abscisse & son ordonnée positive. Par une raison semblable, BAd est l'*Angle des abscisses positives & des ordonnées négatives*, DAb l'*Angle des abscisses négatives & des ordonnées positives*, & enfin dAb se nomme l'*Angle des abscisses & des ordonnées négatives*, ou l'*Angle des coordonnées négatives*. Les deux angles opposés DAB, dAb s'apellent, d'un nom commun, les *Angles des coordonnées de même signe*, & les angles opposés BAd, bAD sont les *Angles des coordonnées de differens signes*. BAD, BAd sont les *Angles des abscisses positives*, DAb, dAb les *Angles des abscisses négatives*; BAD, DAb les *Angles des ordonnées positives*, BAd, bAd les *Angles des ordonnées négatives*. PLANC. I. Fig. 3.

13. Quand l'Analyse peut résoudre l'équation d'une Ligne; ses racines font connoître la position des branches de cette Courbe, elles indiquent dans quel angle, ou dans quels angles, tombent ces branches. Lorsque, dans une racine, les x étant positives les y le sont aussi, la branche que représente cette racine est dans l'angle des coordonnées positives : mais si les x positives donnent des y né-

 gatives,

PL. II. gatives, la branche eſt dans l'angle des abſciſſes poſitives & des ordonnées négatives. Que ſi les x négatives rendent les y poſitives, la branche tombe dans l'angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives : mais ſi aux x négatives répondent des y auſſi négatives, la branche tombe dans l'angle des coordonnées négatives. CHAP. I. §. 13.

Ainſi dans la Courbe que repréſente l'éq : $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ou $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ [§. 11], l'équation fait voir qu'à l'Origine, où x eſt zéro, la valeur de
Fig. 10. y eſt $\frac{5}{6}a$. $Aa = \frac{5}{6}a$ eſt donc la grandeur de la *prémiére ordonnée*. Suppoſant enſuite x poſitive, on voit qu'à meſure qu'elle augmente, les termes $\frac{xx}{6a}$ & x augmentent auſſi, ſans que le terme conſtant $\frac{5}{6}a$ diminuë ; ce qui prouve que l'abſciſſe x croiſſant, l'ordonnée y [$= \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$], qui eſt poſitive, croit auſſi. Donc du côté des abſciſſes poſitives, la Courbe n'a qu'une branche a d, qui tombe toute entiére dans l'angle des coordonnées poſitives, & qui, partant de l'extrémité a, de la prémiére ordonnée A a, s'éloigne à l'infini & de l'Axe des abſciſſes & de l'Axe des ordonnées.

Pour connoître le cours de cette Ligne du côté des abſciſſes négatives, on fera x négative, ce qui change l'éq. $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ en $y = \frac{xx}{6a} - x + \frac{5}{6}a$. Où l'on voit que x étant moindre que $6a$, $\frac{xx}{6a}$ eſt moindre que x, de façon que le terme conſtant $\frac{5}{6}a$ eſt moins augmenté par le terme poſitif $\frac{xx}{6a}$ que diminué par le terme négatif $-x$. L'ordonnée y va donc d'abord en décroiſſant, à meſure que

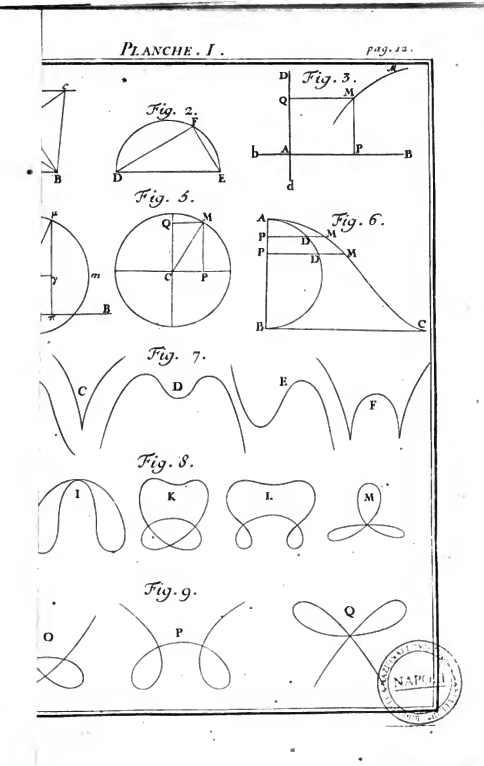


Fig. 2.
F
D
E
Fig. 3.
D
Q
M
A
P
b
B
d
Fig. 5.
Q
M
C
P
μ
γ
m
π
B
Fig. 6.
A
P
P
M
D
D
M
B
C
Fig. 7.
C
D
E
F
Fig. 8.
I
K
L
M
Fig. 9.
O
P
Q

CHAP. I. §. 13. que x négative augmente, si bien que y, qui étoit à l'Origine $\frac{5}{6}a$, diminuë jusqu'à devenir zéro, quand x est devenuë a. Car alors y est $\frac{aa}{6a} - a + \frac{5}{6}a = 0$. Si donc on prend l'abscisse négative AE égale à a, l'ordonnée de cette abscisse sera zéro, c'est-à-dire, que la Courbe aE passera par le point E de l'Axe des abscisses. L'abscisse x continuant à croître du côté négatif, les ordonnées deviennent négatives, & restent négatives jusqu'à-ce que x soit devenuë $5a = $ AI. Alors l'ordonnée est de nouveau égale à zéro [$y = \frac{25aa}{6a} - 5a + \frac{5}{6}a = 0$]. La Courbe, après s'être enfoncée au dessous de l'Axe des abscisses jusqu'à un certain terme, remonte & coupe de nouveau cet Axe au point I, éloigné de l'Origine A de la distance $5a$. L'abscisse x continuant à croître, toûjours du côté négatif, l'ordonnée y redevient positive, & se trouve égale à la prémiére ordonnée Aa [$\frac{5}{6}a$] quand x vaut $6a$. Après quoi x croissant toûjours, le terme positif $\frac{xx}{6a}$ l'emporte toûjours sur le terme négatif $-x$, & l'ordonnée y va toûjours en augmentant à mesure que l'abscisse augmente, ce qui donne la branche infinie Im, qui s'éloigne à l'infini de l'un & de l'autre Axe. PL. II.

On saisira parfaitement ce détail, & on verra sensiblement quel est le cours de la Ligne, si on substituë successivement, dans l'éq: $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$, différentes valeurs aulieu de x, comme $3a$, $2a$, a, 0, $-a$, $-2a$, $-3a$, $-4a$, $-5a$, $-6a$, $-7a$, &c. & l'on trouvera qu'à ces abscisses répondent les ordonnées $5\frac{1}{3}a$, $3\frac{1}{2}a$, $2a$, $\frac{5}{6}a$, 0, $-\frac{1}{2}a$, $-\frac{2}{3}a$, $-\frac{1}{2}a$, 0, $\frac{5}{6}a$, $2a$, &c. Ce calcul fait, onpourra *décrire par points* cette portion de la Cour-

Pl. II. be qui s'étend depuis l'abſciſſe $3a$ juſqu'à l'abſciſſe $-7a$, Chap. I.
c'eſt-à-dire, qu'on pourra aſſigner onze points de la Courbe, aſſez près les uns des autres, pour qu'il ſoit aiſé de la décrire avec quelque exactitude en traçant d'une main hardie une Ligne courbe par ces onze points. Pour cet effet, ayant mené deux Droites AP, AQ, qui ſe croiſent, à angles droits ſi l'on veut, au point A choiſi pour l'Origine, on prendra ſur l'Axe des abſciſſes AP, du côté droit, trois parties AB, BC, CD égales à la Droite donnée a, pour avoir les trois abſciſſes poſitives $AB = a$, $AC = 2a$ & $AD = 3a$, & du côté gauche ſept parties auſſi égales à a, pour avoir les ſept abſciſſes négatives $AE = -a$, $AF = -2a$, $AG = -3a$, $AH = -4a$, $AI = -5a$, $AL = -6a$, $AM = -7a$. Par les points D, C, B, E, F, G, H, I, L, M, on ménera des paralléles à AQ, qui ſeront les ordonnées de ces abſciſſes, & on leur donnera les longueurs convenables, en faiſant $Dd = 5\frac{1}{3}a$, $Cc = 3\frac{1}{2}a$, $Bb = 2a$, $Aa = \frac{5}{6}a$, $Ff = -\frac{1}{2}a$, $Gg = -\frac{2}{3}a$, $Hh = -\frac{1}{2}a$, $Ll = \frac{5}{6}a$, $Mm = 2a$. Les points d, c, b, a, E, f, g, h, I, l, m, ainſi déterminés ſont tout autant de points de la Courbe que repréſente

§. 13.

Fig. 10.

l'éq: $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ ou $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$:

& comme ils ſont aſſez près les uns des autres, ſi la Droite a eſt fort petite, on ſe repréſentera aſſez bien la forme de cette Courbe, en traçant une Ligne par tous ces points.

Fig. 11.

Autre Exemple. Si on examine de même la Courbe repréſentée par l'éq: $xxy + 2axy - axx + aay = 0$, ou

$y = \frac{axx}{xx + 2ax + aa} = a\left(\frac{x}{a+x}\right)^2$, on verra que $x = 0$

donne auſſi $y = 0$, ce qui montre que la Courbe paſſe par l'Origine A. Prenant enſuite ſucceſſivement diverſes abſciſſes, toutes poſitives & toûjours plus grandes, c'eſt-à-dire x augmentant toûjours, le numérateur & le dénominateur

CHAP. I. §. 13. nateur de la fraction $\frac{x}{a+x}$ augmentent auſſi ; mais le numérateur augmente plus à proportion que le dénominateur. Ainſi la fraction $\frac{x}{a+x}$ & la valeur $a(\frac{x}{a+x})^2$ de l'ordonnée y vont en croiſſant, de ſorte que la branche AB, qui eſt du côté des abſciſſes poſitives, eſt toute entiére au deſſus de la Ligne des abſciſſes, & s'en éloigne de plus en plus. Elle ne s'en éloigne pourtant pas à l'infini, mais ſeulement d'une diſtance égale à la Droite donnée a. Car quand x ſeroit infinie, elle ſeroit cenſée égale à $a+x$, & y qui eſt toujours $a(\frac{x}{a+x})^2$ ſeroit égale à $a(\frac{x}{x})^2 = a$. PL. II.

Du côté des abſciſſes négatives, le cours de cette Courbe eſt plus ſingulier. Pour le reconnoître, on fera x négative dans l'éq : $xxy + 2axy - axx + aay = 0$ de la Courbe, ce qui la transforme en $xxy - 2axy - axx + aay = 0$, qui ſe réduit à $y = a(\frac{x}{a-x})^2$ ou $a(\frac{x}{x-a})^2$, ſuivant que x eſt plus grande ou plus petite qu'a. Voïons d'abord quelles ordonnées répondent aux abſciſſes plus petites qu'a. Il eſt clair que plus x augmente, plus le numérateur de la fraction $\frac{x}{a-x}$ augmente, & plus le dénominateur diminuë. L'augmentation de l'un & la diminution de l'autre concourent à faire augmenter la fraction. Ainſi l'ordonnée y [$= a(\frac{x}{a-x})^2$] augmente avec l'abſciſſe, mais ſi rapidement qu'elle devient infinie quand l'abſciſſe x [AC] eſt devenuë égale à a. Car alors y [CD] eſt $= a(\frac{a}{a-a})^2 = \frac{a^3}{oo}$. Or une grandeur finie a^3 diviſée par le zéro repréſente l'infini, parce que le fini contient une

PL. II. une infinité de fois le zéro ou plûtôt l'infiniment petit. CHAP. I.
Après cela l'abſciſſe x étant plus grande qu'a, l'ordonnée §. 13.
$y = a\left(\frac{x}{x - a}\right)^2$ eſt d'abord exceſſivement grande, parce que le dénominateur $x - a$ eſt exceſſivement petit. Mais à meſure que x augmente, le dénominateur augmente & même dans une plus grande proportion que le numérateur, de ſorte que la fraction diminuë & avec elle l'ordonnée y. Cependant cette diminution a ſes bornes : car quand l'abſciſſe eſt infinie, le dénominateur $x - a$ eſt cenſé égal au numérateur x, puiſqu'il n'en différe que de la grandeur finie a qui n'eſt rien auprès de l'infinie x. Alors donc y eſt $a\left(\frac{x}{x}\right)^2 = a$. Cette branche EF de la Courbe, qui répond aux abſciſſes négatives plus grandes qu'a, vient donc de l'infini en s'aprochant de l'Axe des abſciſſes : mais elle n'en aproche point plus que de la diſtance a. Et tout le cours de la Ligne eſt à peu près tel que le repréſente BADEF dans la *Fig.* 11, qui a été tracée par points, ſuivant le calcul des ordonnées, dont voici le réſultat.

$x = inf., 3a, 2a, a, 0, -\frac{1}{4}a, -\frac{1}{2}a, -\frac{3}{4}a, -a, -1\frac{1}{2}a, -2a, -3a, -inf.$

$y = a, \frac{9}{16}a, \frac{4}{9}a, \frac{1}{4}a, 0, \frac{1}{9}a, a, 9a, inf., 9a, 4a, \frac{9}{4}a, a.$

14. DE CES deux Exemples, quoique particuliers, on peut tirer deux Concluſions, qu'on verra ſans peine être générales.

La prémiére, c'eſt qu'une Ligne algébrique paſſe par l'Origine, quand ſon équation eſt telle que x étant ſuppoſée égale à zéro, $y = 0$ en eſt une des racines ; ou, ſi l'on aime mieux, quand y étant ſuppoſée égale à zéro, $x = 0$ en eſt une des racines.

Ainſi, dans le ſecond Exemple [§. *préc.*], ſi l'on fait $x = 0$, l'éq : $xxy + 2axy - axx + aay = 0$ ſe réduit à $aay = 0$,

CHAP. I. §. 14. $aay = 0$, dont $y = 0$ est la ſeule racine. Donc à l'abſciſſe zéro, c'eſt-à-dire à l'Origine, l'ordonnée eſt zéro. La premiére ordonnée eſt donc ſans longueur, elle ſe réduit à un point, & la Courbe, qui paſſe eſſentiellement par le ſommet de toute ordonnée, paſſe par l'Origine. PL. II.

Or $x = 0$ donne $y = 0$, toutes les fois que dans l'équation d'une Ligne il n'y a aucun terme tout conſtant, aucun terme qui ne renferme ni x ni y. Car, dans cette équation là, ſi l'on fait $x = 0$, tous les termes où il y a quelque x s'évanouiſſent, & tous les termes qui reſtent ſont multipliés par y, puiſqu'il n'y avoit aucun terme qui n'eut ou x ou y. Ces termes reſtans s'évanouiroient donc par la ſuppoſition de $y = 0$. Il font donc entr'eux une équation dont $y = 0$ eſt une racine. Ainſi à l'abſciſſe $x = 0$ répond au moins une ordonnée $y = 0$. Donc la Ligne, dans l'équation de laquelle il n'y a aucun terme tout conſtant, paſſe par l'Origine.

15. La ſeconde Concluſion, c'eſt qu'on trouvera en quels points une Ligne algébrique coupe l'Axe des ordonnées, en faiſant $x = 0$ dans l'équation de cette Ligne. Les valeurs de y dans l'équation transformée détermineront les points où la Ligne rencontre l'Axe des ordonnées.

Ainſi dans le premier Exemple du §. préc. en faiſant $x = 0$ dans l'éq: $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$, on la réduit à $y = \frac{5}{6}a$. C'eſt pourquoi la Courbe ne paſſe pas par l'Origine A, parce que $x = 0$ ne donne pas $y = 0$: mais elle paſſe par le point a de la Ligne des ordonnées, qui eſt à la diſtance A a $= \frac{5}{6}a$ de l'Origine, parce que $x = 0$ donne $y = \frac{5}{6}a$. Fig. 10.

De même, on aura les points où une Ligne algébrique coupe l'Axe des abſciſſes, en cherchant les valeurs de

 x dans

PL. II. x dans l'équation transformée par la substitution de zéro au lieu de y. CHAP. I. §. 15.

Dans la même équation, $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ ou $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, si l'on fait $y = 0$, on aura $xx + 6ax + 5aa = 0$, qui a deux racines $x = -a$, & $x = -5a$. Ce qui montre que la Courbe rencontre l'Axe des abscisses en deux points E, I; sçavoir, aux extrémités des abscisses AE $[-a]$ & AI $[-5a]$.

16. C'EST donc les abscisses & les ordonnées, qui, suivant qu'elles sont positives ou négatives, déterminent la position des branches d'une Ligne algébrique, & qui font connoître dans lequel des quatre angles des coordonnées elles se trouvent. Ces ordonnées méritent encore plus d'être considérées quand l'équation les donne imaginaires *, quand elle les détermine à cesser d'être possibles. Alors la Courbe manque dans toute l'étenduë où les ordonnées sont imaginaires. Elle manque tout-à-fait, ou, pour mieux dire, l'équation ne représente aucune Courbe, lorsque ses racines sont toujours imaginaires.

Telle est l'équation $yy + xx + rr = 0$, dont les racines $y - \sqrt{(-rr - xx)} = 0$, & $y + \sqrt{(-rr - xx)} = 0$ sont essentiellement imaginaires, quelque valeur qu'on donne à x.

Mais il arrive plus souvent que la Courbe ne manque qu'en partie. Cela a lieu quand les racines qui expriment les ordonnées sont réelles dans une certaine étenduë, & imaginaires dans une autre étenduë. Soit que la Courbe renfermée, comme le Cercle, dans un certain espace ne s'étende point au-delà, ni d'un coté ni de l'autre. Soit qu'allant à l'infini d'un côté elle ne passe point certaines bornes

* *Hist. de l'Acad.* 1729. pag. 41.

CHAP. I. §. 16. bornes de l'autre. Soit qu'étenduë à l'infini de part & d'autre elle laisse dans le milieu un ou plusieurs espaces où les ordonnées sont imaginaires. Alors il y a dans ce milieu des vuides qui séparent les parties de la Courbe. PL. II.

Soit proposée l'équation $y^4 - 96yy - x^4 + 100xx = 0$, qui, résoluë par la méthode ordinaire pour les équations du second degré, se trouve avoir ces quatre racines,

$$y = +\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$
$$y = +\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$
$$y = -\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$
$$y = -\sqrt{(58 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$

Où l'on voit 1°. Qu'en général à chaque abscisse x répondent quatre ordonnées y, hors les cas où quelques-unes, ou bien les quatre, deviennent imaginaires.

2°. Que les deux prémiéres racines, étant positives, indiquent des branches qui sont au dessus de la Ligne des abscisses, au lieu que les branches représentées par les deux derniéres racines, qui sont négatives, tombent au dessous de la Ligne des abscisses (§. 13).

3°. Que la prémiére & troisiéme racine étant précisément les mêmes, si ce n'est que la prémiére est positive & la troisiéme négative; la branche que représente la prémiére est semblable à celle que désigne la troisiéme, mais dans une position renversée, l'une étant au dessus & l'autre au dessous de l'Axe des abscisses. Ce qui ayant aussi lieu pour la seconde & quatriéme racine, il suit que l'Axe des abscisses partage la Courbe en deux parties qui se ressemblent; & même, si les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses, en deux parties exactement égales & semblables, & qui se regardent mutuellement, de sorte que l'une est, pour ainsi dire, l'image ou la contr'épreuve de l'autre.

 4°. Que

PL. II. 4°. Que dans ces quatre racines, comme il n'y a que des puissances paires de x, sçavoir, x^2 & x^4, qui sont également puissances de x & de $-x$; chaque abscisse négative a les mêmes ordonnées que l'abscisse positive égale : de sorte que le côté gauche de la Courbe est tout pareil à son côté droit ; ou, ce qui est la même chose, que l'Axe des ordonnées partage, comme celui des abscisses, la Courbe en deux parties semblables. CHAP. I. §. 16.

Il suffira donc d'examiner les ordonnées positives qui répondent aux abscisses positives, de voir ce que donne x positive dans les deux prémiéres racines de l'équation. Car quand on aura les branches de la Courbe dans l'angle des coordonnées positives, on aura le cours entier de cette Ligne, puisqu'il est exactement le même dans les trois autres angles.

Voyons donc d'abord quelles branches fournit la prémiére racine $y = \sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$. Cette racine sera réelle, tant qu'on donnera à x une valeur qui rende $x^4 - 100xx + 2304$ positive. Car cette grandeur étant positive, sa racine quarrée précédée du signe $+$ est réelle & positive, laquelle avec 48 fait une somme positive, dont la racine quarrée $\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ est réelle. Si au contraire on donne à x une grandeur qui rende $x^4 - 100xx + 2304$ négative, la racine quarrée de cette grandeur négative est imaginaire, & y, dont l'expression $\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ renferme cette racine quarrée, est imaginaire. L'existence ou non-existence des branches représentées par cette racine, dépend donc de ce que la grandeur $x^4 - 100xx + 2304$ est positive ou négative. Pour déterminer ce qu'elle est, on cherchera les racines $xx - 36 = 0$ & $xx - 64 = 0$ de l'éq: $x^4 - 100xx + 2304 = 0$, afin de réduire cette grandeur en ses deux facteurs $(xx - 36) \times (xx - 64)$. On réduira de même $xx - 36$ en ses deux facteurs.

CHAP. I. §. 16. facteurs $(x-6)\times(x+6)$ & $xx-64$ en ses deux facteurs $(x-8)\times(x+8)$. Ainsi la grandeur $x^4-100xx+2304$ est réduite en ses quatre facteurs $(x+6)\times(x-6)\times(x+8)\times(x-8)$. Elle sera donc positive, si ces quatre facteurs sont positifs, ou s'il y en a deux seulement : mais elle sera négative, si un seul de ses facteurs, ou trois, sont positifs. Comme on suppose x positive, les deux facteurs $x+6$ & $x+8$ sont essentiellement positifs. Donc $x^4-100xx+2304$ est une grandeur positive, quand $x-6$ & $x-8$ sont tous deux positifs ou tous deux négatifs : elle est négative, quand x tombant entre 6 & 8 rend $x-6$ positif & $x-8$ négatif. PL. II.

La racine $y=+\sqrt{(48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)})}$ donne donc deux branches séparées par l'intervalle qui tombe entre les abscisses $x=6$ & $x=8$. Examinons ces deux branches l'une après l'autre.

D'abord, si $x=0$, on aura $y=\sqrt{(48+\sqrt{2304})}=\sqrt{(48+48)}=\sqrt{96}$. C'est la grandeur de la prémiére ordonnée de cette branche. Ensuite, x prenant quelque grandeur, $-100xx$ retranche plus de 2304 que x^4 ne lui ajoûte : ensorte que l'ordonnée va en décroissant à mesure que l'abscisse augmente, jusqu'à-ce que $x=6$ faisant $x^4-100xx+2304$ égal à zéro réduise y à $\sqrt{48}$. La prémiére branche CB va donc en s'aprochant de la Ligne des abscisses, dès le point C extrémité de la prémiére ordonnée $AC=\sqrt{96}$ jusqu'au point B extrémité de l'ordonnée $PB=\sqrt{48}$, qui répond à l'abscisse $AP=6$. Fig. 12.

L'autre branche, que désigne la même racine $y=\sqrt{(48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)})}$ commence à l'abscisse $x=8=AQ$. Cette valeur de x rendant $x^4-100xx+2304$ égal à zéro, donne $y=QD=\sqrt{48}$. Dès lors x croissant augmente la grandeur $x^4-100xx+2304$ & par conséquent l'ordonnée $y\,[+\sqrt{(48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)})}]$

PL. II. Cette racine marque donc une branche DE, qui part du point D & va en s'éloignant à l'infini de l'Axe des abſciſſes & de celui des ordonnées. CHAP. I. §. 16.

Voyons à préſent quelles branches donne la ſeconde racine $y = \sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$.

On voit d'abord que cette racine eſt imaginaire, comme la précédente, tant que $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ eſt imaginaire; c'eſt-à-dire, dans tout l'intervalle compris entre les abſciſſes $x = 6$ & $x = 8$, où la Courbe n'a ni ordonnée ni branche.

Outre cela, cette ſeconde racine eſt imaginaire quand $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ ſurpaſſe 48, parce qu'alors $48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ eſt négative, & ſa racine quarrée, qui eſt la valeur de y, imaginaire. Or $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ ſurpaſſe 48, quand ſon quarré $x^4 - 100xx + 2304$ ſurpaſſe le quarré de 48, qui eſt 2304, quand $x^4 - 100xx > 0$, ou $x^4 > 100xx$, quand $xx > 100$, ou $x > 10$.

La racine $y = \sqrt{(48 - (x^4 - 100xx + 2304))}$ eſt donc imaginaire, 1°. quand x tombe entre 6 & 8, & 2°. quand x ſurpaſſe 10. Elle eſt au contraire réelle, 1°. quand x eſt moindre que 6, & 2°. quand x tombe entre 8 & 10. Elle indique donc, comme la précédente, deux branches, mais dans une poſition bien différente. Conſidérons-les l'une après l'autre.

Si on fait $x = 0$, on aura $y = \sqrt{(48 - \sqrt{2304})} = \sqrt{(48 - 48)} = 0$. La prémiére branche paſſe donc par l'Origine. Enſuite x croiſſant, $x^4 - 100xx + 2304$ décroit, & par conſéquent $\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$, ou y, augmente, juſqu'à-ce que x devenuë égale à $6 = AP$, donne $x^4 - 100xx + 2304 = 0$, & $y = \sqrt{48} = PB$. Cette racine exprime donc la branche AB, qui, partant de l'Origine A, va ſe joindre à l'extrémité B de la prémiére branche CB indiquée par l'autre racine.

On

Chap. I. §. 16. On a déja dit que toutes les abſciſſes entre $AP = 6$, & $AQ = 8$ n'ont que des ordonnées imaginaires. Mais $x = AQ = 8$ rend $x^4 - 100xx + 2304$ égal à zéro, & donne $y = \sqrt{(48 - 0)} = \sqrt{48} = QD$. Enſuite x augmentant, $x^4 - 100xx + 2304$ augmente, & $\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ diminuë, juſqu'à-ce que $x = 10$ rende $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ égale à $\sqrt{2034} = 48$ & $y = \sqrt{(48 - 48)} = 0$. La Courbe paſſe par l'extrémité de l'abſciſſe $x = 10 = AF$. Donc la ſeconde branche qu'indique la racine $y = \sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ eſt la branche DF, qui, partant de l'extrémité D de la branche DE indiquée par la prémiére racine, vient ſe terminer au point F de l'Axe des abſciſſes. Pl. II.

On voit par tout ce détail que dans l'angle CAF des coordonnées poſitives, la Courbe pouſſe les branches ABC, FDE; auxquelles joignant de ſemblables branches dans les trois autres angles des coordonnées, on aura la Courbe entiére formée d'un Huit-de-chifre, qui ſe nouë à l'Origine, & de deux autres parties ſéparées, qui, après avoir ſerpenté à droite & à gauche, mais à quelque diſtance du Huit-de-chifre, jettent quatre branches à l'infini, une dans chacun des quatre angles des coordonnées.

On remarquera ſenſiblement tous ces détours en traçant la Courbe par points, ſuivant le Calcul ci-joint, où les grandeurs radicales ont été réduites à des approximations en fractions décimales. Fig. 12.

Soit

Pl. II. §. 16.

Soit $x = 0$, la 1e. y sera	$= \sqrt{(48+\sqrt{2304})} = 9.798 -$,	& la 2e. $y = \sqrt{(48-\sqrt{2304})} = 0$
$= 1.$	$\sqrt{(48+\sqrt{2205})} = 9.744 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{2205})} = 1.021 +$
$= 2.$	$\sqrt{(48+\sqrt{1920})} = 9.582 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{1920})} = 2.045 -$
$= 3.$	$\sqrt{(48+\sqrt{1485})} = 9.302 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{1485})} = 3.076 +$
$= 4.$	$\sqrt{(48+\sqrt{960})} = 8.887 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{960})} = 4.125 +$
$= 5.$	$\sqrt{(48+\sqrt{429})} = 8.289 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{429})} = 5.224 -$
$= 6.$	$\sqrt{(48+\ 0\ )} = 6.928 +$	$\sqrt{(48-\ 0\ )} = 6.928 +$
$= 7.$	$\sqrt{(48+\sqrt{-195})} =$ *imag.*	$\sqrt{(48-\sqrt{-195})} =$ *imagin.*
$= 8.$	$\sqrt{(48+\ 0\ )} = 6.928 +$	$\sqrt{(48-\ 0\ )} = 6.928 +$
$= 9.$	$\sqrt{(48+\sqrt{765})} = 8.698 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{765})} = 4.510 +$
$= 10.$	$\sqrt{(48+\sqrt{2304})} = 9.798 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{2304})} = 0$
$= 11.$	$\sqrt{(48+\sqrt{4845})} = 10.845 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{4845})} =$ *imag.*
$= 12.$	$\sqrt{(48+\sqrt{8640})} = 11.856 +$	$\sqrt{(48-\sqrt{8640})} =$ *imag.*
&c.	&c.	&c.

17. On peut remarquer dans cette Courbe, & la même chose a lieu dans toute autre qui a des ordonnées imaginaires, qu'une prémiére ou derniére ordonnée réelle, celle qui sert de limite aux ordonnées réelles & aux imaginaires, est proprement une double ordonnée, ou, si l'on veut, deux ordonnées égales réunies & confondues en une seule.

Fig. 12. Telles sont les ordonnées PB & QD qui répondent aux abscisses $AP = 6$ & $AQ = 8$, & aux sommets B, D desquelles se terminent les branches CB, AB & ED, FD. Si l'on fait $x = 6$, ou $x = 8$, la grandeur radicale $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ devient zéro, & les deux racines $+\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ & $+\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ se réduisent l'une & l'autre à $\sqrt{48}$, & deviennent égales. Donc, au lieu qu'en général, dans cette Courbe, chaque abscisse a deux ordonnées positives, les abscisses $AP = 6$ & $AQ = 8$ n'ont qu'une seule ordonnée positive PB, QD, ou, si l'on veut, elles en ont deux, mais égales & réunies. Plus l'abscisse $A\pi$ aproche de devenir égale à AP, plus π s'aproche de P, plus aussi les sommets β & β des ordonnées $\pi\beta$, $\pi\beta$ s'aprochent l'un de

CHAP. I. §. 17. de l'autre, juſqu'à-ce que Aπ devenant AP, le point π tombant ſur P, les ſommets β & ϵ tombent l'un ſur l'autre & tous deux enſemble ſur B. PL. II.

Telles ſont auſſi les ordonnées que repréſentent les racines $+\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ & $-\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$, lorſqu'on fait $x = 10 = AF$. Cette ſuppoſition rend ces deux racines égales à zéro, & par conſéquent égales entr'elles. Ici donc, deux ordonnées, une poſitive & une négative, deviennent égales & ſe réuniſſent en une ſeule ordonnée égale à zéro. Et cette ordonnée, ou plûtôt ce point F, eſt une limite qui ſépare les ordonnées réelles des imaginaires, une borne où viennent ſe terminer les deux branches DF, dF.

18. Ceci a généralement lieu dans toutes les Lignes algébriques, qui ont des ordonnées imaginaires, & ſuit néceſſairement de ce que l'Algébre enſeigne ſur les racines imaginaires, qu'elles ſont toûjours en nombre pair dans une équation, & qu'elles vont, pour ainſi dire, deux à deux : en ſorte qu'ayant été réelles juſqu'à un certain point, ſi elles deviennent imaginaires au-delà, elles ſont égales en ce point, ſoit qu'elles y ayent une grandeur finie, ſoit qu'elles y deviennent infinies, ſoit qu'elles s'anéantiſſent & ſe réduiſent à zéro. Car une racine ne paſſe du réel à l'imaginaire, * que parce que dans ſon expreſſion il entre, ſous un ſigne radical d'un expoſant pair, quelque grandeur, qui de poſitive devient négative : ce qui ne ſe peut faire ſans qu'elle paſſe par le zéro. Mais l'équation aura toûjours une autre racine exprimée de la même maniere que la précédente, ſi ce n'eſt que la grandeur radicale a un ſigne contraire. Dont la raiſon eſt que cha-

* *Uſage de l'Analyſe de* DES CARTES, *&c.* par Mr. l'Abbé DE GUA. pag. 423.

PL. II. chaque racine d'un exposant pair est également positive CH. II.
& négative, & par conséquent double. Lors donc que §. 18.
cette grandeur radicale passe par le zéro; les expressions de ces deux racines ne différent plus l'une de l'autre, les ordonnées qu'elles représentent sont égales.

Si, par ex. $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ est la racine d'une équation indéterminée; cette équation aura aussi ces trois autres racines, $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{-\sqrt{(2ax - xx)}}$, $y = \frac{ab - a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, & $y = \frac{ab - a\sqrt{(xx - aa)}}{-\sqrt{(2ax - xx)}}$. Car si l'on veut débarasser de signes radicaux l'équation $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, on aura d'abord $y\sqrt{(2ax - xx)} = ab + a\sqrt{(xx - aa)}$, & quarrant $yy(2ax - xx) = a^2b^2 + 2aab\sqrt{(xx - aa)} + aa(xx - aa)$; ensuite transposant $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = 2aab\sqrt{(xx - aa)}$, & quarrant derechef $(yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa))^2 = 4a^4bb(xx - aa)$. Or cette équation, ainsi dégagée de l'irrationalité, a les quatre racines indiquées ci-dessus. Car, si l'on en tire la racine quarrée, on aura également $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = + 2aab\sqrt{(xx - aa)}$, & $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = - 2aab\sqrt{(xx - aa)}$, parce que la racine quarrée de $xx - aa$ a également le signe $+$ & le signe $-$. Ces deux équations étant mises sous cette forme $yy = \frac{aabb + 2aab\sqrt{(xx - aa)} + aa(xx - aa)}{(2ax - xx)}$, & $yy = \frac{aabb - 2aab\sqrt{(xx - aa)} + aa(xx - aa)}{2ax - xx}$; si l'on en tire la racine quarrée, la prémiére donne $y = \frac{ab +}{}$

CH. II. §. 18. $\frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, & $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{-\sqrt{(2ax - xx)}}$; & PL. II.
la seconde donne $y = \frac{ab - a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, & $y = \frac{ab - a\sqrt{(xx - aa)}}{-\sqrt{(2ax - xx)}}$, parce que la racine quarrée de $2ax - xx$ peut prendre également le signe $+$ & le signe $-$. Ainsi l'équation rationelle $(yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa))^2 = 4a^4bb(xx - aa)$ a ces quatre racines, qu'on représente, au moyen du signe ambigu $\pm$, par cette seule expression $y = \frac{ab \pm a\sqrt{(xx - aa)}}{\pm\sqrt{(2ax - xx)}}$.

Si l'on fait $x = a$, ce qui rend $xx - aa = 0$, la premiére & la troisiéme racine deviennent l'une & l'autre égales à $+\frac{ab}{a} = +b$, la seconde & la quatriéme à $-b$. Ces racines devenant égales conservent une grandeur finie, à moins que b ne soit $= 0$; en quel cas elles deviennent nulles toutes les deux. Mais si l'on fait $x = 2a$, ce qui rend $2ax - xx = 0$, les quatre racines deviennent infinies, étant égales au fini $ab \pm a\sqrt{3aa}$ divisé par le zéro.

19. Par conséquent, toute branche de Courbe, ou a un cours infini, ou vient se rejoindre à une autre branche de Courbe *. Car si une branche se terminoit brusquement, & passoit de l'être au non-être, sans aboutir à aucune autre branche, la racine qui représente les ordonnées de cette branche passeroit du réel à l'imaginaire sans devenir égale à une autre racine: ce qui est impossible [§. *précéd.*].

C'est ce qu'on veut dire quand on assure que le cours d'une

* *Usage de l'Analyse de* DES CARTES, *&c.* pag. 424.

PL. II. d'une Ligne algébrique eſt continu *. Car du reſte une Courbe peut avoir des parties détachées, qui paroiſſent jettées çà & là : ce qui n'empêche pas qu'on ne la regarde comme une ſeule Courbe, parce que ſes parties ſéparées conſervent une continuité ſecréte par le lien de l'équation. Mais ceci demande un éclairciſſement. CHAP. I. §. 19.

20. UNE ſeule équation peut repréſenter l'aſſemblage ou le ſyſtême de pluſieurs Lignes tracées ſur un plan. C'eſt lorſque cette équation eſt le produit de pluſieurs équations rationelles, qui repréſentent diverſes Lignes raportées à une même Origine & aux mêmes Axes. Car ſi l'on diſpoſe pluſieurs équations de maniere que leur ſecond membre ſoit le zéro, & qu'on les multiplie les unes par les autres; leur produit eſt une équation qui a pour ſes racines toutes les racines des équations dont elle eſt formée. Donc, puiſque chaque racine d'une équation indéterminée exprime une branche de la Ligne que cette équation repréſente [§. 11], le produit de pluſieurs équations déſigne la Courbe qui a toutes les branches des Lignes particuliéres dont les équations ont concouru à former ce produit. Elle repréſente donc le ſyſtême de toutes ces Lignes.

Fig. 13. Par ex. ſi deux Cercles égaux ſont tracés ſur un même plan, & qu'on prenne pour l'Origine le centre A de l'un, les coordonnées étant à angles droits, on aura, pour repréſenter les deux circonférences rMR*M*, qmQ*m*, l'équation compoſée de celles des §§. 6 & 7,

$$(yy - 2ay + aa + bb - 2bx + xx - rr) \times (yy + xx - rr) = 0$$

* STIRLING, *Lineæ tertii ordinis* Newtonianæ *&c.* 8°. *Oxon.* 1717. pag. 4.

ou

CHAP. I. §. 20. ou $y^4 - 2ay^3 + 2x^2y^2 - 2ax^2y + x^4 = 0$ Pl. II.

$$\begin{array}{ll} y^4 - 2ay^3 + 2x^2y^2 & - 2ax^2y + x^4 = 0 \\ - 2bxy^2 + 2ar^2y & - 2bx^3 \\ + aay^2 & + aax^2 \\ + bby^2 & + bbx^2 \\ - 2rry^2 & - 2rrx^2 \\ & + 2br^2x \\ & - aarr \\ & - bbrr \\ & + r^4 \end{array}$$

Car cette équation est équivalente à celle-ci, $(y - a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}) \times (y - a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}) \times (y - \sqrt{(rr - xx)}) \times (y + \sqrt{(rr - xx)}) = 0$, où ses quatre racines sont séparées. Donc à chaque valeur de x répondent quatre valeurs de y, chaque abscisse AP a quatre ordonnées PM, Pm, P*M*, P*m*, si ce n'est lorsqu'elles deviennent imaginaires. La racine $y - a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)} = 0$ représente le demi-cercle rMR : La racine $y - a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)} = 0$ marque le demi-cercle R*M*r : La racine $y - \sqrt{(rr - xx)} = 0$ désigne le demi-cercle qmQ : Et la racine $y + \sqrt{(rr - xx)} = 0$ exprime le demi-cercle Q*m*q. L'équation qui a ces quatre racines représente donc les deux circonférences rMR*M*, qmQ*m*.

21. Par conséquent, lorsqu'une équation peut être divisée en d'autres équations rationelles, la Ligne qu'elle représente est le systême de différentes Lignes. Mais lors qu'une équation est irréductible, lorsqu'elle n'a point de diviseurs rationels, la Ligne qu'elle exprime doit être censée une seule Ligne, encore qu'elle ait des branches détachées les unes des autres.

L'équation $y - \sqrt{(rr - xx)} = 0$ exprime le seul demi-cercle

PL. II. mi-cercle q m Q. Mais si l'on veut ôter l'irrationalité [en faisant $y = \sqrt{(rr - xx)}$, & quarrant l'un & l'autre membre], on aura $yy + xx - rr = 0$, qui, avec la racine $y - \sqrt{(rr - xx)} = 0$, renferme encore la racine $y + \sqrt{(rr - xx)} = 0$, qui exprime le demi-cercle q *m* Q. On ne sauroit donc représenter le demi-cercle q m Q par une équation rationelle, sans qu'elle exprime en même tems le demi-cercle q *m* Q. Ces deux demi-cercles appartiennent donc à une même Courbe. CHAP. I. §. 21.

Et l'on voit généralement qu'on ne peut donner une équation rationelle d'une Courbe mêlée, ou composée de portions de différentes Lignes : parce que cette équation rationelle exprimera aussi les autres portions de ces Lignes, qu'on ne voudroit pas exprimer. Ainsi l'équation de l'Ovale composée de quatre arcs de Cercle, représente, si elle est rationelle, non seulement ces quatre arcs, mais les quatre circonférences entiéres.

Il faut seulement remarquer que les équations, dans lesquelles une autre peut se décomposer, sont censées rationelles, quand l'irrationalité n'affecte point les variables x & y, mais seulement leurs coëfficiens ou les constantes.

Ainsi l'éq : $y^4 - 2bbyy - abxx + b^4 = 0$ se pouvant diviser en ces deux-ci, $yy - x\sqrt{ab} - bb = 0$ & $yy + x\sqrt{ab} - bb = 0$, elle ne sera pas censée représenter une seule Courbe, mais l'assemblage de deux Courbes, dont la nature s'exprime par les deux équations qui composent la Proposée.

22. AVANT de finir ce Chapitre, ajoutons un mot sur la manière de décrire une Courbe par points, qui a été indiquée aux §§. 13 & 16. Dans cette recherche de plusieurs points d'une Ligne algébrique dont l'équation est donnée, nous avons pris des suites d'abscisses en progression arithmétique ; & c'est sans doute ce qu'il y a de mieux,

CHAP. I. §. 22. mieux, quand on n'a pas des raisons particuliéres pour faire son calcul autrement. Il n'y avoit point de pareilles raisons dans les Exemples du §. 13. Mais dans celui du §. 16, ce choix des abscisses a jetté dans des extractions de racines quarrées, qui ont obligé à se contenter d'avoir les valeurs des ordonnées simplement par approximation. On peut souvent éviter cet embarras, en cherchant uniquement les abscisses & les ordonnées qui sont rationelles *, & en employant dans cette vûë les méthodes de DIOPHANTE, & autres semblables, qui servent à éviter les nombres irrationels. PL. II.

Un *Exemple* assés simple fera comprendre cet usage. Soit proposée l'éq : $x^3y^2 - 10x^2y + 60 = 0$, dont les racines sont $y = \frac{5 + \sqrt{(25 - \frac{60}{x})}}{x}$ & $y = \frac{5 - \sqrt{(25 - \frac{60}{x})}}{x}$. Si on suppose successivement $x = 0, 1, 2, 3, 4$, &c. il arrivera fort souvent que $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$, & par conséquent y sera une grandeur irrationelle; ce qui engageroit à des calculs pénibles & ne permettroit pas une entiére exactitude. Mais si au lieu de prendre les x en progression arithmétique, on choisit celles qui donnent des y rationelles, le calcul sera plus facile, & néanmoins aussi propre à donner une idée de la Courbe.

D'abord, il est clair que l'abscisse x étant positive & petite, l'ordonnée y [$= \frac{5 \pm \sqrt{(25 - \frac{60}{x})}}{x}$] sera imaginaire : parce que x étant petite, $\frac{60}{x}$ est grande, & $25 - \frac{60}{x}$ négative.

* *Hist. de l'Acad.* 1712. pag. 55.

PL. II. CHAP. I. §. 22.

négative. Donc $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$, & par conséquent y est imaginaire, tant que 25 est plus petit que $\frac{60}{x}$, tant que $25x < 60$, ou que $x < \frac{60}{25} = 2\frac{2}{5}$. Mais aussi tôt que x est égale à $2\frac{2}{5}$, y commence à être réelle, & comme en ce point $25 - \frac{60}{x}$ est zéro, à l'abscisse $= 2\frac{2}{5}$ répondent deux ordonnées positives égales chacune à $\frac{5}{2\frac{2}{5}} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$.

Pour avoir, après cela, une suite d'abscisses & d'ordonnées rationelles, on fera successivement $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$ égal à 1, 2, 3, 4, &c. & on trouvera que

$\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 1$ donne	$x = 2\frac{1}{2}$,	la 1e. $y = 2\frac{2}{5}$,	& la 2e. $y = 1\frac{3}{5}$.
$= 2$ . .	$= 2\frac{6}{7}$ . .	$= 2\frac{9}{20}$ . .	$= 1\frac{1}{20}$
$= 3$ . .	$= 3\frac{3}{4}$ . .	$= 2\frac{2}{15}$ . .	$= \frac{8}{15}$
$= 4$ . .	$= 6\frac{2}{3}$ . .	$= 1\frac{7}{20}$ . .	$= \frac{3}{20}$

Si l'on fait ensuite $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 5$, on trouvera $\frac{60}{x} = 0$, ce qui donne x infinie, & $y = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{\infty} = \frac{10 \text{ ou } 0}{\infty}$, qui est le zéro, ou l'infiniment petit. Continuant à supposer $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$ égale à 6, 7, 8, &c. on aura x négative

$\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 6$.	$x = -5\frac{5}{11}$.	1e. $y = -2\frac{1}{60}$.	2e. $y = \frac{11}{60}$
$= 7$.	$= -2\frac{1}{2}$ . .	$= -4\frac{4}{5}$ . .	$= \frac{4}{5}$
$= 8$ . .	$= -1\frac{7}{13}$ . .	$= -8\frac{9}{20}$ . .	$= 1\frac{19}{20}$
$= 9$.	$= -1\frac{1}{14}$ . .	$= -13\frac{1}{15}$ . .	$= 3\frac{11}{15}$
$= 10$.	$= -\frac{4}{5}$ . .	$= -18\frac{3}{4}$ . .	$= 6\frac{1}{4}$
&c.	&c.	&c.	&c.

On

CHAP. I. §. 22. On trouvera peut-être trop de vuide entre l'abscisse $6\frac{2}{3}$ & l'abscisse infinie positive, qui résultent des suppositions, $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 4$ & $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 5$, comme aussi entre l'abscisse infinie négative & l'abscisse $-5\frac{5}{11}$ que donnent les suppositions $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 5$, & $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 6$. Pour remplir ces vuides, on peut supposer $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$ égale à quelcun des nombres rompus, qui se trouvent entre 4 & 5 & entre 5 & 6. Par exemple, PL. II.

$\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 4\frac{1}{3}$ donne $x = 9\frac{9}{14}$, la 1e. $y = \frac{391}{405}$ & la 2e. $y = \frac{23}{405}$.

$= 4\frac{2}{3}$ . .	$= 18\frac{18}{29}$ . .	$= \frac{551}{1566}$.	$= \frac{19}{1566}$
: :	⋮	⋮	⋮
$= 5\frac{1}{3}$ . .	$= -17\frac{13}{31}$ . .	$= -\frac{961}{1620}$ . .	$= \frac{1}{1620}$
$= 5\frac{2}{3}$ . .	$= -8\frac{9}{32}$ . .	$= -1\frac{229}{793}$ . .	$= \frac{64}{793}$

Prenant donc toutes les abscisses qui sont ici marquées, & leur donnant à chacune les deux ordonnées qui sont calculées, on aura plusieurs points de la Courbe, par lesquels on reconnoit que son cours est à peu près tel que le représente la *Fig.* 14.

Cet Exemple suffit pour donner une idée de cette méthode, & pour faire juger des facilités qu'elle aporte dans le Calcul. Il est seulement fâcheux qu'elle ne soit pas générale, & que les artifices de DIOPHANTE soient si bornés. On peut quelquefois trouver d'autres tours qui réussissent dans des cas, où ces moyens ne suffiroient pas.

23. Il est, par exemple, très souvent utile de prendre une troisiéme indéterminée, dont les raports à x & à y peu-

PL. II. vent être beaucoup plus ſimples que celui de y à x. Car il peut arriver que l'équation en x & y ſoit fort compoſée, & qu'on puiſſe trouver une variable z qui aura des raports aſſez ſimples avec x & avec y. Alors, au moyen de cette indéterminée z, on trouvera tant de points qu'on voudra de la Ligne algébrique dont x & y ſont les coordonnées. CHAP. I. §. 23.

Ainſi, ſi l'on propoſe la Courbe dont la nature eſt exprimée par l'éq: $y^4 + x^2y^2 + 2y^3 - x^3 = 0$, il ſeroit difficile d'en tirer la valeur d'y ou d'x, puiſqu'il faudroit réſoudre pour l'une une équation du troiſiéme, & pour l'autre, une équation du quatriéme degré. Mais ſi l'on ſuppoſe $x = yz$, on transformera l'équation propoſée en $y^4 + y^4z^2 + 2y^3 - y^3z^3 = 0$, qui, diviſée par y^3, ſe réduit à $y + yz^2 + 2 - z^3 = 0$, ou à $y = \frac{z^3 - 2}{z^2 + 1}$. On a donc x, qui eſt $= yz$, égal à $\frac{z^4 - 2z}{zz + 1}$. Et, au moyen de ces deux équations, donnant ſucceſſivement à z différentes valeurs, on aura les valeurs correſpondantes de y & de x, ſans être obligé à extraire aucune racine.

Si

Chap. I. §. 23. Pl. II.

Si l'on fait $z = -4$,	on aura $y = -3\frac{11}{17}$	& $x = 15\frac{9}{17}$
$= -3$ . . .	$= -2\frac{9}{10}$ . .	$= 8\frac{7}{10}$
$= -2$ . . .	$= -2$ . . .	$= 4$
$= -1$ . . .	$= -1\frac{1}{2}$ . .	$= 1\frac{1}{2}$
$= -\frac{3}{4}$ . . .	$= -1\frac{11}{20}$ . .	$= 1\frac{13}{80}$
$= -\frac{1}{2}$ . . .	$= -1\frac{7}{10}$ . .	$= \frac{17}{20}$
$= -\frac{1}{4}$ . . .	$= -1\frac{61}{68}$ . .	$= \frac{179}{272}$
$= 0$	$= -2$ . .	$= 0$
$= \frac{1}{4}$	$= -1\frac{58}{59}$ . .	$= -\frac{117}{272}$
$= \frac{1}{2}$	$= -1\frac{1}{2}$ . .	$= -\frac{3}{4}$
$= \frac{3}{4}$	$= -1\frac{1}{100}$ . .	$= -\frac{303}{400}$
$= 1$	$= -\frac{1}{2}$ . . .	$= -\frac{1}{2}$
$= 1\frac{1}{2}$	$= +\frac{11}{26}$ . .	$= +\frac{33}{52}$
$= 2$	$= +1\frac{1}{5}$ . .	$= +2\frac{2}{5}$
$= 3$	$= +2\frac{1}{2}$ . .	$= +7\frac{1}{2}$
$= 4$	$= +3\frac{11}{17}$ . .	$= +14\frac{10}{17}$
&c.	&c.	&c.

On prendra donc les ordonnées y qui ſont ici calculées, & on leur donnera les abſciſſes x déterminées par le Calcul, & on aura aſſez de points de la Courbe pour en tracer une partie qui donnera quelque idée de ſon cours. Voyez *Fig.* 15.

Autre Exemple. Si l'on propoſe l'éq : $2y^5 - 10xy^3 + 15x^3 = 0$, dont on ne pourroit avoir les racines y ou x, que par la réſolution d'une équation du cinquiéme ou du troiſiéme degré ; on pourra faire $y = \frac{1}{2}xz$, ce qui transformera l'équation propoſée en celle-ci $\frac{1}{16}x^5z^5 - \frac{5}{4}x^4z^3 + 15x^3 = 0$, ou, diviſant par $\frac{1}{16}x^3$, en $x^2z^5 - 20xz^3 + 240 = 0$, qui par raport à x n'eſt que du ſecond degré, & a pour racines $x = \frac{10 \pm 2\sqrt{(25 - \frac{60}{z})}}{zz}$,

Pl. II. Chap. I. §. 13.

d'où l'on tire $y\left[=\frac{1}{2}xz\right]=\frac{5\pm\sqrt{(25-\frac{60}{z})}}{z}$. Or c'est ici l'équation du §. 22. Faisant donc successivement $\sqrt{(25-\frac{60}{z})}$ égal à 0, 1, 2, 3, &c. on aura des valeurs rationelles de z & y, par lesquelles on trouvera celles de x, en prenant $x=\frac{2y}{z}$. Voici le résultat du Calcul.

$\sqrt{(25-\frac{60}{z})}$	z	1e. y	1e. x	2e. y	2e. x
$=0$	$=2\frac{2}{5}$	$=2\frac{1}{12}$	$=1\frac{106}{144}$	$=2\frac{1}{12}$	$=1\frac{106}{144}$
$=1$	$=2\frac{1}{2}$	$=2\frac{2}{5}$	$=1\frac{23}{25}$	$=1\frac{3}{5}$	$=1\frac{7}{25}$
$=2$	$=2\frac{6}{7}$	$=2\frac{9}{20}$	$=1\frac{143}{200}$	$=1\frac{1}{20}$	$=\frac{147}{200}$
$=3$	$=3\frac{3}{4}$	$=2\frac{2}{15}$	$=1\frac{31}{225}$	$=\frac{8}{15}$	$=\frac{64}{225}$
$=4$	$=6\frac{2}{3}$	$=1\frac{7}{20}$	$=\frac{81}{200}$	$=\frac{3}{20}$	$=\frac{9}{200}$
$=4\frac{1}{2}$	$=14\frac{2}{17}$	$=1\frac{1}{240}$	$=\frac{5511}{25600}$	$=\frac{17}{240}$	$=\frac{289}{75800}$
$=5$	$=$ *infini*	$=$ *inf. pet.*	$=$ *inf. petit*	$=$ *inf. pet.*	$=$ *inf. p.*
$=5\frac{1}{2}$	$=-11\frac{3}{7}$	$=-\frac{147}{160}$	$=\frac{1029}{6400}$	$=\frac{7}{160}$	$=-\frac{49}{6400}$
$=6$	$=-5\frac{5}{11}$	$=-2\frac{1}{60}$	$=\frac{1331}{1800}$	$=\frac{11}{60}$	$=-\frac{121}{1800}$
$=7$	$=-2\frac{1}{2}$	$=-4\frac{4}{5}$	$=3\frac{21}{25}$	$=\frac{4}{5}$	$=-\frac{16}{75}$
$=8$	$=-1\frac{7}{13}$	$=-8\frac{9}{20}$	$=10\frac{197}{200}$	$=1\frac{19}{20}$	$=-2\frac{107}{200}$
$=9$	$=-1\frac{1}{14}$	$=-13\frac{1}{15}$	$=24\frac{88}{225}$	$=3\frac{11}{15}$	$=-6\frac{218}{225}$
$=10$	$=-\frac{4}{7}$	$=-18\frac{3}{4}$	$=65\frac{5}{8}$	$=6\frac{1}{4}$	$=-21\frac{7}{8}$
&c.	*&c.*	*&c.*	*&c.*	*&c.*	*&c.*

On pourra ainsi décrire cette Courbe par points. Mais si l'on aime mieux une Construction géométrique, on pourra s'y prendre de cette maniére. Qu'on décrive la Courbe Mm, dont AP [z] & PM [y] sont les coordonnées, & dont l'équation est $y=\frac{5\pm\sqrt{(25-\frac{60}{z})}}{z}$, ou

Fig. 16. num. 1.

z^2yy-

CHAP. I. §. 23. $z^3yy - 10zzy + 60 = 0$ [§. préc.], & qu'on méne BN, paralelle à l'Axe des ordonnées AQ, par le point B dont la distance à l'Origine est $AB = 2$. Puis tirant, comme on voudra, par l'Origine A, une Droite qui coupe BN au point N, & la Courbe Mm aux points M, m, *m*, on abaissera de ces points les ordonnées MP, mp, *mp*, & prenant à part [n°. 2] $\beta\nu = BN$ pour une abscisse, on lui donnera les ordonnées $\nu\Pi$, $\nu\pi$, $\nu\varpi$ égales à MP, mp, *mp*, & on aura les points Π, π, ϖ de la Courbe dont l'équation est $2y^3 - 10xy^2 + 15x^3 = 0$. PL. II.

Car le raport des PM [y] aux AP [z], dans la Courbe Mm, s'exprime par l'éq: $z^3yy - 10z^2y + 60 = 0$. Et le raport des AP [z] aux BN ou $\beta\nu$ [x] s'exprime par l'éq: $z = \frac{2y}{x}$, puisque les triangles semblables ABN, APM donnent cette proportion, AP [z]: PM [y] $=$ AB [2]: BN [x]. Donc en substituant $\frac{2y}{x}$ pour z dans l'éq: $z^3yy - 10z^2y + 60 = 0$, on aura l'éq: $\frac{8y^5}{x^3} - \frac{40y^3}{xx} + 60 = 0$, ou $2y^5 - 10xy^3 + 15x^3 = 0$ pour exprimer le raport des PM ou $\Pi\nu$ [y] aux BN ou $\beta\nu$ [x], dans la Courbe $\pi\beta\Pi\varpi\beta\,6$.

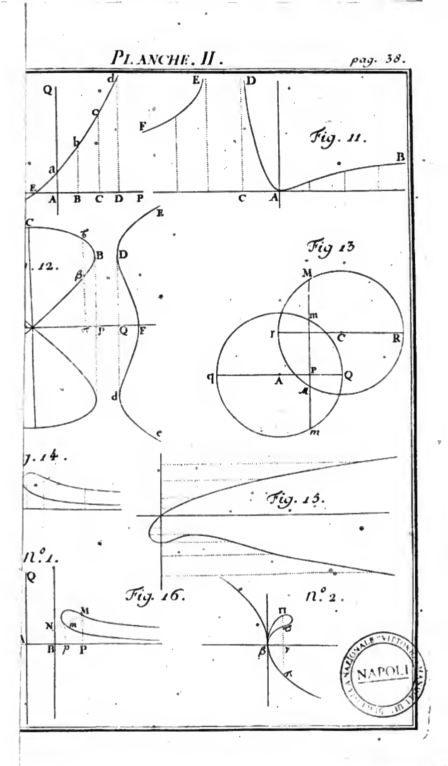
Mais ces artifices algébriques ne s'étendent pas à tous les cas possibles. Et on ne peut guéres se flatter que l'Algébre donne un jour une Solution complette & générale des équations de degrés quelconques. Il faut donc chercher d'autres routes qui nous ménent à la connoissance des Lignes Courbes, qui est le but de ce Traité.

CHAPITRE II.

Des transformations que ſubit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées.

24. LA POSITION de l'Origine & de la Ligne des abſciſſes & des ordonnées étant arbitraire (§. 5), on peut la changer à volonté: ce qui fait naitre diverſes équations (§. 7.) qui toutes repréſentent la même Courbe. Il eſt important pour l'Analyſe de ſavoir transformer l'équation qui exprime le raport des coordonnées d'une Ligne en une autre équation qui exprime le raport d'autres coordonnées quelconques de la même Ligne. §. 24.

PL. III. Fig. 17. Pour le faire d'une maniére générale; ſoit MN une Ligne algébrique, dont la nature eſt exprimée par une équation quelconque, qui marque le raport des coordonnées AP [x] & PM [y]. On demande l'équation qui donne le raport d'autres coordonnées, telles que BQ [z] & QM [u]. On ſuppoſe donc que les Origines A & B ſont données de poſition, auſſi bien que les Axes AP, AH; BQ, BI. Par les points B & Q, extrémités de l'abſciſſe BQ, ſoient menées les Droites BC, QE parallèles à AH, & terminées à AP, & les Droites BD, QF paralléles à AP, & terminées à PM. Nommons AC, m & BC, n. De plus, comme tous les angles des triangles BQG, & MQF ſont donnés, la raiſon de leurs côtés eſt donnée. Que celle de BQ à BG ſoit exprimée par la raiſon de 1 à p. Donc BG $= pz$: car $1 : p =$ BQ [z] : BG [pz]. Que la raiſon de BQ à QG ſoit déſignée par $1 : q$, & QG ſera $= qz$. De même, ſi l'on exprime


Fig. 11.
Q
d
c
b
a
E
A B C D P
E
F
D
C A
B
C
b
B
β
.12.
D
E
π p Q F
d
e
Fig 13
M
m
r C R
q A P Q
m
.14.
Fig. 15.
n.°1.
Q
Fig. 16.
n.°2.
M
N m
B p P
Π
β
NAPOLI

CHAP. II. §. 24. exprime la raison de QM à QF par $1 : r$, & celle de QM à MF par $1 : s$, QF sera $= ru$, & MF $= su$. Donc, puisque AP [x] $=$ AC $+$ CE $+$ EP $=$ AC [m] $+$ BG [pz] $+$ QF [ru], & puisque PM [y] $=$ PD $+$ DF $+$ FM $=$ BC [n] $+$ QG [qz] $+$ MF [su], on aura $x = m + pz + ru$, & $y = n + qz + su$. Où il arrive que, suivant la position des Origines A, B, & des Axes AP, AH; BQ, BI, quelques-unes des grandeurs exprimées par les Lettres m, n; p, q; r, s peuvent être négatives. Mais quoiqu'il en soit, si dans l'équation qui exprime le raport des coordonnées x & y, on substitue $m + pz + ru$ à x, & $n + qz + su$ à y, la transformée exprimera le raport des coordonnées z & u *. PL. III.

25. Sous cette formule générale sont compris tous les cas particuliers.

I°. Si l'on veut, par ex. conserver l'Origine, mais changer les Axes, on supposera que le point B tombe sur A : ce qui rend AC [m] & BC [n] égales à zéro. Donc $x = pz + ru$, & $y = qz + su$. Fig. 18.

II°. Si l'on veut conserver l'Origine & la Ligne des abscisses, mais changer la position des ordonnées, en les faisant parallèles à AI, au lieu qu'elles l'étoient à AH : non-seulement AC [m] & BC [n] sont égales à zéro, mais encore le triangle BQG se réduit à la droite BQ, BG [pz] devient BQ [z] & QG [qz] devient zéro. Donc $x = z + ru$, & $y = su$. Fig. 19.

III°. Si l'on veut changer seulement la position de la Ligne des abscisses, sans toucher à la position des ordonnées : alors BC [n] & QF [ru] sont égales à zéro, & FM [su] se confond avec QM [u]. Donc $x = m + pz$, & $y = qz + u$. Ou, si la nouvelle Ligne des abscisses Fig. 20.

BQ

* *Usage de l'Analyse, &c.* pag. 338. & suiv.

PL. III. BQ passe par l'Origine primitive A, $x = pz$ & $y = qz + u$, parce qu'alors AC [m] est aussi nulle. CHAP. II. §. 25.

IV°. Si, sans changer la position des coordonnées, Fig. 21. on veut simplement transporter l'Origine de A en B; les triangles BGQ, MFQ disparoissent; BG [pz] devient BQ [z], & MF [su] devient MQ [u], mais CG [ru] & FQ [qz] sont égales à zéro. Donc $x = m \pm z$ & $y = n \pm u$.

V°. Si l'Origine est transportée sur un autre point de la Ligne des abscisses; comme les ordonnées ne changent pas, il suffit de faire $x = m \pm z$. Et si l'on transporte l'Origine sur un autre point de la Ligne des ordonnées, comme cela ne change rien aux abscisses, on fera simplement $y = n \pm u$.

VI°. Je ne dis rien de deux autres changemens moins considérables; dont l'un consiste à changer $+x$ en $-x$; ce qui est prendre les abscisses positives pour les négatives, & réciproquement; c'est-à-dire, renverser la figure de droite à gauche: ou à changer $+y$ en $-y$; ce qui est regarder comme négatives les ordonnées qu'on avoit prises pour positives, ou renverser la figure de haut en bas: Et dont l'autre consiste à changer x en y & y en x: ce qui revient à prendre les abscisses pour ordonnées & les ordonnées pour abscisses, à faire faire à la Courbe un quart de conversion.

26. CES transformations sont d'un grand usage pour l'Analyse des Courbes. Il est donc à propos d'indiquer ici quelques voyes abrégées pour les exécuter plus commodément.

Elles sont fondées sur ce Principe, que substituer à x un binome $m + z$, dans une puissance quelconque de x, comme dans la cinquiéme, c'est écrire au lieu de x^5, la cinquiéme puissance de $m + z$, qui est $m^5 + 5m^4z + 10m^3z^2 +$;

Chap. II. §. 26. Pl. III.

$10m^3z^2 + 10m^2z^3 + 5mz^4 + z^5$, dont les termes ont toutes les puiſſances ſucceſſives de z, depuis l'unité, qui eſt z^0, juſqu'à z^5. Les coëfficients m^5, $5m^4$, $10m^3$, $10m^2$, $5m$, 1, ſe calculent ainſi. On poſe d'abord m^5, c'eſt-à-dire, une puiſſance de m qui a le même expoſant que celle de x; on multiplie ce terme m^5 par ſon expoſant [5], & on le diviſe par m, ce qui donne le ſecond coëfficient $5m^4$. On multiplie ce ſecond coëfficient par [2] la moitié de ſon expoſant [4], & on le diviſe toûjours par m. Cette opération donne le troiſiéme coëfficient $10m^3$, qu'on multiplie par [1] le tiers de ſon expoſant [3], & qu'on diviſe par m, pour avoir le quatriéme coëfficient $10m^2$. Celui-ci doit être multiplié par [$\frac{1}{2}$] le quart de ſon expoſant [2], & diviſé toûjours par m. Par ce moyen on a le cinquiéme coëfficient $5m$, qu'il faut multiplier par [$\frac{1}{5}$] la cinquiéme partie de ſon expoſant [1], & diviſer par m, pour avoir le ſixiéme & dernier coëfficient 1. Alors l'opération eſt finie, parce que ce terme ne contient plus de m.

On opérera de la même maniére, ſi au lieu d'une ſimple puiſſance de x, on a une de ſes fonctions rationelles entiéres $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ &c. compoſée de conſtantes & de puiſſances de x.

Ainſi

puiſque $a = = = = a$

au lieu de bx, écrivant $b(m+z) = bm + bz$

cx^2 . . $c(m+z)^2 = cm^2 + 2cmz + czz$

dx^3 . . $d(m+x)^3 = dm^3 + 3dm^2z + 3dmz^2 + dz^3$

ex^4 . . $e(m+z)^4 = em^4 + 4em^3z + 6em^2z^2 + 4emz^3 + ez^4$

&c. &c. &c.

on aura $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ &c. $= M^0 + M'z + M''z^2 + M'''z^3 + M^{iv}z^4$ &c. dont les coëfficients M^0, M', M'', M''', M^{iv}, &c. ſe calculent comme on vient de dire.

PL. III. Le prémier M° èst la fonction même $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, *&c.* transformée par la substitution de m à x. M° se change en M', si on multiplie chaque terme de M° où se trouve quelque puissance de m, par l'exposant de cette puissance, & qu'on divise le produit par m. De M' on forme M'', en multipliant chaque terme de M' par la moitié de l'exposant de m & le divisant par m. En multipliant chaque terme de M'' par le tiers de l'exposant de m & divisant toûjours par m, on aura M'''. Et on continuera de même, jusqu'à-ce qu'on vienne à une grandeur, où il ne reste plus de m. CHAP. II. §. 26.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & + & bm & + & cm^2 & + & dm^3 & + & em^4 & \&c & = M^{\circ} \\
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \\
\hline
 & & b & + & 2cm & + & 3dm^2 & + & 4em^3 & \&c & = M' \\
 & & 0 & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \\
\hline
 & & & & c & + & 3dm & + & 6em^2 & \&c & = M'' \\
 & & & & 0 & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \\
\hline
 & & & & & & d & + & 4em & \&c & = M''' \\
 & & & & & & 0 & & \frac{1}{4} & & \\
\hline
 & & & & & & & & e & \&c & = M^{IV}
\end{array}$$

On peut aussi, & dans l'application il est plus commode, ne changer x en m qu'après toute l'opération. On fera donc sur x ce qu'on vient de dire qu'il falloit faire sur m, & après le calcul on changera dans M°, M', M'', *&c.* tous les x en m.

Ainsi

Chap. II. §. 26.

Ainsi

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{x\,=\,m} \\
a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \;\&c & =M^0= & a+bm+cm^2+dm^3+em^4 \;\&c \\
\underline{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} & & \\
b+2cx+3dx^2+4ex^3 \;\&c & =M'= & b+2cm+3dm^2+4em^3 \;\&c \\
\underline{0 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{2} \quad \tfrac{3}{2}} & & \\
c+3dx+6ex^2 \;\&c & =M''= & c+3dm+6em^2 \;\&c \\
\underline{0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3}} & & \\
d+4ex \;\&c & =M'''= & d+4em \;\&c \\
\underline{0 \quad \tfrac{1}{4}} & & \\
e \;\&c & =M^{iv}= & e \;\&c
\end{array}
$$

27. Par ces principes on peut exécuter avec facilité les transformations indiquées au §. 25. Veut-on transporter l'Origine sur un point donné de l'Axe des abscisses ou des ordonnées; ce qui se fait en substituant $m+z$ à x, ou $n+u$ à y. Qu'on propose, dis-je, de substituer $m+z$ à x.

On écrira l'équation sur une ligne : on en multipliera chaque terme qui contient quelque puissance de x par l'exposant de cette puissance, & dans chacun de ces termes on changera un x en z. Le produit s'écrira sur une seconde ligne, dont on multipliera chaque terme où se trouve quelque puissance de x par la moitié de son exposant, & on changera de nouveau un x en z. Le produit sera la troisiéme ligne, dont on multipliera chaque terme qui contient quelque puissance de x par le tiers de son exposant, & on changera toujours un x en z. Cette opération donnera la quatriéme ligne, & on continuera de même, jusqu'à-ce qu'on soit parvenu à une ligne où il n'y ait plus d'x. Alors, changeant tous les x en m, on réünira tous les termes de toutes ces lignes, & on aura la transformée *.

F 2 *Exemple.*

* *Usage de l'Anal. &c.* pag. 308 & suiv.

 Exemple. On propose l'équation A.

$$
\begin{array}{llllllll}
A\ .\ x^4 & -2x^2y^2 & +8ax^3 & -5axy^2 & +4ccxy & -8acyy & +9a^2c^2 & =0 \\
\quad 4 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 1 & \quad 1 & \quad 0 & \quad 0 & \\
\hline
+4x^3z & -4xy^2z & +24ax^2z & -5ay^2z & +4ccyz & & & \\
\quad \frac{3}{2} & \quad \frac{1}{2} & \quad \frac{2}{2} & \quad 0 & \quad 0 & & & \\
\hline
+6x^2z^2 & -2y^2z^2 & +24axz^2 & & & & & \\
\quad \frac{2}{3} & \quad 0 & \quad \frac{1}{3} & & & & & \\
\hline
+4xz^3 & & +8az^3 & & & & & \\
\quad \frac{1}{4} & & \quad 0 & & & & & \\
\hline
+z^4. & & & & & & &
\end{array}
$$

Changeant x en m, & réüniſſant tous ces termes, on trouvera que la transformée de l'éq : A eſt $m^4 + 4m^3z + 6mmzz + 4mz^3 + z^4 - 2m^2y^2 - 4my^2z - 2y^2z^2 + 8am^3 + 24am^2z + 24amz^2 + 8az^3 - 5amy^2 - 5ay^2z + 4ccmy + 4ccyz - 8acyy + 9a^2c^2 = 0$.

Que ſi l'on veut ſubſtituer $n+u$ à y, on opérera ſur les y comme on vient de faire ſur les x, en changeant de ligne en ligne un y en u.

28. Dans l'application de cette Méthode, le calcul devient plus commode, quand pour ſubſtituer $m+z$ à x, on commence par ordonner l'équation ſelon les dimenſions d'y; & quand pour ſubſtituer $n+u$ à y, on prépare l'équation en l'ordonnant par x. L'Exemple ſuivant fera voir l'avantage de cette préparation.

On propoſe de ſubſtituer d'abord $z+2a$ à x, & enſuite $u-a$ à y dans l'éq : $x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3 - 2ax^2 + 4axy + ay^2 + a^2y - 2a^2x = 0$.

Pour faire la premiére ſubſtitution, on ordonnera l'équation par y.

$-y^3.$

$$\left.\begin{array}{r} -y^3+(x+a)y^2+(-2x^2+4ax+aa)y+x^3-2ax^2-2a^2x \\ 0 \quad 1 \quad 0 \qquad 2 \quad 1 \quad 0 \qquad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \hline (z \quad)y^2+(-4x+4a)zy+(3x^2-4ax-2aa)z \\ 0 \qquad \tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad \tfrac{2}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \\ \hline (-2)zzy \quad +(3x-2a)zz \\ 0 \qquad \tfrac{1}{3} \qquad 0 \\ \hline +(1)z^3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \overbrace{-y^3+3ay^2+a^2y-4a^3}^{x=2a} \\ +zy^2-4azy+2a^2z \\ -2z^2y+4azz \\ +z^3 \end{array}\right.$$

La transformée eſt donc $-y^3+zy^2-2z^2y+z^3+3ay^2-4azy+4azz+a^2y+2a^2z-4a^3$.

Pour ſubſtituer $u-a$ à y on ordonnera l'équation par x.

$$\left.\begin{array}{r} x^3+(-2y-2a)x^2+(yy+4ay-2a^2)x-y^3+ay^2+a^2y \\ 0 \quad 1 \quad 0 \qquad 2 \quad 1 \quad 0 \qquad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \hline +(-2)ux^2+(2y+4a)ux+(-3yy+2ay+a^2)u \\ 0 \qquad \tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad \tfrac{2}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \\ \hline +(1)u^2x \quad +(-3y+a)uu \\ 0 \qquad \tfrac{2}{3} \qquad 0 \\ \hline -(1)u^3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \overbrace{x^3 \; * \; -5a^2x+a^3}^{y=-a} \\ -2ux^2+2aux-4a^2u \\ +u^2x+4au^2, \\ -u^3 \end{array}\right.$$

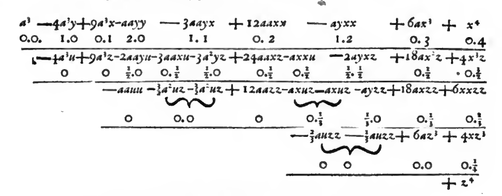
Ainſi la transformée eſt $x^3-2ux^2+u^2x-u^3+2aux+4au^2-5a^2x-4a^2u+a^3$.

29. SI l'on veut exécuter en même tems les deux ſubſtitutions de $m+z$ à x & de $n+u$ à y, ce qui ſert à tranſporter l'Origine ſur un point quelconque qui auroit m pour abſciſſe & n pour ordonnée, [§ 25. IV], on opérera comme on vient de le dire dans le §. préced. mais ſur les x & les y en même tems.

Soit, par ex. l'éq : $a^4-4a^3y+9a^3x-a^2y^2-3a^2xy+12a^2x^2-ax^2y+6ax^3+x^4=0$, le Calcul ſe

 ſera

PL. III. fera comme on le voit ici, ce qui, après le §. préc. explique mieux la chofe qu'on ne pourroit le faire par un long discours. Il fuffit de remarquer que des deux nombres placés fous chaque terme, le prémier eft rélatif aux dimenfions de y & le fecond à celles de x, & que les termes liés par une accolade ⏟, doivent être rëünis en un même terme qui eft leur fomme. Ainfi au lieu de $-\frac{1}{3}auzz$ & $-\frac{2}{3}auzz$, on fuppofe $-auzz$. CH. II. §. 29.



Ainfi, réüniffant enfemble les termes qui ont les mêmes puiffances de u & de z, & écrivant m pour x & n pour y, la transformée fera $a^4 - 4a^3n + 9a^3m - aann - 3a^2mn + 12aamm - ammn + 6am^3 + m^4 + (-4a^3 - 2a^2n - 3a^2m - amm)u + (9a^3 - 3a^2n + 24aam - 2amn + 18amm + 4m^3)z - aauu + (3a^2 - 2am)uz + (12aa - an + 18am + 6mm)zz - auzz + (6a + 4m)z^3 + z^4 = 0$.

Cette reünion s'exécutera commodément, fi dès la feconde ligne on fépare les termes qui font multipliés par u de ceux qui font multipliés par z. Pour cela, on multipliera dans la prémiére ligne chaque terme qui contient quelque puiffance d'y par l'expofant de cette puiffance, & on

 on le divisera par y. La somme de ces termes est le coëfficient de u. Puis, on multipliera chaque terme de la prémiére ligne qui contient quelque puissance de x par l'exposant de cette puissance & on le divisera par x. La somme de tous ces termes est le coëfficient d'u. C'est ainsi qu'on aura calculé la seconde ligne.

On viendra ensuite à la troisiéme qui est composée des termes uu, uz & zz. Le coëfficient d'u servira à former celui d'uu & la prémiére moitié de celui d'uz, sçav. 1°. le coëfficient d'uu, en multipliant chaque terme du coëfficient d'u, où se trouve quelque puissance d'y, par la moitié de son exposant, & le divisant par y: 2°. la prémiére moitié du coëfficient d'uz, en multipliant chaque terme du même coëfficient d'u, où se trouve quelque puissance d'x, par la moitié de son exposant & le divisant par x.

Le coëfficient de z servira à former 1°. l'autre moitié du coëfficient de uz, en multipliant ceux de ses termes qui contiennent quelque puissance d'y par la moitié de leurs exposants, & les divisant par y: 2°. le coëfficient de zz, en multipliant par la moitié de l'exposant d'x, & divisant par x, tous les termes du coëfficient de z, où se trouve quelque puissance de x.

La quatriéme ligne a quatre termes u^3, u^2z, uz^2, z^3, qui se forment par les coëfficients de uu, uz & zz, de la même maniére que ceux-ci ont été formés par les coëfficients de u, & de z, si ce n'est qu'au lieu de multiplier chaque terme par la moitié des exposants des puissances de x & de y qu'il renferme, on le multiplie par le tiers de ces exposants. Le reste de l'opération est semblable à celle qui a donné la troisiéme ligne. Le coëfficient de uu forme celui de u^3, & la prémiére moitié de celui de uuz: Le coëfficient de uz forme la seconde moitié de celui de uuz, & la prémiére moitié de celui de uzz: Et le coëfficient de zz forme la seconde moitié du coëfficient de uzz, & tout

PL. III. & tout celui de z^3. C'eſt dans ces coëfficients formés par moitié qu'on peut trouver des termes ſéparés qu'il faut réünir. CHAP. II. §. 29.

On formera de la même maniére la cinquiéme ligne, par le moyen de la quatriéme, en multipliant par le quart des expoſants d'y & d'x, &c. Et on continuera de même, juſqu'à-ce qu'on ſoit parvenu à une ligne, où il ne reſte plus ni x ni y. Toutes ces lignes enſemble, en y ſubſtituant m à x & n à y, font la transformée complette.

Exemple, ſur la même équation que ci-deſſus.

$$a^4 - 4a^3y + 9a^3x - aayy - 3aaxy + 12aaxx - axxy + 6ax^3 + x^4$$
$$0.0 \quad 1.0 \quad 0.1 \quad 2.0 \quad 1.1 \quad 0.2 \quad 1.2 \quad 0.3 \quad 0.4$$

$$+(-4a^3 - 2aay - 3aax - axx)u \quad +(9a^3 - 3aay + 24aax - 2axy + 18ax^2 + 4x^3)z$$
$$0.0 \quad \tfrac{1}{2}.0 \quad 0.\tfrac{1}{2} \quad 0.\tfrac{2}{2} \qquad 0.0 \quad \tfrac{1}{2}.0 \quad 0.\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} \quad 0.\tfrac{2}{2} \quad 0.\tfrac{3}{2}$$

$$+(-aa)uu + \left(\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}aa - ax \\ -\tfrac{3}{2}aa - ax\end{matrix}\right)uz + (12aa - ay + 18ax + 6xx)zz$$
$$0.0 \qquad 0.0 \quad 0.\tfrac{1}{3} \qquad 0.0 \quad \tfrac{1}{3}.0 \quad 0.\tfrac{1}{3} \quad 0.\tfrac{2}{3}$$

$$+(0)u^3 + (0)uuz + \left(\begin{matrix}-\tfrac{2}{3}a \\ -\tfrac{1}{3}a\end{matrix}\right)uzz + (6a + 4x)z^3$$
$$0.0 \qquad 0.0 \quad 0.\tfrac{1}{4}$$

$$+(1)z^4$$

Autre Exemple. On veut ſubſtituer $z + \frac{1}{2}a$ à x & $u + a$ à y dans l'éq: $y^4 + x^4 - 2ax^3 - 2aaxy + 3aaxx = 0$

$y^4 +$

$$\overbrace{x = \tfrac{1}{2}a \qquad y = a}$$

$$\left.\begin{array}{l}
y^4 + x^4 - 2ax^3 - 2a^2xy + 3a^2x^2 \\
4.0 \quad 0.4 \quad 0.3 \quad 1.1 \quad 0.2 \\
+(4y^3 - 2a^2x)u + (4x^3 - 6ax^2 - 2a^2y + 6a^2x)z \\
\tfrac{1}{2}.0 \quad 0.\tfrac{1}{2} \quad 0.\tfrac{1}{2} \quad 0.\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}.0 \quad 0.\tfrac{1}{2} \\
+(6yy)uu + \binom{-a^2}{-a^2}uz + (6xx - 6ax + 3aa)zz \\
\tfrac{1}{3}.0 \quad 0.0 \quad 0.\tfrac{1}{3} \quad 0.\tfrac{1}{3} \quad 0.0 \\
+(4y)u^3 + (0)uuz + (0)uzz + (4x - 2a)z^3 \\
\tfrac{1}{4}.0 \qquad 0.\tfrac{1}{4}.0.0 \\
+(1)u^4 + (0)u^3z + (0)u^2z^2 + (0)uz^3 + (1)z^4
\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
a^4 + \tfrac{1}{16}a^4 - \tfrac{1}{4}a^4 - a^4 + \tfrac{3}{4}a^4 \\
+(4a^3 - a^3)u + (\tfrac{1}{2}a^3 - \tfrac{3}{2}a^3 - 2a^3 + 3a^3)z \\
+(6aa)uu - (2aa)uz + (\tfrac{3}{2}aa - 3aa + 3aa)zz \\
+(4a)u^3 \; : \; : \; : \; . + (2a - 2a)z^3 \\
+u^4 \; . \; . \; . \; . \; : \; : + z^4
\end{array}\right.$$

La transformée eſt donc $\frac{9}{16}a^4 + 3a^3u + 6aauu - 2aauz + \frac{3}{2}aazz + 4au^3 + u^4 + z^4 = 0$.

30. S'AGIT-IL de changer la poſition d'un des deux Axes ſans changer l'Origine; de ſubſtituer [§. 24. II & III] pz à x, & $qz + u$ à y, ou $ru + z$ à x, & su à y; on le pourra faire d'une maniére analogue à celle qui a été pratiquée dans le §. 28, pour ſubſtituer $m + z$ à x, ou $n + u$ à y.

Car ſi, dans un terme quelconque, comme $ax^h y^l$, on écrit pz pour x & $qz + u$ pour y, ce terme ſera changé en $ap^h z^h (qz + u)^l = ap^h z^h (q^l z^l + lq^{l-1} z^{l-1} u + \frac{l.l-1}{1.\ 2} q^{l-2} z^{l-2} u^2 + \frac{l.l-1.l-2}{1.\ 2.\ 3} q^{l-3} z^{l-3} u^3$ &c.$) = ap^h q^l z^{h+l} + lap^h q^{l-1} z^{h+l-1} u + \frac{l.l-1}{1.\ 2} ap^h q^{l-2} z^{h+l-2} u^2 + \frac{l.l-1.l-2}{1.\ 2.\ 3} ap^h q^{l-3} z^{h+l-3} u^3$ &c. Or la ſuite de ces termes ſe calcule par une Régle ſemblable à celle du §. 26, & qui ſe peut énoncer ainſi.

Pl. III. On écrit en prémiére ligne l'équation propofée, après avoir changé x en pz & y en qz, c'eſt-à-dire, après avoir écrit p pour x & q pour y, & après avoir multiplié chaque terme par une puiſſance de z dont l'expoſant ſoit égal à la ſomme des expoſants de x & de y dans ce terme. On forme la ſeconde ligne, en multipliant chaque terme qui renferme quelque puiſſance de q par l'expoſant de cette puiſſance, en le diviſant par q, & changeant un z en un u. La troiſiéme ligne ſe formera, en multipliant chaque terme de la ſeconde, qui contient quelque puiſſance de q, par la moitié de l'expoſant de cette puiſſance, diviſant par q, & changeant un z en un u, &c. &c. Chap. II. §. 30.

Ainſi, dans $ax^b y^l$, écrivant pz pour x, & qz pour y, on aura $ap^b q^l z^{b+l}$, prémier terme ou prémiére ligne. Ce terme multiplié par l expoſant de q, diviſé par q, & par le changement d'un z en u, devient $lap^b q^{l-1} z^{b+l-1} u$, ſecond terme ou ſeconde ligne: qu'on multipliera par $\frac{l-1}{2}$, moitié de l'expoſant de q, qu'on diviſera par q, & où on changera un z en u, pour avoir le troiſiéme terme ou la troiſiéme ligne $\frac{l.l-1}{1.2} ap^b q^{l-2} z^{b+l-2} u^2$, & on continuera de même juſqu'à-ce qu'on vienne à des termes qui ne renferment plus la lettre q.

Exemple. On propoſe de ſubſtituer pz à x, & $qz + u$ à y dans l'éq : $a^3 + b^2 x + aby + 3ax^2 + 4axy + 8byy = 0$. Cette équation, en changeant x en pz & y en qz, eſt

$a^3 +$

CHAP. II. §. 30. PL. III.

$$a^3 + b^2pz + abqz + 3ap^2z^2 + 4apqz^2 + 8bq^2zz$$

0 0 1 0 1 2

$$+ abu \quad + 4apuz + 16bquz$$

0 0 $\frac{1}{2}$

$$+ 8buu$$

La transformée eſt donc $a^3 + (b^2p + abq)z + abu + (3app + 4apq + 8bqq)zz + (4ap + 16bq)uz + 8buu = 0$.

De même s'il faut ſubſtituer su à y, & $ru + z$ à x, on poſera en prémiére ligne l'équation propoſée, après avoir changé x en ru & y en su, & on opérera ſur r comme on vient d'opérer ſur q, en changeant de ligne en ligne un u en un z, &c.

Voici le procedé du Calcul ſur le même *Exemple*.

$$a^3 + (b^2r + abs)u + (3arr + 4ars + 8bss)uu$$

0 1 0 2 1 0

$$+ b^2z \quad + (6ar + 4as)uz$$

0 $\frac{1}{2}$ 0

$$+ 3azz$$

Ainſi la transformée eſt $a^3 + (b^2r + abs)u + (3arr + 4ars + 8bss)uu + b^2z + (6ar + 4as)uz + 3azz = 0$.

On pourroit de même ſubſtituer tout à la fois $pz + ru$ à x, & $qz + su$ à y, ce qui change la poſition des deux Axes ſans changer l'Origine. Mais cette transformation a un peu plus d'embarras & un peu moins d'utilité que les précédentes. Nous la laiſſerons donc pour venir à quelque choſe de plus eſſentiel.

CHAPITRE III.

Des différents Ordres des Lignes algébriques.

Pl. III. 31. Les Lignes algebriques considérées analytiquement se divisent en différents *Ordres*, selon les dégrés de leurs équations. Ces dégrés s'estiment, comme dans les Egalités déterminées, par le dégré du plus haut terme de l'équation. Mais, puisque dans les équations des Lignes algébriques il y a deux indéterminées x & y, le dégré de chaque terme s'estime par la somme des exposants des puissances de x & de y. Les termes qui n'ont que des constantes, dans lesquels il n'y a ni x ni y, sont du dégré zéro. Ceux qui n'ont qu'un x sans y, ou qu'un y sans x, mais où cette indéterminée peut être multipliée par un coëfficient ou une grandeur constante quelconque, comme by ou cx, sont des termes du prémier dégré. Les termes du second dégré sont ceux où se trouvent xx, xy, ou yy. Mais x^3, xxy, xyy & y^3 sont les termes du troisiéme dégré; x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, & y^4 ceux du quatriéme, & ainsi de suite. §. 31.

32. On peut donc former, pour chaque Ordre de Lignes, une *Equation générale*, qui représente toutes les Lignes possibles de cet Ordre-là: lesquelles ensuite se divisent & subdivisent en Genres & Espéces, selon la variété des coëfficients qui multiplient les termes de ces Equations.

L'éq: $a + by + cx = 0$, exprime la nature des *Lignes du prémier Ordre*, parce qu'elle n'a aucun terme qui passe le prémier dégré.

L'éq:

CH. III. §. 32. L'éq: $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ représente une *Ligne* quelconque *du second Ordre*, parce qu'il ne s'y trouve que des termes du second dégré ou des dégrés inférieurs. PL. III.

L'éq: $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ix^2y + lx^3 = 0$, exprime en général une *Ligne du troisiéme Ordre*, parce que ses termes les plus élevés ne sont que du troisiéme Ordre, *&c.* *

33. Dans cette maniére d'estimer l'Ordre d'une Ligne algébrique, on suppose que son équation est irréductible: parce qu'une équation réductible est moins l'équation d'une Ligne d'un certain Ordre, que celle de deux ou plusieurs Lignes de quelques Ordres inférieurs [§. 20, 21]. Cela est pourtant indifférent en soi-même, & rien n'empêche qu'on ne regarde, si l'on veut, le systéme de deux Lignes du premier Ordre, comme une Ligne du second Ordre; & le systéme de trois Lignes du prémier Ordre, ou celui de deux Lignes, l'une du prémier, & l'autre du second Ordre, comme une Ligne du troisiéme Ordre, &c.

34. CE QU'IL y a de plus important à remarquer sur cette distribution des Lignes algébriques par Ordres, c'est que chaque Ligne est si bien fixée à son Ordre, qu'el-

 le

* Mr. NEWTON distingue les *Ordres des Lignes* & les *Genres des Courbes*. Comme le premier Ordre ne renferme que la Ligne droite [*Voyez ci-dessous* §. 40.], il appelle Courbes du prémier Genre, les Lignes du second Ordre, Courbes du second Genre, les Lignes du troisiéme Ordre, & ainsi de suite. Quelque répugnance qu'on ait à s'écarter des dénominations établies par ce Grand Homme, il m'a paru que cette distinction génoit trop l'expression, & je me suis déterminé à dire indifferemment, Courbes ou Lignes du second Ordre, Courbes ou Lignes du troisiéme Ordre, &c.

PL. III. le n'en sort point, par quelque équation qu'on la représente. Je veux dire, qu'encore qu'on puisse exprimer la nature d'une Ligne algébrique par une infinité d'équations différentes, selon le choix qu'on fait de l'Origine, & la position qu'on donne aux Axes; cependant toutes ces équations sont d'un même Ordre, auquel par conséquent la Ligne proposée doit se raporter. CH. III. §. 34.

En effet, si l'équation de cette Ligne qui exprime le raport entre les coordonnées x & y est d'un certain Ordre; l'équation, qui exprimera le raport entre d'autres coordonnées z & u de la même Ligne, est nécessairement du même Ordre. Car quelque variée que soit la position des z & des u par raport aux x & aux y, on aura toujours [§. 24] $x = m + pz + ru$, & $y = n + qz + su$, & en substituant ces valeurs de x & de y dans l'équation qui exprime leur raport, on aura la transformée qui donne le raport des coordonnées z & u. Mais puisque, dans les équations $x = m + pz + ru$, $y = n + qz + su$, z & u ne montent qu'au prémier dégré, non plus que x & y, il s'ensuit qu'après la substitution, z & u ne monteront dans l'éq: transformée qu'au même dégré où montent x & y dans la proposée. Donc l'éq: des z & u sera du même Ordre que celle des x & y. Ainsi l'Ordre d'une Ligne algébrique ne change point par le changement de ses coordonnées. *

35. MR. NEWTON arrange les termes de l'équation d'une Ligne algébrique dans un Parallelogramme divisé en plusieurs *Cases*, ou petits quarrés. Il place dans chaque ligne horizontale les termes où la variable y a le même exposant, & ces exposants augmentent d'une unité en montant de ligne en ligne: Il place dans chaque colomne verticale

* *Usage de l'Analyse, &c.* pag. 340. & suiv.

CH. III. §. 35. verticale les termes où l'indéterminée x a le même exposant, & ces exposants croissent d'une unité en passant d'une colomne à l'autre de gauche à droite. Ainsi chaque terme a sa Case déterminée par les exposants d'x & d'y dans ce terme. PL. III.

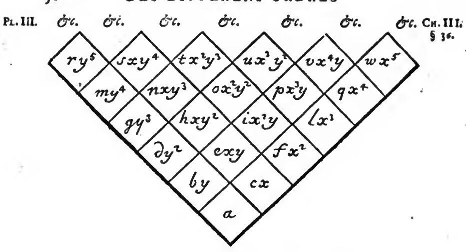
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
ly^4	rxy^4	αx^2y^4	δx^3y^4	ζx^4y^4	&c.
gy^3	mxy^3	sx^2y^3	βx^3y^3	εx^4y^3	&c.
dy^2	hxy^2	nx^2y^2	tx^3y^2	γx^4y^2	&c.
by	exy	ix^2y	px^3y	vx^4y	&c.
a	cx	fx^2	kx^3	qx^4	&c.

Mais comme dans cette disposition les termes d'un même dégré se trouvent placés en diagonale, Mr. DE GUA, en tournant le Parallélogramme, lui a donné une situation plus commode *. Il se présente alors comme un triangle, dont la pointe regarde en embas, & où les termes de l'équation générale sont placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la chose suffisamment.

* *Usage de l'Analyse*, &c. pag. 24. &c.

&c.

Pl. III. Ch. III. § 36.



36. Dans ce Triangle, que l'Auteur apelle *Triangle algébrique* ou *analytique*, chaque Case prend ſon nom des x & des y qu'elle contient. La Caſe inférieure ſeule, qui n'a ni x ni y, ſe nommera la *Caſe de la pointe*, ou, pour abréger, *la Pointe du Triangle.* Des deux Caſes qui la touchent, l'une s'apelle la *Caſe* y, l'autre la *Caſe* x. Les trois voiſines ſe nomment la *Caſe* yy, la *Caſe* xy, & la *Caſe* xx. On comprend aſſez par-là quel eſt le nom de chaque Caſe.

Dans cette diſpoſition on voit 1°. que tous les termes d'un même dégré ſont dans le même *Rang* horizontal; les plus hauts dégrés dans les Rangs ſupérieurs, les plus bas dans les Rangs inférieurs. Chaque équation générale a autant de rangs que l'expoſant de ſon Ordre a d'unités, ſans compter la Caſe de la pointe, où l'on place le terme conſtant.

2°. Que ſi l'on veut ordonner l'équation par x, c'eſt-à-dire, ſuivant les dimenſions de la variable x, on n'a qu'à conſidérer comme les termes de cette équation, les *Bandes*

Ch. III. §. 36. *Bandes* qui montent de droite à gauche. Dans le Triangle ci-dessus, le premier terme sera la plus haute bande, qui consiste dans le seul terme ϖx^5, & cette bande, soit qu'elle n'ait que ce terme, soit que, le Triangle étant prolongé, elle en ait plusieurs, se nommera la *Bande* x^5. Le second terme sera la bande contiguë, qui a les deux Cases qx^4 & vx^4y, ou $(q+vy)x^4$: elle s'apelle la *Bande* x^4. On prendra pour troisiéme terme la bande suivante lx^3, px^3y, ux^3y^2, ou $(l+py+uy^2)x^3$: c'est la *Bande* x^3 ; pour quatriéme terme la bande fxx, ix^2y, ox^2y^2, tx^2y^3, ou $(f+iy+oy^2+ty^3)x^2$, qui est la *Bande* x^2 : pour cinquiéme terme la bande cx, exy, hxy^2, nxy^3, sxy^4, ou $(c+ey+hy^2+ny^3+sy^4)x$, qui s'apelle la *Bande* x: & pour sixiéme & dernier terme $a+by+dyy+gy^3+my^4+ry^5$, que nous nommerons la *Bande sans* x, ou la *Bande des puissances d'y*. Pl. III.

De même, si on veut ordonner l'équation par y, on prendra pour ses termes consécutifs les Bandes qui montent de gauche à droite, &c., 1°. la *Bande* y^5, qui n'a ici que le terme ry^5. 2°. la *Bande* y^4 qui a les deux termes my^4, sxy^4, ou $(m+sx)y^4$. 3°. la *Bande* y^3 composée de trois termes gy^3, nxy^3, tx^2y^3, ou $(g+nx+tx^2)y^3$. 4°. la *Bande* y^2 qui contient quatre termes dy^2, hxy^2, ox^2y^2, ux^3y^2, ou $(d+hx+ox^2+ux^3)y^2$. 5°. la *Bande* y, qui est $by+exy+ix^2y+px^3y+vx^4y$, ou $(b+ex+ix^2+px^3+vx^4)y$. 6°. enfin la bande $a+cx+fxx+lx^3+qx^4+\varpi x^5$, qui se nomme *la Bande sans* y, ou *la Bande des puissances d'x*.

37. On voit par cet arrangement que l'équation générale des Lignes du premier Ordre a $[1+2=]\,3$ termes; que celle du second Ordre a $[1+2+3=]\,6$ termes; celle du troisiéme $[1+2+3+4]=10$ termes, & ainsi de suite, selon la suite des nombres triangulaires.

PL. III. Le nombre des coëfficiens a, b, c, d, e, &c. de chaque équation générale [§. 32] est le même que le nombre de ses termes. Mais ce nombre des coëfficients peut être diminué d'une unité, parce que le second membre de ces équations étant zéro, on peut diviser tout le premier membre par un coëfficient quelconque, comme celui de la plus haute puissance d'y ou d'x, laquelle, après cette division, n'a pour coëfficient que l'unité. CH. III. §. 37.

Ainsi, divisant par c l'équation générale du premier Ordre $a + by + cx = 0$, elle se réduit à $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}y + x = 0$, dans laquelle, avec l'unité qui multiplie x, il n'y a que deux coëfficients $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$.

Si donc v est l'exposant d'un Ordre quelconque, le nombre des coëfficients de l'équation générale de cet Ordre sera $\frac{1}{2}vv + \frac{1}{2}v$, somme de la progression arithmétique $2 + 3 + 4 + 5 +$ &c, dont la différence est 1, le premier terme 2, & le nombre des termes v *.

38. IL SUIT de là, qu'on peut réguliérement faire passer une Ligne de l'Ordre v, par le nombre $\frac{1}{2}vv + \frac{1}{2}v$ de points donnés, ou qu'une Ligne de l'Ordre v est déterminée & son équation donnée, quand on a fixé $\frac{1}{2}vv + \frac{1}{2}v$ points par lesquels elle doit passer.

Ainsi une Ligne du premier Ordre est déterminée par deux points donnés; une du second par 5; une du troisiéme par 9; une du quatriéme par 14; une du cinquiéme par 20, &c:

La

* STIRLING, *Lineæ tertii Ordinis*, &c. pag. 3 & suiv.

CH. III. §. 38. La Démonstration n'a besoin que d'un *Exemple*. *. PL. III. Fig. 22.

Soient A, B, C, D, E cinq points donnés par lesquels il faut faire passer une Ligne du second Ordre. On ménera à volonté deux droites FG, FH, par un point F, qu'on prendra pour l'Origine, & ces droites pour les Axes; après quoi menant par les points donnés les ordonnées Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; elles seront données, aussi bien que les abscisses Fa, Fb, Fc, Fd, Fe. Qu'on nomme donc Aa, a; Bb, b; Cc, c; Dd, d; Ee, e; & Fa, α; Fb, β; Fc, γ; Fd, δ; Fe, ϵ; & qu'on prenne l'éq: $A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0$ pour celle de la Ligne du second Ordre, qui doit passer par les points donnés A, B, C, D, E. Il s'agit de déterminer les cinq coëfficients inconnus A, B, C, D, E. Or pour cela nous avons cinq équations. Car, puisque la Courbe passe par le point A, il faut qu'à l'abscisse Fa [α] réponde l'ordonnée a A [a]. Donc x étant α, y est a. Mettant donc dans l'éq: $A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0$, α pour x & a pour y, la condition de passer par A la réduit à

. . . . $A + Ba + C\alpha + Daa + Ea\alpha + \alpha\alpha = 0$
La condition de passer par B, donne de même $A + Bb + C\beta + Dbb + Eb\beta + \beta\beta = 0$
Celle de passer par C, donne . . . . $A + Bc + C\gamma + Dcc + Ec\gamma + \gamma\gamma = 0$
Celle de passer par D, donne . . . $A + Bd + C\delta + Ddd + Ed\delta + \delta\delta = 0$
Et celle de passer par E, donne enfin . . $A + Be + C\epsilon + Dee + Ee\epsilon + \epsilon\epsilon = 0$

On peut par le moyen de ces cinq équations trouver les valeurs des cinq coëfficients A, B, C, D, E, ce qui détermine l'éq: $A + By + Cx + Dyy + Exy + xx = 0$ de la Courbe cherchée.

Le Calcul véritablement en seroit assez long †: mais il n'est

H 2

* *Lineæ tertii Ordinis*, &c. pag. 69.
NEWTON, *Arithmetica universalis*. Probl. LXI. pag. mihi 233.
† C'est à l'*Algébre* à donner les moyens d'abréger ce Calcul.

Je

PL. III. n'eſt pas beſoin de le faire, pour ſe convaincre qu'il eſt CH. III. toûjours poſſible de faire paſſer une Ligne du ſecond §. 38. Ordre par les 5 points donnés A, B, C, D, E, & en général une Ligne de l'Ordre v par le nombre $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ de points donnés. Il ſuffit de voir que chaque point fournit une équation, & qu'on peut déterminer autant de coëfficients qu'on a d'équations. Donc $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ points déterminent $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ coëfficients, c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a dans l'équation générale des Lignes de l'Ordre v [§. prec.].

Comme dans ces Equations, les inconnuës *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ne montent qu'au premier dégré, le Probléme ſera toûjours poſſible, & les Racines imaginaires n'y peuvent apporter aucune exception ou limitation; parce que ces coëfficients ſe déterminent ſans qu'il ſoit beſoin d'aucune extraction de racines, qui eſt la ſeule opération qui puiſſe introduire des imaginaires dans un Calcul. Mais il peut arriver, ou que quelques-uns de ces coëfficients ſoient zéro; & alors l'équation de la Courbe eſt réduite à un moindre nombre de termes; ou que quelques-uns ſe trouvent infinis; & alors les termes qui ſont affectés de ces coëfficients ſont ſeuls toute l'équation, les autres s'évanoüiſſant en comparaiſon de ceux-là: ou que quelques-uns reſtent indéterminés; & alors on peut faire paſſer par les points donnés une infinité de Lignes du même ordre.

Si l'on avoit beſoin de chercher actuellement l'équation de la Courbe qui paſſe par un nombre de points donnés, on abrégeroit le Calcul en prenant un des points donnés, comme

Je crois avoir trouvé pour cela une Régle aſſez commode & générale, lorſqu'on a un nombre quelconque d'équations & d'inconnuës dont aucune ne paſſe le prémier degré. On la trouvera dans l'*Appendice*, N°. 1.

CH. III. § 38. comme A, pour l'Origine. Car, à ce point, l'abſciſſe & l'ordonnée étant zéro, on aura α & a tous deux zéro. Ainſi la première des cinq équations ci-deſſus, eſt reduite à $A = 0$, & les quatre autres à $Bb + C\beta + Dbb + E\beta b + \beta\beta = 0$, $Bc + C\gamma + Dcc + Ec\gamma + \gamma\gamma = 0$, $Bd + C\delta + Ddd + Ed\delta + \delta\delta = 0$, $Be + C\varepsilon + Dee + Ee\varepsilon + \varepsilon\varepsilon = 0$, deſquelles on tirera, PL. III. Fig. 23.

$$B = -\frac{\beta\gamma de(\beta-\gamma)(\delta e-d\varepsilon) - \beta c\delta e(\beta-\delta)(\gamma e-c\varepsilon) + \beta cd\varepsilon(\beta-\varepsilon)(\gamma d-c\delta) - b\gamma\delta e(\gamma-\delta)(\beta e-b\varepsilon) + b\gamma d\varepsilon(\gamma-\varepsilon)(\beta d-b\delta) - bc\delta\varepsilon(\delta-\varepsilon)(\beta c-b\gamma)}{(\beta c-b\gamma)(\delta e-d\varepsilon)(bc-de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\varepsilon)(bd-ce) + (\beta e-b\varepsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}$$

$$C = -\frac{(\beta\beta c-b\gamma\gamma)(\delta e-d\varepsilon)de - (\beta\beta d-b\delta\delta)(\gamma e-c\varepsilon)ce + (\beta\beta e-b\varepsilon\varepsilon)(\gamma d-c\delta)cd + (\gamma\gamma d-c\delta\delta)(\beta e-b\varepsilon)be - (\gamma\gamma e-c\varepsilon\varepsilon)(\beta d-b\delta)bd + (\delta\delta e-d\varepsilon\varepsilon)(\beta c-b\gamma)bc}{(\beta c-b\gamma)(\delta e-d\varepsilon)(bc+de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\varepsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\varepsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}$$

$$D = \frac{(\beta c-b\gamma)(\delta e-d\varepsilon)(\beta\gamma+\delta\varepsilon) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\varepsilon)(\beta\delta+\gamma\varepsilon) + (\beta e-b\varepsilon)(\gamma d-c\delta)(\beta\varepsilon+\gamma\delta)}{(\beta c-b\gamma)(\delta e-d\varepsilon)(bc+de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\varepsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\varepsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}$$

$$E = \frac{(\beta c-b\gamma)(\delta e-d\varepsilon)(\beta c+b\gamma+\delta e+d\varepsilon) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\varepsilon)(\beta d+b\delta+\gamma e+c\varepsilon) + (\beta e-b\varepsilon)(\gamma d-c\delta)(\beta e+b\varepsilon+\gamma d+c\delta)}{(\beta c-b\gamma)(\delta e-d\varepsilon)(bc+de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\varepsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\varepsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}.$$

Mais on abrégera encore plus ſi l'on prend pour Axe des ordonnées la droite AB & pour Axe des abſciſſes la droite AE, menées du point A à deux des points donnés B, E. Alors l'ordonnée AB [b] ayant une abſciſſe [β] zéro, & l'abſciſſe AE [ε] ayant ſon ordonnée [e] égale à zéro, les valeurs de B, C, D, E, ſe reduiront à Fig. 24.

$$B = -\frac{b\gamma\delta\,(d(\varepsilon-\gamma) - (\varepsilon-\delta)c)}{cd\,(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)}$$

$$C = -\frac{cd\varepsilon\,(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)}{cd\,(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)} = -\varepsilon$$

$$D = +\frac{\gamma\delta\,(d(\varepsilon-\gamma) - (\varepsilon-\delta)c)}{cd\,(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)} = -\frac{B}{b}$$

$$E = +\frac{c\delta(b-c)(\varepsilon-\delta) - \gamma d(b-d)(\varepsilon-\gamma)}{cd\,(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)}$$

PL. III. de ſorte que l'équation ſera [en multipliant par le dénominateur commun], $cd(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)xx-(\gamma d(b-d)(\varepsilon-\gamma)-c\delta(b-c)(\varepsilon-\delta))xy+\gamma\delta(d(\varepsilon-\gamma)-(\varepsilon-\delta)c)yy-cd\varepsilon(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)x-b\gamma\delta(d(\varepsilon-\gamma)-(\varepsilon-\delta)c)y=0$. CH. III. §. 38.

39. DE CE QUE l'équation d'une Ligne algébrique ne change point d'Ordre, quelque poſition qu'on donne à ſes coordonnées [§. 34]; il ſuit qu'une Ligne ne peut être coupée par une Droite, qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans l'*expoſant de ſon Ordre*, c'eſt-à-dire, dans le nombre qui marque quel eſt l'Ordre de cette Ligne. Qu'une Droite ne peut couper, par ex. une Ligne du premier Ordre qu'en un point, une Ligne du ſecond Ordre qu'en deux points, une du troiſiéme qu'en trois, &c.

Car on peut toûjours prendre cette Droite pour l'Axe des abſciſſes ou pour celui des ordonnées, ſi elle ne l'eſt déja: & par cette tranſpoſition des coordonnées l'équation de la Courbe ne paſſe point dans un autre Ordre. Maintenant, pour avoir tous les points où la Courbe rencontre la Droite, que nous ſuppoſerons être l'Axe des ordonnées, il faut faire l'abſciſſe x égale à zéro [§. 15] & les racines y de l'équation qui naît de cette ſuppoſition déſignent tous les points où la Droite rencontre la Courbe. Mais ces racines ne peuvent être en plus grand nombre que les unités dans le plus haut expoſant d'y, & ce plus haut expoſant d'y ne peut ſurpaſſer l'expoſant de l'Ordre de la Courbe [§. 31. 32]. Donc la Droite ne ſauroit rencontrer la Courbe qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de cette Courbe.

Il eſt très poſſible qu'elle la rencontre moins ſouvent, ou même point du tout. Car dans l'équation que donne la ſuppoſition $x=0$, il peut fort bien ſe faire qu'y ait ſon

CH. III. ſon plus haut expoſant inférieur à celui de l'Ordre de la Courbe : il peut ſe faire que cette équation ait des racines imaginaires, & les ait même toutes ; ce qui donne des interſections imaginaires & qui n'exiſtent pas : il peut ſe faire que deux ou pluſieurs des racines réelles de cette équation ſoient égales ; & alors deux ou pluſieurs points d'interſection ſe confondent en un ſeul. PL. III.

§. 39.

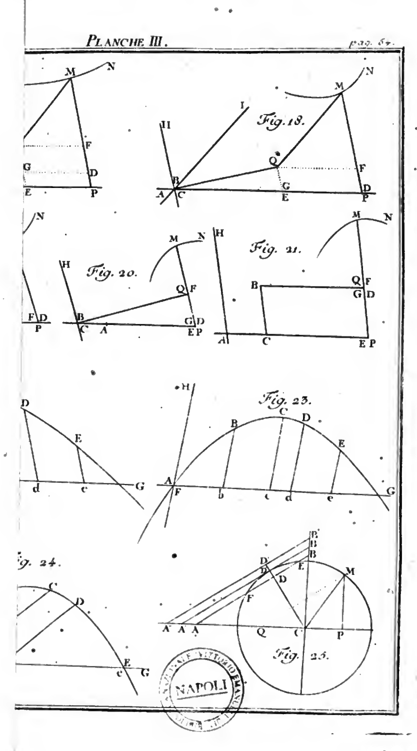
Soit, par ex. le Cercle MEF décrit du centre C avec un raïon CM $= r$, & dont l'équation, en nommant z l'abſciſſe CP, & u l'ordonnée PM, eſt $zz + uu = rr$. On demande en combien de points ſa circonférence rencontre la droite AB, qui paſſe par les points A & B des Axes CA, CB, dont les diſtances à l'Origine ſont CA $= a$ & CB $= b$. Soit nommée AB, c, &, à cauſe du triangle rectangle ACB, on aura $cc = aa + bb$. Si l'on prend AB pour l'Axe des ordonnées, en regardant AQ $[x]$ comme l'abſciſſe du point M, & QM $[y]$, paralléle à AB, comme ſon ordonnée, on aura [§. 24] $u = \frac{by}{c}$ & $z = x - a + \frac{ay}{c}$. Ces valeurs de z & de u ſubſtituées dans l'éq: $zz + uu = rr$, la transforment en $xx - 2ax + aa + \frac{2axy}{c} - \frac{2aay}{c} + \frac{aayy}{cc} + \frac{bbyy}{cc} = rr$, ou [puiſque $aa + bb = cc$] en $xx - 2ax + aa + \frac{2axy}{c} - \frac{2aay}{c} + yy = rr$, qui exprime la nature du Cercle rélativement aux coordonnées AQ $[x]$ & QM $[y]$. Si l'on fait, dans cette équation, $x = 0$, elle ſe réduira à $aa - \frac{2aay}{c} + yy = rr$, qui marque par ſes racines les interſections du Cercle MEF & de la Droite AB. Fig. 25.

Cette équation eſt du même dégré que l'Ordre de la Courbe. Un Cercle peut donc couper une Droite en autant de points

PL. III. points qu'il y a d'unités dans l'exposant de son Ordre, CH.III.
c'est-à-dire, en deux points; & cela arrive quand les raci- §. 39.
nes $y = \frac{aa \pm \sqrt{(a^4 - aacc + rrcc)}}{c}$, ou $y = \frac{aa \pm \sqrt{(rrcc - aabb)}}{c}$
de l'éq: $aa - \frac{2aay}{c} + yy = rr$ sont réelles: car ces racines désignent les deux ordonnées primitives AE, AF par l'extrémité desquelles passe la circonférence. Mais quand ces racines sont imaginaires, les intersections le sont aussi. Cela arrive lorsque $rrcc < aabb$, ou $rr < \frac{aabb}{cc}$, soit $r < \frac{ab}{c}$, c'est-à-dire quand le raïon [r] CM est plus petit que $\frac{ab}{c}$, qui est la perpendiculaire CD″ abaissée du centre C sur la droite A″B″: Alors les intersections F & E disparoissent; la Droite ne coupe plus le Cercle. Que si ces deux racines deviennent égales; ce qui a lieu quand $rrcc = aabb$, ou $r = \frac{ab}{c}$, quand le raïon CM est égal à la perpendiculaire CD′; alors les deux points d'intersection se confondent en un seul, le Cercle ne rencontre la Droite A′B′ qu'en un seul point D′.

40. PUISQU'UNE Droite ne peut couper une Ligne algébrique du premier Ordre qu'en un seul point [§. prec.] la Ligne algébrique du premier Ordre ne peut être courbe; car une Courbe peut toûjours être coupée par une Droite en plus d'un point. Donc la Ligne droite est la seule Ligne algébrique du premier Ordre.

C'est ce que l'on voit encore évidemment par le détail des équations de cet Ordre. Elles ne peuvent avoir que trois termes a, by, & cx. Mais elles peuvent ou les avoir


Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.

CH. III. §. 40. avoir tous trois, ou n'en avoir que deux, ou même n'en avoir qu'un : Ce qui fait trois cas différens. PL. IV.

I. Lorſque l'équation du premier Ordre eſt complette, c'eſt-à-dire, lorſqu'elle a ſes trois termes, on peut toûjours ſuppoſer que le terme conſtant a eſt ſeul & poſitif dans le premier membre. Les deux autres termes by & cx font le ſecond membre, où ils peuvent être poſitifs ou négatifs. Soit AB la Ligne des abſciſſes, & AD celle des ordonnées, faiſant entr'elles un angle quelconque DAB. Fig. 26.

Cas I. Si dans l'équation réduite à la forme que nous venons de dire, b & c ſont poſitives ; que l'éq : ſoit $a = by + cx$: elle repréſente une Droite. Pour avoir ſa poſition, il ſuffit d'avoir celle de deux de ſes points, de ceux, par exemple, où elle coupe les deux Axes. On aura l'un en faiſant $x = 0$, & l'autre en faiſant $y = 0$. Qu'on faſſe $x = 0$, & l'éq : $a = by + cx$ ſe réduit à $a = by$, ou $y = \frac{a}{b}$. On prendra donc ſur l'Axe des ordonnées AD, du côté poſitif, AE égale à $\frac{a}{b}$, qui eſt la troiſiéme proportionelle à la ligne b, à la ligne a, & à la ligne qu'on prend pour l'unité, & on aura le point E, où la Droite cherchée coupe l'Axe des ordonnées [§. 15]. De même, ſi on fait $y = 0$, l'éq : $a = by + cx$ ſe réduit à $a = cx$, ou $x = \frac{a}{c}$; de ſorte que prenant ſur AB l'Axe des abſciſſes, du côté poſitif, AC égale à $\frac{a}{c}$, qui eſt la troiſiéme proportionelle à c, a, & 1, on aura le point C où la Droite cherchée coupe l'Axe des abſciſſes. Il ne reſte donc plus qu'à mener cette Droite CE. Je dis qu'elle eſt repréſentée par l'éq : $a = by + cx$.

Car ſi d'un point quelconque de cette Droite on méne

PL. IV. une parallèle à AD, on déterminera une abscisse x & une ordonnée y. Ce point peut être pris, ou sur la partie EC, ou au-delà de C, ou au-delà de E. 1°. Si le point est M, entre E & C, l'abscisse AP $[x]$, & l'ordonnée PM $[y]$ sont toutes deux positives. Et les triangles semblables CAE, CPM donnent CA $[\frac{a}{c}]$: AE $[\frac{a}{b}]$ = CP $[\frac{a}{c} - x]$: PM $[y]$. Donc $\frac{aa}{bc} - \frac{ax}{b} = \frac{ay}{c}$, ou, transposant $\frac{ax}{b}$, multipliant par bc, & divisant par a, $a = by + cx$. 2°. Si le point m est pris au-delà de C, l'abscisse Ap $[x]$ est positive & l'ordonnée pm $[-y]$ négative. Et les triangles semblables CAE, Cpm donnent toûjours CA $[\frac{a}{c}]$: AE $[\frac{a}{b}]$ = Cp $[x - \frac{a}{c}]$: pm $[-y]$. Donc $\frac{ax}{b} - \frac{aa}{bc} = -\frac{ay}{c}$, qui se réduit aussi à $a = by + cx$. 3°. Si le point μ est pris au-delà de E, l'abscisse Aπ $[-x]$ est négative & l'ordonnée $\pi\mu$ $[y]$ est positive. Les tr. sembl. CAE, C$\pi\mu$ donnent aussi CA $[\frac{a}{c}]$: AE $[\frac{a}{b}]$ = Cπ $[-x + \frac{a}{c}]$: $\pi\mu$ $[y]$, ou $-\frac{ax}{b} + \frac{aa}{bc} = \frac{ay}{c}$, qui se réduit encore à $a = by + cx$. CH. III. §. 40.

2. Si b & c sont négatives, l'équation sera $a = -by - cx$: & faisant $x = 0$, on aura $a = -by$, ou $y = -\frac{a}{b}$ = AE négative, & en faisant $x = 0$, on aura $a =$ Fig. 27. $-cx$, ou $x = -\frac{a}{c}$ = AC aussi négative. Et l'on prouvera, comme dans le ¶. précéd., que EC est la Droite que répresente l'éq: $a = -by - cx$.

3. Si

CH. III. §. 40. 3. Si b eſt poſitive & c négative, l'équation ſera $a = by - cx$. Et faiſant $x = o$, on aura $a = by$, ou $y = \frac{a}{b} =$ AE poſitive : mais faiſant $y = o$, on aura $a = -cx$, ou $x = -\frac{a}{c} =$ A C négative. PL. IV. Fig. 28.

4. Enfin, ſi b eſt négative & c poſitive, l'équation étant $a = -by + cx$, on trouvera que $x = o$ donne $y = -\frac{a}{b} =$ AE négative, & que $y = o$ donne $x = \frac{a}{c} =$ AC poſitive. Fig. 29.

Donc, en général, l'équation du premier Ordre étant complette & réduite à cette forme $a = \pm by \pm cx$, où l'on ſuppoſe a poſitive :

Si b & c ſont toutes deux poſitives, la droite EC ſoûtend l'Angle des coordonnées poſitives :

Si b & c ſont toutes deux négatives, E C ſoûtend l'Angle des coordonnées négatives :

Si b coëfficient d'y eſt poſitif & c coëfficient d'x négatif, E C ſoûtend l'Angle des ordonnées poſitives & des abſciſſes négatives.

Si b coëfficient d'y eſt négatif & c coëfficient d'x poſitif, E C ſoûtend l'Angle des abſciſſes poſitives & des ordonnées négatives.

Cas II. Si l'équation du premier Ordre n'a que deux termes, c'eſt que a, ou b, ou c ſont zéro.

1. Si a eſt zéro, $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$ ſont zéro : les parties AC, AE priſes ſur les deux Axes devenant nulles, la Droite EC paſſe par l'Origine [§. 14]. Cependant ces parties AC, AE, lors même qu'elles s'évanouïſſent, gardent leur raiſon de $\frac{a}{b}$ à $\frac{a}{c}$ ou de c à b : ce qui détermine la po-

PL. IV. sition de la Droite representée par l'éq : $\pm by \pm cx = 0$. CH. III. Car si l'on prend $Ac = c$ sur l'axe des abscisses, & Ae §. 40. $= b$ sur l'axe des ordonnées, toutes deux positives, ou toutes deux négatives, si b & c ont differens si-
Fig. 30. gnes : mais l'une positive & l'autre négative, si b & c
Fig. 31. ont le même signe, & qu'on tire la Droite ec ; AM menée parallélement à ec par l'origine A, sera la Droite représentée par l'équation $\pm by \pm cx = 0$. Car si on abaisse l'ordonnée MP, les triangles semblables APM, Aec, donneront toûjours AP $[x]$: PM $[y]$ = Ac $[\pm b]$: Ae $[\mp c]$, d'où résulte $\pm by = \mp cx$ ou $\pm by \pm cx = 0$.

2. Si $b = 0$, $\frac{a}{b}$ est infinie. La droite AE étant infinie, le point E est infiniment éloigné de A, & la Droite CE, qui partant du point C va rencontrer AD à l'infini, CE, dis-je, est paralléle à AD. La Droite cherchée CE
Fig. 32. est donc paralléle à l'Axe des ordonnées. En effet, quelque point M qu'on prenne de cette Droite, son abscisse MQ est toûjours la même, égale à AC $[\pm \frac{a}{c}]$. Or c'est ce qu'indique l'éq : $x = \pm \frac{a}{c}$, ou $a = \pm cx$, à quoi se réduit l'éq : générale par la supposition de $b = 0$.

3. De même, $c = 0$, rend $\frac{a}{c}$, c'est-à-dire AC, infinie. Le point C va donc à l'infini, & la Droite qui partant de E rencontre AB à l'infini, lui est paralléle. On
Fig. 33. prendra donc sur l'Axe des ordonnées $AE = \pm \frac{a}{b}$, & on ménera EC paralléle à l'Axe des abscisses. Chaque point M de cette Droite a son ordonnée MP égale à AE $[\pm \frac{a}{b}]$. Elle est

CH. III. §. 40. est donc représentée par l'éq : $y = \pm \frac{a}{b}$, ou $a = \pm by$, PL. IV.

réduite de l'éq. générale $a = \pm by \pm cx$, par la supposition de $c = 0$.

Cas III. Si l'équation du premier Ordre n'a qu'un seul terme, ce ne sera pas le terme a, qui donneroit $a = 0$, équation impossible, puisque a est une grandeur donnée : mais ce sera le terme by, ou le terme cx.

1. Si l'équation est $by = 0$, on aura $y = 0$, qui représente simplement l'Axe des abscisses. Les ordonnées de cet Axe sont zéro, quelque abscisse qu'on prenne.

2. Si l'éq. est $cx = 0$, on aura $x = 0$, qui représente l'Axe des ordonnées, dont chaque point a son abscisse égale à zéro.

41. UN raisonnement tout semblable à celui du §. 39. démontre qu'une Ligne ne sera coupée par une Droite parallèle à ses abscisses, qu'en autant de points au plus qu'il y a d'unités au plus haut exposant de x dans son équation ; & qu'elle ne sera coupée par une Droite parallèle à ses ordonnées qu'en autant de points au plus qu'il y a d'unités au plus haut exposant d'y dans son équation.

Par ex. l'éq : $x^2 y - a^2 x + aby = 0$ exprime une Courbe du troisième Ordre, qui peut être coupée en trois points par une infinité de Droites, qui ont diverses positions. Mais par une Droite parallèle à ses ordonnées, elle ne peut être coupée qu'en un point ; parce que dans son équation y ne passe pas le premier degré. Et par une Droite parallèle aux abscisses, la Courbe ne peut être coupée qu'en deux points, parce que dans son équation x ne s'élève qu'au second degré. En effet, si la Droite parallèle aux ordonnées coupe l'Axe des abscisses en un point éloigné de l'Origine de la distance m, on doit regarder cette Droite comme l'ordonnée de l'abscisse m. Mettant

I 3 donc

PL. IV. donc m pour x dans l'équation de la Courbe, elle se CH. III.
transforme en $m^2y - a^2m + aby = 0$, qui n'a qu'une seule §. 41.
racine $y = \frac{a^2 m}{m^2 + ab}$. La Droite paralléle aux ordonnées ne rencontre donc la Courbe qu'en un seul point. Si la Droite paralléle aux abscisses coupe l'Axe des ordonnées en un point dont la distance à l'origine soit n, on la regardera comme l'abscisse de l'ordonnée n. Et mettant n pour y dans l'équation, elle se changera en $nx^2 - a^2x + abn = 0$, dont les deux racines $x = \frac{aa + \sqrt{(a^4 - 4abnn)}}{2n}$ & $x = \frac{aa - \sqrt{(a^4 - 4abnn)}}{2n}$ montrent que cette Droite rencontre la Courbe seulement en deux points; qu'elle ne la rencontre qu'en un point, si ces deux racines sont égales, ce qui a lieu quand $\sqrt{(a^4 - 4abnn)}$ est zéro, quand $n = \sqrt{\frac{a^3}{4b}}$; & qu'elle ne la rencontre point du tout, si ces deux racines sont imaginaires, ce qui arrive quand $a^4 - 4abnn < 0$, quand $n > \sqrt{\frac{a^3}{4b}}$.

42. Si l'on cherche généralement en quels points se rencontrent deux Lignes algébriques dont les équations sont données; on doit considérer que quand deux Lignes se rencontrent, elles ont au point commun une abscisse & une ordonnée commune. Si donc x & y sont les coordonnées d'une de ces deux Lignes, & z & u les coordonnées de l'autre, on aura à chaque point de rencontre quatre équations 1°. $x = z$. 2°. $y = u$. 3°. l'équation de la prémiére Ligne en x, y, & constantes. 4°. l'équation de la seconde Ligne en z, u, & constantes. On peut donc, en vertu des deux prémiéres équations, substituer dans

CH. III. dans la 4ème x pour z, & y pour u. Alors il reste deux PL. IV.
§. 42. équations en x, y, & constantes, qui sont celles des deux Lignes proposées; par le moyen desquelles faisant évanouïr y, on aura une équation en x & constantes, dont les racines x marquent toutes les abscisses qui répondent aux points de rencontre des deux Lignes. Comme aussi, si par le moyen des deux équations on fait évanouïr x, on aura une équation en y & constantes, dont les racines y donnent toutes les ordonnées des points de rencontre.

Pour déterminer précisément ces points, il faudroit chercher & l'abscisse & l'ordonnée de chaque point de rencontre, en examinant par l'une & l'autre équation quelles sont les ordonnées qui répondent aux abscisses qui sont présentées comme abscisses des points de rencontre; ou, si l'on le trouve plus facile, quelles sont les abscisses des ordonnées que l'équation en y & constantes donne comme ordonnées des points de rencontre. On verra par là quels sont les points communs à l'une & à l'autre Ligne, c'est-à-dire, quels sont les points qui sont véritablement points de rencontre.

43. Cela seroit d'autant plus nécessaire, qu'encore qu'il soit certain que chaque point de rencontre donne une racine x dans l'éq: en x & constantes, & une racine y dans l'éq: en y & constantes; on ne peut pas conclure réciproquement, que chaque racine x, ou chaque racine y, donne un point de rencontre. Dont la raison est que chaque racine x marque seulement qu'à une même abscisse les deux Lignes ont une même ordonnée, sans dire que ces deux ordonnées soient réelles. Le calcul qu'on a fait n'emporte pas précisément la rencontre des deux Lignes, mais seulement l'égalité d'une abscisse & d'une ordonnée; égalité qui peut avoir lieu entre les quantités imaginaires comme entre les grandeurs réelles. Dans ce cas, on peut dire qu'à

PL. IV. qu'à ces abſciſſes communes répondent des interſections imaginaires, que le Calcul donne auſſi bien que les réelles. La même choſe peut arriver par raport aux racines y. Cette équivoque ſeroit levée en cherchant les ordonnées y des abſciſſes x déterminées par l'éq: en x & conſtantes; ou en cherchant les abſciſſes x des ordonnées y déterminées par l'éq : en y & conſtantes. On verroit par là ſi les points de rencontre ſont réels ou imaginaires. Mais ce Calcul ſera long & ſouvent impraticable. CH. IV. §. 43.

44. Si x ou y ne monte qu'au premier dégré dans l'une des deux équations propoſées ; on eſt ſûr , ſi c'eſt y , qu'à chaque abſciſſe il ne répond qu'une ordonnée , qui par conſéquent ne peut jamais être imaginaire , puiſque dans ſon expreſſion il n'entre point de grandeur radicale. Ainſi chaque racine réelle de l'éq: en x & conſtantes marque un point de rencontre réel & non imaginaire. De même , ſi c'eſt x qui ne monte qu'au premier dégré dans l'une des équations propoſées; on eſt ſûr que chaque racine réelle de l'éq : en y & conſtantes , indique un point de rencontre réel.

Soient propoſées, par ex. ces deux éq : $yy + 2ax = 0$ & $yy + 4xx - 10ax - 16aa = 0$. En éliminant y on trouvera $4xx - 12ax - 16aa = 0$, qui a deux racines , toutes deux réelles $x = 4a$ & $x = -a$. Qu'on ſubſtituë la prémiére racine $4a$ au lieu de x, dans l'une & l'autre des deux éq: propoſées, elles ſe réduiront à $yy + 8aa = 0$, qui n'a que deux racines imaginaires $y = +4a\sqrt{-2}$ & $y = -4a\sqrt{-2}$. A l'abſciſſe $4a$ répondent deux ordonnées égales dans chaque Courbe. Cela ſemble promettre deux interſections : mais ces ordonnées ſont imaginaires, & les interſections le ſont auſſi. Qu'on ſubſtituë préſentement dans les éq : propoſées la ſeconde racine $-a$ au lieu de x, elles ſe réduiront l'une & l'autre

à yy

CH. III. §. 44. à $yy - 2aa = 0$, qui a deux racines réelles $y = + a\sqrt{2}$, & $y = - a\sqrt{2}$. L'abſciſſe $-a$ a donc dans chaque Courbe deux ordonnées réelles & égales, l'une poſitive, l'autre négative; qui donnent par conſéquent deux points d'interſection réels, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de la Ligne des abſciſſes. PL. IV.

Mais, ſans ce Calcul, on auroit pû trouver le nombre des points d'interſection, en conſidérant que dans l'éq: $yy + 2ax = 0$, la variable x ne monte qu'au premier dégré. Elle n'eſt donc jamais imaginaire, quelque valeur qu'on donne à y. Ainſi il ſuffit de chercher les racines de l'éq: en y & conſtantes, qui ſe trouve en faiſant évanouïr x, Car toutes les racines réelles de cette équation donnent des interſections réelles. Cette équation eſt $y^4 + 6aayy - 16a^4 = 0$, qui a ces quatre racines $y = + a\sqrt{2}$, $y = - a\sqrt{2}$, $y = + 4a\sqrt{-2}$, $y = - 4a\sqrt{-2}$, dont les deux prémiéres, qui ſont réelles, donnent des interſections réelles, & les deux derniéres, qui ſont imaginaires, ne donnent que des interſections imaginaires.

45. On trouvera dans une infinité d'Exemples, ce qu'on a pû remarquer dans celui-ci, qu'une ſeule abſciſſe; [ou qu'une ſeule ordonnée] donne pluſieurs points d'interſection. Il eſt très poſſible qu'une même abſciſſe ait, dans les deux Lignes, pluſieurs ordonnées, entre leſquelles il y en ait plus d'une qui ſoit commune aux deux Lignes. Alors, il y a plus d'interſections que de racines réelles dans l'éq: en x & conſtantes, puiſqu'une ſeule & même racine donne plus d'une interſection.

Si l'on propoſe, par ex. ces deux éq. $yy + xx - aa = 0$, & $yy + (\frac{a-b}{a+b})^2 xx - (a-b)^2 = 0$; en éliminant y on trouvera cette éq: $4axx - (2a-b)(a+b)^2 = 0$,

Pl. IV. $b)^2 = 0$, qui n'a que ces deux racines $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa} — ab)$, & $-\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$. Mais ce seroit se tromper que d'en conclure que les deux Courbes représentées par ces deux équations ne se rencontrent qu'en deux points. Car à chaque racine x il répond deux intersections, comme on le voit en substituant dans chaque équation au lieu d'x ses valeurs. En substituant la prémiére $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$, on trouve $yy - \frac{2aa+ab}{4aa}(a - b)^2 = 0$, qui a deux racines réelles $+\frac{a-b}{2a}\sqrt{(2aa+ab)}$, & $-\frac{a-b}{2a}\sqrt{(2aa+ab)}$. Ainsi à l'abscisse positive $x = +\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$ répondent deux intersections, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'Axe des abscisses. Il en répond aussi deux autres à l'abscisse négative $x = -\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$; ce qui fait quatre interfections en tout. Si on avoit commencé par éliminer x, l'éq: en y & constantes n'auroit eu non plus que deux racines : ce qui auroit exposé au danger de conclure avec précipitation que les deux Courbes ne se rencontrent qu'en deux points. Ch. III. §. 45.

On éviteroit ce danger, si en éliminant une des variables, comme y, on suppose, au lieu des équations proposées, des équations générales complettes, telles que $Ayy + By + C = 0$, & $Dyy + Ey + F = 0$, où l'indéterminée y est du même dégré que dans les équations dont on veut la chasser, & où A, B, C, D, E, F sont des Fonctions rationelles de x, telles qu'on voudra. Si de ces deux

CH. III. § 45. deux éq: $Ayy + By + C = 0$, & $Dyy + Ey + F = 0$, on élimine y, on parviendra à cette éq: $(AF - CD)^2 + (AE - BD)(CE - BF) = 0$, qui a autant de racines qu'il y a d'interſections. Pour l'appliquer aux équations propoſées ci-deſſus, $yy + xx - aa = 0$, & $yy + (\frac{a-b}{a+b})^2 xx - (a-b)^2 = 0$, on fera $A = 1$, $B = 0$, $C = xx - aa$, $D = 1$, $E = 0$, $F = (\frac{a-b}{a+b})^2 xx - (a-b)^2$, & ces valeurs ſubſtituées dans l'éq: $(AF - CD)^2 + (AE - BD)(CE - BF) = 0$, la changent en $\frac{16\,aabb}{(a+b)^4} x^4 - \frac{8\,ab(2ab - bb)}{(a+b)^2} xx + (2ab - bb)^2 = 0$, qui, diviſée par bb, eſt juſtement le quarré de l'éq: $\frac{4a}{(a+b)^2} xx - (2a - b) = 0$, qu'on a trouvée ci-deſſus. Dans celle-ci x a les deux mêmes racines $+ \frac{a+b}{2a} \sqrt{(2ab - bb)}$, & $- \frac{a+b}{2a} \sqrt{(2ab - bb)}$; mais chacune de ces racines eſt double, parce qu'à chaque abſciſſe x répondent deux interſections. PL. IV.

46. MAIS ſi l'on ne cherche pas tant à connoître en combien de points ſe rencontrent deux Lignes dont les équations ſont données, qu'à ſavoir, [ce qui a auſſi ſon uſage] en combien de points une Ligne d'un Ordre donné peut rencontrer une autre Ligne d'un Ordre auſſi donné; on doit concevoir, ce qui eſt toûjours évidemment poſſible, un Axe des abſciſſes dont la poſition ſoit telle qu'à chaque point de rencontre il réponde une ordonnée & une abſciſſe différente. Alors ſi l'on fait évanouïr x ou y par le moyen des équations des deux Lignes, il

PL. IV. il restera une équation, qui aura au moins autant de racines CH. III. qu'il y a de points de rencontre des deux Lignes, puis- §. 46. que chaque point de rencontre a son abscisse & son ordonnée particuliére. Or il est démontré * que si l'on a deux variables, & deux équations indéterminées qui expriment le raport de ces variables avec des constantes, desquelles l'une soit de l'ordre m & l'autre de l'ordre n; lors qu'au moyen de ces deux équations on chasse une de ces variables, celle qui reste n'a, dans l'équation finale qui la détermine, que mn dimensions au plus. Elle ne peut donc avoir, dans cette équation, que mn racines au plus. Par conséquent, deux Lignes algébriques décrites sur un même plan, ne peuvent se rencontrer qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans le produit des nombres qui sont les exposants de leurs Ordres †. Une Ligne, par ex. du 3e. Ordre ne peut rencontrer une Ligne du 4e. Ordre, qu'en 12 points, au plus: & une Ligne du 5e. Ordre ne sauroit rencontrer une Ligne du 12e. Ordre qu'en 60 points, au plus.

47. CE principe semble d'abord être en contradiction avec celui du §. 38. On peut toûjours décrire une Ligne du second Ordre par cinq points donnés, quelle que soit la position de ces cinq points. Si trois d'entr'eux sont en ligne droite, cette Droite coupera en trois points la Ligne du second Ordre qui passe par les cinq points donnés. On

* Ce Principe, purement algébrique, devroit être démontré dans l'Algébre. Comme je n'en connois aucune qui en donne la Démonstration, j'ai crû devoir l'insérer dans l'*Appendice*, *N°*. 3.

† Mr. MAC-LAURIN a démontré la même chose, mais je ne crois pas que sa Démonstration ait été rendue publique. Voiez *Transf. Philos. N°*. 439. pag. 143.

CH. IV. § 47. On a vû pourtant [§. 39. ou précéd.] qu'une Droite ne peut couper une Ligne du second Ordre qu'en deux points. Comment accorder ces deux conséquences opposées ? Il n'y a qu'un seul moyen. C'est de dire que, dans ce cas, la Ligne du second Ordre qui passe par les cinq points donnés, n'est pas une Courbe, mais le Système de deux Droites, dont l'une est celle-là même qui passe par les trois points donnés en droite ligne & dont l'autre passe par les deux points restants. Le Calcul confirmera la vérité de cette conciliation. PL. III.

Posons, dans l'Exemple du §. 38, que les trois points A, D, E soient en ligne droite. Comme on a pris AE pour l'Axe des abscisses, le point D se trouvant sur cet Axe, l'ordonnée Dd [d] est zéro, ce qui réduit l'éq: $cd(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)xx-(\gamma d(b-d)(\epsilon-\gamma)-c\delta(b-c)(\epsilon-\delta))xy+\gamma\delta(d(\epsilon-\gamma)-(\epsilon-\delta)c)yy-cd\epsilon(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)x-b\gamma\delta(d(\epsilon-\gamma)-(\epsilon-\delta)c)y=0$ qu'on avoit trouvée pour la Ligne du second Ordre qui passe par les cinq points donnés A, B, C, D, E, à $(\epsilon-\delta)(b-c)c\delta xy-(\epsilon-\delta)c\delta\gamma yy+(\epsilon-\delta)c\delta\gamma by=0$. Or cette équation est divisible par $(\epsilon-\delta)c\delta y$, & a pour quotient $(b-c)x-\gamma y+b\gamma$. On peut donc lui donner cette forme $(\epsilon-\delta)c\delta y\times((b-c)x-\gamma y+b\gamma)=0$, sous laquelle on voit qu'elle représente deux Droites, dont l'une exprimée par l'éq: $(\epsilon-\delta)c\delta y=0$, où simplement $y=0$ est l'Axe des abscisses, qui passe par les trois points en ligne droite A, D, E: l'autre représentée par l'éq: $(b-c)x-\gamma y+b\gamma=0$ passe par les deux autres points B, C. En effet $x=0$ donne $y=b=$ AB, & $x=\gamma=$ Ac donne $y=c=$ cC. Donc la Ligne passe par les points B & C. Fig. 13.

Ainsi une Ligne du second Ordre décrite par cinq points donnés, dont trois sont en droite ligne, est nécessairement le Système de deux Droites, dont l'une passe par

PL. IV. par ces trois points, & l'autre par les deux points restants. CH. III. §. 47.

Cet Exemple, & la nécessité d'admettre cet unique dénoüement, nous autorise à affirmer généralement *: Que quand, dans le nombre $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ de points par lesquels on peut & veut faire passer une Ligne de l'Ordre v, il y a plus de tv de ces points qui se trouvent sur une Ligne de l'ordre t inférieur à v, alors la Ligne cherchée de l'ordre v n'est pas une Ligne unique, mais le Systême de deux ou plusieurs Lignes, l'une desquelles est cette même Ligne de l'ordre t sur laquelle se trouvent plus de tv points donnés. Car autrement, deux Lignes, l'une de l'ordre t, l'autre de l'ordre v, se couperoient en plus de tv points: ce qui est impossible [§. 46].

48. Une autre contradiction apparente entre les §§. 46 & 38, est celle-ci. Puisqu'une Ligne de l'ordre m ne peut rencontrer une Ligne de l'Ordre n, qu'en mn points, une Ligne de l'Ordre v ne rencontrera une autre Ligne du même ordre qu'en vv points. Si donc vv est égal ou plus grand que le nombre $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$, qui est celui des points qui déterminent une Ligne de l'ordre v, on pourra faire passer plus d'une Ligne de l'ordre v par $\frac{1}{2}vv + \frac{3}{2}v$ points; ce qui semble contraire au §. 38 †. Ainsi deux Lignes du troisiéme Ordre se pouvant couper en 9 points, si l'on assigne ces 9 points pour y faire passer une Ligne du troisiéme Ordre; il est clair que les deux Lignes qui se coupent dans ces 9 points satisfont également à ce qu'on désire. L'équation de la Ligne qui doit passer par ces 9 points n'est donc pas déterminée. De même deux Lignes du quatriéme Ordre se peuvent couper en 16 points. Et l'on a établi

* MAC-LAURIN, *Geometria organica*, pag. 137.
† Idem, ibid.

Ch. III. §. 48. établi [§. 38] que 14 points suffisent pour déterminer une Ligne du quatriéme Ordre. Mais si ces 14 points sont pris entre les 16 où ces deux Lignes se coupent, l'une & l'autre Ligne satisfait au Problême, qui est, par conséquent, indéterminé. Pl. IV.

Cette contradiction se léve par la Remarque qui termine le §. 38. C'est qu'encore qu'on ait autant d'équations qu'il en faut, généralement parlant, pour déterminer tous les coëfficients de l'équation prise pour répréſenter la Courbe qui doit passer par un certain nombre de points donnés, il peut pourtant arriver que ces coëfficients restent indéterminés. Alors l'équation prise reste indéterminée & représente une infinité de Courbes du même Ordre. D'où il suit, Que si les 9 points, par lesquels on veut décrire une Ligne du troisiéme Ordre, ont une position telle qu'on puisse faire passer par ces 9 points deux Lignes de cet Ordre, il pourra passer par ces mêmes 9 points une infinité de Lignes du troisiéme Ordre. Et de même, que si deux Lignes du quatriéme Ordre se coupent en 16 points, parmi lesquels on en choisit 14 quelconques, il y a une infinité de Lignes du quatriéme Ordre qui peuvent passer par ces 14 points, &c. Ce qui est un véritable paradoxe.

CHAPI-

CHAPITRE IV.

Quelques Remarques ſur la Conſtruction géométrique des Egalités.

Pl. IV. 49. DEs Principes établis à la fin du Chap. précédent, §. 49.
découle la Méthode uſitée pour la Conſtruction des Egalités déterminées. Elle conſiſte à choiſir deux équations indéterminées, telles que faiſant évanouïr une des deux variables que ces équations renferment, l'équation déterminée, qui reſte après cet évanouïſſement, ſoit l'égalité même qu'on propoſoit à conſtruire. Si l'on décrit ſur un même plan & d'une même Origine les deux Lignes que repréſentent ces équations indéterminées, & qu'on méne les ordonnées de tous les points où ces deux Lignes ſe rencontrent, elles ſeront les racines de l'Egalité propoſée [§. 42]. On ſuppoſe ici que y eſt l'inconnuë de l'égalité propoſée, & x la variable qu'on fait évanouïr.

Soit propoſé, par ex. ce Problème ſi fameux dans l'Antiquité, de trouver entre deux Droites données a & b, deux moyennes proportionelles. Si on nomme la premiére y, la ſeconde ſera $\frac{yy}{a}$, puiſque $a:y=y:\frac{yy}{a}$. On aura donc cette proportion $a:y=\frac{yy}{a}:b$, qui donne l'éq: $\frac{y^3}{a}=ab$, ou $y^3=aab$; Egalité du troiſiéme dégré, que ni l'Algébre, ni la Géométrie Elémentaire ne peuvent réſoudre généralement que par approximation. Mais, en intro-

Ch. IV. §. 42. introduisant une autre inconnuë x, qui soit, par ex. la Pl. IV. seconde moyenne proportionelle, on aura ces deux proportions $a : y = y : x$, & $y : x = x : b$, qui donnent ces deux équations indéterminées $ax = yy$ & $xx = by$, lesquelles, faisant évanouïr x, rendent l'Egalité $y^3 = aab$, qu'on avoit ci-dessus. Car la prémiére de ces deux équations donne $x = \frac{yy}{a}$, & cette valeur substituée dans la seconde la transforme en $\frac{y^4}{aa} = by$, ou $y^4 = aaby$, & divisant par y, $y^3 = aab$.

Si donc on décrit, d'une même origine A & sur les Fig. 34. mêmes Axes, les deux Courbes CAM, BAM représentées par les deux éq: $ax = yy$ & $xx = by$, & que de leur commune intersection M on abaisse l'ordonnée MP [y], elle sera la racine de l'Egalité cubique $y^3 = aab$, & la prémiére des deux moiennes proportionelles entre a & b. Et comme x représente la seconde de ces deux moyennes, l'abscisse AP [x] sera cette seconde moyenne, en sorte que les quatre Droites a, MP, PA, b, sont en proportion continuë.

Cela suit du §. 42. Car y & x sont deux variables, dont le raport pour tous les points de la Courbe CAM s'exprime par l'éq: $ax = yy$, & pour tous les points de la Courbe BAM par l'éq: $xx = by$. Donc au point M, commun à ces deux Courbes, le raport de y à x s'exprime en même tems par les deux éq: $ax = yy$ & $xx = by$. Ces lignes y & x cessent donc d'être variables, & deviennent déterminées par les Egalités $y^3 = aab$ & $x^3 = abb$, qui résultent de l'évanouïssement de x & de y, & qui déterminent la valeur de l'ordonnée & de l'abscisse au point M. En effet, puisque la Courbe CAM est représentée par l'éq: $ax = yy$, ou, ce qui est la même chose, par la propor-

 tion

PL.IV. tion $a:y = y:x$; quelque point M qu'on prenne ſur cette Courbe CAM, l'ordonnée MP [y] eſt toujours moyenne proportionelle entre la Droite donnée a & l'abſciſſe AP[x]. Et puiſque la Courbe BAM eſt repréſentée par l'éq: $xx = by$, qui ſe réduit à la proportion $y:x = x:b$; l'abſciſſe AP [x] d'un point quelconque M de cette Courbe BAM eſt moyenne proportionelle entre l'ordonnée MP [y] & la Droite donnée b. Donc, au point M, commun à ces deux Courbes, on a ces deux proportions à la fois, $a:PM = PM:AP$, & $PM:AP = AP:b$. Donc PM & AP ſont les deux moyennes proportionelles entre a & b. CH. IV. §. 49.

50. Le choix des équations indéterminées qui doivent rendre l'Egalité propoſée, lorſqu'on aura fait évanouïr une des variables, n'a rien de difficile. On en prend une, preſque arbitrairement, & l'on tire de cette équation la valeur de y, ou de yy, ou de y^3, &c. en x & en conſtantes, ou même en y, x & conſtantes. On ſubſtituë cette valeur en un ou en pluſieurs termes de l'Egalité: ce qui la change en une Equation indéterminée, qui, avec celle qui a été choiſie, redonne l'Egalité propoſée, en faiſant évanouïr x. On peut auſſi combiner les deux équations indéterminées qu'on a trouvées, en les ajoûtant enſemble, en retranchant l'une de l'autre, ou en d'autres maniéres, qui fourniront toutes de nouvelles équations indéterminées, parmi leſquelles on aura le choix de celles qui paroîtront les plus convenables.

Dans l'Exemple du §. précéd. l'Egalité propoſée à conſtruire étoit $y^3 = aab$, & l'éq: indéterminée qu'on avoit choiſie étoit $ax = yy$. On peut ſubſtituer cette valeur de yy dans le premier membre de l'Egalité, ce qui la transforme en $axy = aab$, ou $xy = ab$, autre équation indéterminée, qui, avec la prémiére $ax = yy$, conſtruira l'Egalité $y^3 = aab$. On peut auſſi multiplier ces deux équations

 tions l'une par l'autre, & on aura $axxy = abyy$ soit $xx = by$, qui est l'équation dont on a fait usage dans le §. préc. pour construire l'Egalité proposée. On peut encore ajoûter, ou soustraire, soit les deux premiéres équations, ce qui donne $ax + xy = yy + ab$, & $ax - xy = yy - ab$; soit les deux derniéres, d'où résultent $xy + xx = ab + by$, & $xy - xx = ab - by$; soit enfin, la prémiére & la derniére, d'où l'on tire $ax + xx = yy + by$, & $ax - xx = yy - by$. On peut encore, si l'on veut, multiplier ou diviser une de ces équations par un nombre quelconque n, & ajoûter au produit ou en retrancher quelque autre équation de celles qu'on a trouvées. La prémiére, par ex. multipliée par n, donne $nax = nyy$, à quoi ajoûtant la seconde $xy = ab$, on aura $nax + xy = nyy + ab$. On voit assez par ce simple Exemple, qu'on peut trouver une infinité d'équations indéterminées, entre lesquelles on choisira celles qu'on croira les plus convenables. Ici, par ex. toutes ces équations étant du second Ordre, il conviendra de choisir $ax - xx = yy - by$, qui désigne une Circonférence de Cercle, la Courbe la plus connuë & la plus aisée à décrire, & on la combinera avec celle qu'on voudra des autres équations trouvées. PL. IV.

51. ON A DIT que le choix de la prémiére des deux équations indéterminées qui servent à construire une Egalité est *presque* arbitraire. Ce qui empêche qu'il ne le soit entiérement, c'est la crainte que les intersections qui déterminent les racines de l'Egalité ne soient imaginaires [§. 43]. Il faut que les Lignes choisies ayent des abscisses réelles qui répondent aux ordonnées qui sont les racines de l'Egalité, ou des ordonnées réelles qui répondent aux abscisses qui sont les racines de l'Egalité proposée. Autrement, il arrivera que les intersections qui devroient déterminer

 ces

PL. IV. ces racines seront imaginaires, & que l'Analyste sera frustré de son attente *. CH. IV. §. 51.

Si l'on avoit, par ex. à conserver l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$, & qu'introduisant l'inconnuë y, on voulût employer pour cela les éq : $x^3 - ayy = 0$ & $xyy + 15a^2x + 14a^3 = 0$, qui rendent l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$, en faisant evanouïr y. On trouvera, en prenant Fig. 35. AB & AD pour les deux Axes, que l'éq : $x^3 - ayy = 0$ donne la Courbe EAF, qui, du côté des abscisses positives, a deux branches égales & semblables, de part & d'autre de l'Axe des abscisses, mais qui, du côté des abscisses négatives, n'a aucune branche, toutes les ordonnées $y [= \sqrt{\frac{x^3}{a}}]$ étant imaginaires, quand les abscisses x sont négatives. On trouvera, au contraire, que l'éq : $xyy + 15a^2x + 14a^3 = 0$ représente une Courbe GCH, qui tombe toute entiére du côté des abscisses négatives, parce que x positive donne $y [= \sqrt{(-\frac{15a^2x + 14a^3}{x})}]$ imaginaire. Ces deux Courbes EAF, GCH ne peuvent donc se rencontrer. D'où l'on seroit porté à conclure que l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$ n'a que des racines imaginaires : si l'on ne savoit pas que des intersections imaginaires peuvent donner des racines réelles [§. 43]. En effet, si on cherche les ordonnées que porte, dans l'une & l'autre Courbe, l'abscisse $-a$; on les trouvera égales entr'elles & à $\pm a\sqrt{-1}$. Donc l'abscisse $x = -a$, ou plûtôt l'éq : $x + a = 0$, est une racine de l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$: ce que le Calcul confirme aisément. De même si l'on cherche les ordonnées de l'abscisse $-2a$, on

* Mr. ROLLE, *Hist. de l'Acad.* 1708 pag. 71, & 1709, pag. 52. Et *Memoires* de 1708, pag. 339, & de 1709, pag. 320, & 419.

Ch. IV. §. 51. on trouvera, pour l'une & l'autre Courbe, $\pm 2a\sqrt{-2}$. Pl. IV.
Ainsi l'abscisse $-2a$ a, dans les deux Courbes, une même ordonnée, quoique imaginaire, & cette abscisse $x = -2a$, ou plûtôt l'éq: $x + 2a = 0$, est encore une racine réelle de l'Egalité $x^4 + 15a^3 + 14a^4 = 0$; ce que le Calcul vérifiera aussi.

Le nombre des intersections réelles des deux Lignes peut donc être moindre que le nombre des racines réelles de l'Egalité qu'on veut construire par le moien de ces deux Lignes.

52. Mais, en échange, le nombre des intersections des deux Lignes peut surpasser le nombre des racines de l'égalité; parce qu'il se peut que plusieurs intersections ne donnent qu'une seule racine; sç., lorsque plusieurs points de rencontre n'ont qu'une même ordonnée, ou n'ont qu'une même abscisse [§. 45].

Par ex. On veut construire l'Egalité $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ avec les deux éq: indéterminées $x^3 - ayy = 0$ & $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$, qui font reparoître l'Egalité proposée, en éliminant y. La première $x^3 - ayy = 0$ de ces deux équations donne, comme ci-dessus, la Courbe EAF, qui est toute entiére du côté des abscisses positives. Fig. 36.
Mais la seconde éq: $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$, représente une Courbe composée de trois portions séparées GBH, IK, ik. Ces deux derniéres sont du côté des abscisses négatives, & la prémiére du côté des abscisses positives. En examinant l'éq: $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$ ou $yy = \frac{15a^2x - 14a^3}{x}$, on trouve que cette portion GBH est partagée par l'Axe des abscisses en deux branches égales & semblables, qui partent du point B extrémité de l'abscisse $AB = \frac{14}{15}a$; qu'une abscisse positive plus petite que AB n'a que des ordonnées imaginaires; mais qu'à commencer

PL. IV. à B, plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées augmentent aussi, sans passer néanmoins la grandeur $a\sqrt{15}$, à laquelle les ordonnées ne parviennent que quand l'abscisse est infinie. La Courbe GBH rencontre la Courbe EAF en quatre points M, N, n, m. Il ne faut pourtant pas en conclure que l'Egalité $x^4 - 15a^2x + 14a^4 = 0$ a quatre racines réelles. Car les intersections M, m, quoiqu'elles ayent deux ordonnées MP [$+2a\sqrt{2}$] & mP [$-2a\sqrt{2}$], n'ont qu'une seule abscisse AP [$x = 2a$]: Et les intersections N, n, quoiqu'elles ayent deux ordonnées NQ [$+a$] & nQ [$-a$], n'ont qu'une seule abscisse AQ [$x = a$]. Ainsi les quatre intersections M, N, n, m ne donnent que deux racines $x - 2a = 0$, & $x - a = 0$. Et l'Egalité $x^4 - 15a^2x + 14a^4 = 0$ n'a point d'autres racines réelles. Car si on la divise par $x - 2a = 0$, & le quotient par $x - a = 0$, ou si on divise tout d'un coup l'Egalité par le produit $(x-2a)\times(x-a) = 0 = xx - 3ax + 2aa$, on aura au quotient l'éq: $xx + 3ax + 7aa = 0$, qui n'a que deux racines imaginaires, $3a + \frac{1}{2}a\sqrt{-19}$ & $3a - \frac{1}{2}a\sqrt{-19}$. CH. IV. §. 52.

53. On évite ces deux inconvéniens, d'avoir plus & moins d'intersections qu'il n'y a de racines réelles dans l'Egalité qu'on veut construire, en choisissant l'une des deux équations qu'on veut employer, telle que la variable y qui doit s'évanouïr n'ait qu'une dimension. Car alors, cette variable, qui exprime les ordonnées des Lignes par l'intersection desquelles on construit l'Egalité, n'a qu'une seule valeur dans l'équation où elle n'a qu'une dimension, & cette valeur ne peut être imaginaire. Donc à chaque x réelle il répond une seule y, mais réelle. Il y aura donc [§. 44] autant d'intersections précisément que de racines réelles *. Repre-

* HERMANNI; Observat. in Sched. Dni ROLLE &c. *Miscell. Berol. Tom.* III. pag. 131.

CH. IV. §. 53. Reprenons les Egalités des §§. précéd. $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$, & $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$, &, pour les construire, au lieu de l'éq : $x^3 - ayy = 0$, prenons $xx - ay = 0$, où y n'a qu'une seule dimension. Qu'on substituë, dans le premier terme des Egalités proposées, ay au lieu de xx, elles se transformeront en $aayy + 15a^3x + 14a^4 = 0$, & $aayy - 15a^3x + 14a^4 = 0$, ou, divisant par aa, en $yy + 15ax + 14aa = 0$, & $yy - 15ax + 14aa = 0$. On construira donc la prémiére Egal : $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$ par les interséctions des Courbes représentées par les deux éq : $xx - ay = 0$, & $yy - 15ax + 14aa = 0$; & la seconde Egal : $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ par les interséctions des Courbes que représentent les deux éq : $xx - ay = 0$, & $yy - 15ax + 14aa = 0$. PL. IV.

La prémiére éq : $xx - ay = 0$ exprime une Courbe CAM composée de deux branches égales & semblables AC, AM; qui partant de l'origine A s'étendent à l'infini à droite & à gauche au-dessus de l'Axe des abscisses. Fig. 37. & 38.

Qu'avec cette Courbe on combine la Courbe EBM représentée par l'éq : $yy + 15ax + 14aa = 0$, & qui est aussi composée de deux branches égales & semblables BM, BE, partant du point B extrémité de l'abscisse $AB = -\frac{14}{15}a$, & s'étendant à l'infini vers la gauche, dessus & dessous l'Axe des abscisses. Les interséctions M, N de ces deux Courbes CAM, EBM donneront les deux racines de l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$. En abaissant les ordonnées MP, NQ on aura les abscisses $AP = -2a$ & $AQ = -a$, qui font connoître les racines $x = -2a$, & $x = -a$, ou $x + 2a = 0$ & $x + a = 0$, de cette Egalité. Et comme elle n'a que ces deux racines réelles, les Courbes CAM, EBM ne se rencontreront qu'en ces deux points M & N. Fig. 37.

Mais si avec la Courbe CAM, désignée par l'éq : $xx - ay = 0$, on combine la Courbe EBM représentée par l'éq : Fig. 38.

PL. IV. l'éq: $yy - 15ax + 14aa = 0$, qui est la même que la Ch. IV. Courbe EBM de la *Fig.* préc. transportée seulement de §. 53. la gauche à la droite, puisque ces deux équations ne diffèrent que dans le signe de x: on aura les racines réelles de l'Egalité $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$. En abaissant des points d'intersection M, N les ordonnées MP, NQ, on aura les abscisses $AP = 2a$ & $AQ = a$, qui font connoître les racines réelles $x = 2a$ & $x = a$, ou $x - 2a = 0$ & $x - a = 0$ de cette Egalité. Et ici, comme dans le Cas précédent, il n'y a ni plus ni moins d'intersections que de racines réelles.

54. C'est, sans doute, une nécessité que de prévenir les inconvéniens cités aux §§. 51 & 52. Mais ce n'est que pour plus d'élégance qu'on joint à la Méthode cette condition, que les deux équations, qu'on employe pour construire une Egalité, soient les plus simples qu'il soit possible, & de l'Ordre le plus bas qui puisse suffire à la Construction *.

Ainsi, comme pour construire une Egalité du 4e. dégré, il suffit de deux Courbes qui se coupent en 4 points, & puisqu'il ne faut pour cela que des Lignes du 2d. Ordre [§. 46]; on regarderoit comme une faute contre la simplicité géométrique d'emploier des Courbes d'un Ordre supérieur. Et comme une Egalité du 9e. dégré, n'aiant que 9 racines, ne demande que 9 intersections, ce qui est le nombre de points où peuvent se rencontrer deux Lignes du 3e. Ordre [§. 46]; il ne faudra pas emploier des Courbes d'un Ordre plus élevé que le 3e, pour la construction des Egalités du 9e. dégré. En général, les Egalités du dégré vv se doivent résoudre par les intersections de deux Lignes de l'Ordre v, qui peuvent se couper en autant

* Iacobi Bernoulli *Opera*, pag. 343.

Fig. 27.
D
C
A
B
E
Fig. 28.
D
E
A
B
C
Fig. 29.
D
A
C
B
E
Fig. 31.
M
e
A
c
P
c
e
Fig. 32.
E
D
E
M
Q
M
C
A
C
B
Fig. 33.
D
E
M
C
A
P
B
E
M
C
M
P
G
D
E
Fig. 35.
C
A
B
F
M
H
I
D
K
E
G
M
Fig. 36.
N
A
B
Q
P
n
m
H
F
Fig. 38.
C
C
N
A
B
Q
P
E
k
i
d

CH. IV. §. 54. tant de points qu'il y a d'unités dans *vv*, & déterminer par ces interſections toutes les racines de l'Egalité. PL. IV.

Quant aux Egalités dont le dégré n'eſt pas un nombre quarré; on pourroit les conſtruire par deux Lignes telles que le produit des expoſants de leurs Ordres faſſe le dégré de l'Egalité propoſée [§. 46]. On peut, par ex. conſtruire une Egalité du 15e. dégré par les interſections de deux Lignes, l'une du 3e., l'autre du 5e. Ordre. Mais, comme on peut réſoudre toute Egalité du 16e. dégré par deux Lignes du 4e. Ordre, il n'a pas paru convenable d'employer une Ligne d'un Ordre ſupérieur, pour conſtruire une Egalité d'un dégré inférieur, & on a préféré d'élever l'Egalité du 15e. dégré au 16e. en multipliant tous ſes termes par l'inconnuë de l'Egalité. On eſtime donc qu'il y a plus de ſimplicité à employer deux Lignes du 4e. Ordre, qu'une Ligne du 3e. avec une Ligne du 5e. Ordre. De même, pour conſtruire une Egalité du 14e. dégré; ce qu'on pourroit faire avec une Ligne du 7e. & une du 2e. Ordre: on aime mieux employer deux Lignes du 4e. Ordre, & élever l'Egalité du 14e. dégré au 16e., en multipliant tous ſes termes par le quarré de l'inconnuë. Mais les Egalités du 12e. dégré ſe conſtruiſent avec deux Lignes, l'une du 4e. & l'autre du 3e. Ordre. Et c'eſt avec de pareilles Lignes qu'on conſtruit les Egalités du 11e. & du 10e. dégré, après les avoir élevés au 12e. en multipliant tous les termes de la prémiére par l'inconnuë, & tous les termes de la ſeconde, par le quarré de l'inconnuë.

On a donc formé cette Régle générale pour la ſimplicité de la conſtruction géométrique des Egalités déterminées *.
» On extraira la racine quarrée du dégré de l'Egalité pro-
» poſée. Si cette racine eſt exacte, on conſtruira l'Egalité

* Mr. DE L'HÔPITAL *Sections Coniques*, pag. 346.

Pl. IV. „ avec deux Lignes dont l'Ordre a pour exposant cette ra- Ch. IV.
„ cine même. Si la racine n'est pas exacte, on ôtera du §. 54.
„ dégré de l'Egalité le plus grand quarré qui y soit conte-
„ nu; & si le reste est égal ou moindre que la racine de
„ ce quarré, l'une des deux Lignes doit être de l'Ordre
„ qui a pour exposant la racine, & l'autre de l'Ordre im-
„ médiatement supérieur : mais si le reste est plus grand
„ que la racine, les deux Lignes doivent être chacune de
„ l'Ordre dont l'exposant a une unité de plus que la ra-
„ cine.

Si, par ex. l'Egalité étoit du 30e. dégré. Comme la racine quarrée la plus prochaine de 30 est 5, dont le quarré 25 ôté de 30 laisse pour reste 5, qui est égal à la racine 5; l'Egalité se peut construire par deux Lignes, une du 5e. & une du 6e. Ordre. Les mêmes serviront à construire les Egalités du 26e, 27e, 28e, & 29e dégré. Mais si l'Egalité étoit du 31e. dégré, dont la racine quarrée aprochée est aussi 5; comme le quarré 25, ôté de 31, laisse 6, qui est plus grand que la racine 5; il faudra pour construire l'Egalité du 31e. degré, deux Lignes du 6e. Ordre. Et il suffira aussi de deux Lignes du même Ordre pour construire les Egalités du 32e, 33e, 34e, 35e, & 36e. dégré.

Les Egalités du dégré	2	3.4	5.6	7..9	10..12	13..16	17..20	21..25	26..30	31..36
se construisent par deux Lignes de l'Ordre —	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
& —	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

Les Egalités du dégré	37..42	43..49	50..56	57..64	65..72	73..81	82..90	91..100
se construisent par deux Lignes de l'Ordre —	6	7	7	8	8	9	9	10
& —	7	7	8	8	9	9	10	10

55. Telle

Ch. IV. §. 55. 55. TELLE eſt la Régle des Géométres modernes pour le choix des Lignes propres à conſtruire une Egalité d'un dégré propoſé. On voit par là, qu'ils meſurent la ſimplicité d'une conſtruction par la ſimplicité de l'Ordre des Lignes qu'on y employe, & qu'ils ſe font une Loi de ne pas admettre des Lignes d'un Ordre ſupérieur, quand celles d'un Ordre inférieur peuvent ſuffire. Je ne ſais cependant ſi cette Régle eſt abſolument la meilleure. Il ſemble que c'eſt moins la ſimplicité de l'équation que la facilité de la deſcription, qu'il faut chercher dans le choix des Lignes propres à conſtruire un Problême. On peut dire que chaque Problême a quelque Courbe propre à le réſoudre plus naturellement que toute autre Courbe, même d'un Ordre inférieur. D'ailleurs, une Courbe d'un Ordre aſſez élevé, mais dont l'équation n'a que peu de termes, ſera ordinairement plus aiſée à décrire, ſoit par points, ſoit au moyen de quelque Inſtrument, qu'une Courbe d'un Ordre plus bas, mais dont l'équation la plus réduite conſerve un grand nombre de termes. On voit même divers Exemples de Courbes faciles à décrire, quoique leur nature ne puiſſe s'exprimer que par des équations fort compoſées. Or, dans les conſtructions géométriques, ne doit-on pas préférer celles qui ſont les plus ſimples? Et les plus ſimples ne ſont-ce pas celles qui s'exécutent par les Courbes les plus aiſées à décrire? L'équation n'eſt proprement qu'un ſigne qui nous guide dans le Calcul; & au fonds, c'eſt la deſcription de la Courbe qui réſout le Problême. Qu'on y parvienne par un Calcul plus ou moins long, plus ou moins difficile, cela n'entre pour rien dans l'opération même qui conſtituë véritablement la Solution. L'équation $xx + yy = rr$ qui eſt la plus ſimple équation du Cercle [§. 7], eſt plus compoſée que celle-ci $xx = ay$, qui déſigne une autre Courbe du ſecond Ordre. On ne balancera pourtant pas à employer le Cercle pour conſtruire

PL. IV.

PL. V. une Egalité, plûtôt que la Courbe repréſentée par l'éq: $xx = ay$. Pourquoi cela; ſi ce n'eſt à cauſe de la facilité avec laquelle on trace une circonférence de Cercle; facilité qui fait qu'on aime mieux ſe ſervir du Cercle que de la Droite en pluſieurs rencontres : quoique la Droite ſoit du premier Ordre, & la circonférence de Cercle du ſecond *. CH. IV. §. 55.

56. CELA étant, je ne vois pas pourquoi on rejetteroit la Conſtruction ſuivante d'une Egalité quelconque, par le moyen d'une Droite paralléle aux ordonnées, & d'une Courbe dont l'Ordre eſt, à la vérité, égal au dégré de l'Egalité propoſée, mais dont on peut déterminer tous les points par la Géométrie élémentaire †.

Toute Egalité ſe peut réduire à cette forme $a = by + cy^2 + dy^3 + ey^4$ &c. Qu'on décrive la Ligne dont l'équation eſt $x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4$ &c, & de laquelle on peut trouver tous les points avec le Compas & la Régle.

Fig. 39. Car, prenant ſur la Ligne des ordonnées AB une ordonnée quelconque AQ [y], on trouvera by qui eſt à b comme y à 1 [1 eſt une Droite priſe à volonté pour ſervir d'unité], & cy^2 qui eſt à c en raiſon doublée de y a 1, & dy^3 qui eſt à d en raiſon triplée de y à 1, & ainſi de ſuite. Puis, menant QM paralléle à la Ligne AC des abſciſſes, & prenant ſur cette Droite la partie QM égale à $by + cy^2 + dy^3$ &c. le point M ſera un de ceux de la Courbe. Cette Courbe AdefM étant ainſi décrite par points, ou de quelqu'autre maniére, ſi l'on en peut trouver de plus commode; ſi l'on prend l'abſciſſe AG $= a$, ſes ordonnées GH, GI, GK, GL, déterminées en menant par le

* Jac. BERNOULLI *Oper.* pag. 689. & ſuiv. NEWTON *Arithm. univerſ.* pag. 286. 287.

† Jac. BERN. *Oper.* pag. 690. Mr. DE L'HÔPITAL, *Sect. Conic.* pag. 348. STIRLING, *Linea tertii Ordinis &c.* pag. 59.

CH. IV. §. 56. le point G la Droite GN paralléle à AB, feront les racines y de l'Egalité $a = by + cy^2 + dy^3 + ey^4$ &c. PL. V.

Car, par la nature de la Courbe, le raport de chaque abscisse AP [x] à son ordonnée PM [y] est exprimée par l'éq: $x = by + cy^2 + dy^3$ &c. Donc l'abscisse AG étant a, le raport de AG [a] à l'ordonnée GH, GI, GK, ou GL [y] est exprimé par l'Eg: $a = by + cy^2 + dy^3$ &c. Donc GH, GI, GK, GL sont les valeurs d'y dans cette Egalité: elles sont ses racines.

51. NON-SEULEMENT cette construction est simple & d'une pratique facile: elle est surtout utile pour déterminer les limites des Egalités, & le nombre de leurs racines réelles & de leurs racines imaginaires. On voit, par ex. dans la *Fig.* 39, que la Courbe a quatre branches Ad, de, ef, fM. C'est pourquoi l'ordonnée GN peut couper cette Courbe en quatre points H, I, K, L. Supposons qu'elle la coupe en autant de points, & menons par les sommets d, e, f, les abscisses dΔ, eΞ, fΦ, qui coupent GN en δ, ϵ, φ; on voit que la prémiére racine GH terminée à la branche Ad, est plus petite que Gδ ou AΔ, & qu'ainsi elle tombe entre o & AΔ; que la seconde racine GI, qui se termine à la branche de, tombe entre Gδ & Gϵ, c'est-à-dire, entre AΔ & AΞ; que la troisiéme racine GK, terminée à la branche ef, tombe entre Gϵ & Gφ, ou entre AΞ & AΦ, & qu'enfin la quatriéme racine GL, terminée à la branche fM, tombe au-delà de Gφ, ou AΦ, c'est-à-dire entre AΦ & ∞ [l'infini]. De sorte que o, AΔ, AΞ, AΦ, ∞ sont des limites entre lesquelles tombent les quatre racines GH, GI, GK, GL.

$$\left\{ \begin{matrix} & GH & & GI & & GK & & GL & \\ o & & A\Delta & & A\Xi & & A\Phi & & \infty \end{matrix} \right\}$$

En menant par les sommets d, e, f, les ordonnées dD,

 eE, fF,

PL. V. eE, fF, il eſt viſible, par l'inſpection de la Figure, 1°. que CH. IV.
ſi la Droite a, à laquelle AG eſt priſe égale, ſe trouve §. 57.
plus petite que AD & plus grande que AE, l'ordonnée GN coupe les quatre branches de la Courbe, & que l'Egalité a quatre racines réelles : 2°. que ſi AG [a] eſt plus petite que AE, GH ne coupe que les deux branches Ad, fM, & que l'Egalité n'a que deux racines réelles, les deux moyennes qui devoient ſe terminer aux branches de, ef, étant devenuës imaginaires : 3°. que ſi AG [a] tombe entre AD & AF, l'ordonnée GN ne coupe que les branches ef, fM ; & il n'y a que les deux plus grandes racines de l'Egalité qui ſoient réelles, les deux plus petites, qui devoient ſe terminer aux branches Ad, & de étant imaginaires : 4°. enfin, que ſi AG [a] ſurpaſſe AF, la Droite GN n'atteint pas la Courbe & que toutes les racines de l'égalité ſont imaginaires.

Toutes ces déterminations dépendent des ordonnées dD, eE, fF, ou AΔ, AΞ, AΦ, & des abſciſſes AD, AE, AF des ſommets d, e, f. Ces abſciſſes & ces ordonnées ſe peuvent déterminer, en conſidérant que dD, eE, fF ſont les limites des branches Ad, de, ef, fM, & qu'elles ſéparent les ordonnées réelles des imaginaires. Donc chaque abſciſſe AD, AE, AF a une ordonnée double ou deux ordonnées égales [§. 17]. Ainſi on trouvera ces abſciſſes en cherchant les valeurs de x qui donnent à l'éq: $x = by + cy^2 + dy^3$ &c. ou $0 = -x + by + cy^2 + dy^3$ &c. des racines doubles, ou égales deux à deux. Mais la Régle de Mr. HUDDE * nous aprend que quand une Egalité a des racines doubles, ſi on multiplie la ſuite bien ordonnée de ſes termes par une progreſſion arithmétique quel-

* Cette Régle ſe trouve parmi les Traités imprimés ordinairement à la ſuite de la *Géométrie de* DES CARTES. Pour éviter au Lecteur la peine d'y recourir, nous en avons joint la Démonſtration dans l'*Appendice* N°. 3.

CH. IV. § 57. quelconque, le produit ſera une autre Egalité qui aura toutes les racines qui étoient doubles dans la propoſée, mais qui ne ſeront que ſimples dans l'Egalité réſultante. Par la comparaiſon de ces deux Egalités, on pourra déterminer les racines doubles qui ſont les ordonnées dD, eE, fF, & conſéquemment les abſciſſes AD, AE, AF. PL. V.

58. Pour faire bien entendre ceci, il eſt néceſſaire d'y joindre quelque détail. Et comme les Egalités du premier dégré n'ont aucune difficulté, prenons-en d'abord une du ſecond, $a = by + cy^2$, ou plutôt $(A) \ldots a = by + y^2$, puiſqu'il eſt ordinaire de réduire la plus haute puiſſance de l'inconnuë à n'avoir que l'unité pour coëfficient. La Courbe repréſentée par l'éq: $x = by + y^2$ étend deux branches à l'infini du côté des abſciſſes poſitives. Car x étant priſe infinie, y le ſera auſſi, puiſque, ſans cela, $by + yy$ ne pourroit égaler x infinie. Mais y étant infinie & b finie, le terme yy ſurpaſſe infiniment le terme by, de ſorte qu'à l'infini l'équation de la Courbe ſe réduit à $x = yy$. Si on prend x poſitive, y a deux valeurs, $+\sqrt{x}$ poſitive & $-\sqrt{x}$ négative. Mais x étant priſe négative, les deux valeurs de y, qui ſont $+\sqrt{-x}$ & $-\sqrt{-x}$ ſont imaginaires. Donc la Courbe a deux branches infinies, du côté des abſciſſes poſitives, & n'en a point du côté des abſciſſes négatives. Sa forme eſt donc à peu près telle qu'on la voit dans la *Fig.* 40. Elle traverſe deux fois l'axe des ordonnées AB, ſçavoir, à l'origine A & au point B, extrémité de l'ordonnée $AB = -b$. Car la ſuppoſition de $x = 0$ donne $0 = by + yy$, qui a deux racines $y = 0$ & $y = -b$. Le point B tombe du côté négatif, ſi b eſt poſitive; du côté poſitif, ſi b eſt négative. *Fig.* 40. *num.* 1. *num.* 2.

On voit dans cette *Figure*, qu'aux abſciſſes poſitives répondent deux ordonnées, l'une poſitive & l'autre négative;

Pl. V. ve, mais que les abſciſſes négatives ont deux ordonnées Ch. IV. imaginaires, ſi l'abſciſſe ſurpaſſe AD; réelles, ſi l'abſciſſe §. 58. eſt plus petite que AD; & dans ce dernier cas, négatives, ſi b eſt poſitive [n°. 1], poſitives, ſi b eſt négative [n°. 2].

L'abſciſſe AD, qu'il eſt eſſentiel de connoitre, eſt celle qui a une ordonnée double Dd. On la déterminera en multipliant l'éq : $o = -x + by + yy$ par une progreſſion arithmétique, telle que o, 1, 2; ce qui donne $o = by + 2yy$, ou $o = b + 2y$, ſoit enfin $y = -\frac{1}{2}b$. Dd ou AΔ vaut donc $-\frac{1}{2}b$. Et au moyen des deux éq: $x = by + yy$, & $y = -\frac{1}{2}b$, on trouve AD $[x] = -\frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}bb = -\frac{1}{4}bb$.

Puis donc qu'en prenant l'abſciſſe AG égale à a, les ordonnées GH, GI ſont les racines de l'Egalité (A) . . $a = by + yy$, on voit

1°. Que ſi a eſt poſitive, l'Egalité A a deux racines réelles, une poſitive & une négative, dont la plus grande eſt celle qui a le ſigne contraire à celui de b. Elles ſont égales, ſi $b = o$.

2°. Que ſi a eſt négative, mais plus petite que $-\frac{1}{4}bb$ [AD], l'Egalité A a encore deux racines réelles, de même ſigne, contraire à celui de b, & dont l'une eſt plus grande, l'autre plus petite que $-\frac{1}{2}b$ [Dd].

3°. Que ſi $a = -\frac{1}{4}bb$, l'Egalité A a deux racines égales, ou une racine double égale à $-\frac{1}{2}b$.

4°. Enfin que ſi a eſt plus négative que $-\frac{1}{4}bb$, les deux racines de A ſont imaginaires; & c'eſt ce qui arrive néceſſairement quand $b = o$, & $a < o$.

Cela étoit aſſez connu par la Réſolution ordinaire des Egalités du 2d. dégré. Et il eſt, ſans doute, plus à propos de réſoudre ces Egalités par le moyen du Cercle, que par la Courbe qu'on vient d'examiner. Mais on a crû qu'il n'étoit pas inutile d'appliquer le Principe du §. 57. à ce

CH. IV. §. 58. ce Cas simple. On en aura plus de facilité à comprendre l'application qu'on en peut faire aux dégrés supérieurs. PL. V.

59. Soit maintenant l'Egalité (B)... $a = by + cy^2 + y^3$ du 3e. dégré. La Courbe que représente l'éq: $x = by + cy^2 + y^3$ a deux Branches qui se jettent à l'infini de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Car x infinie donnant aussi y infinie, l'équation de la Courbe à l'infini se réduit à $x = y^3$, parce que les termes by & cyy sont infiniment plus petits que y^3, vis-à-vis duquel ils s'évanouïssent. Cette éq: $x = y^3$ n'a qu'une racine réelle $y = \sqrt[3]{x}$, qui est positive quand x est positive, & négative quand x est négative.

La Courbe traverse l'Axe des ordonnées en autant de points qu'a de racines l'Eg: $o = by + cy^2 + y^3$, à quoi se réduit la proposée B par la supposition de $x = o$. Or cette Egal: $o = by + cyy + y^3$ a une racine $y = o$, qui marque que la Courbe passe par l'Origine: Ses deux autres racines sont celles de l'Egal. $o = b + cy + yy$, ou $-b = cy + yy$, qui peuvent être réelles ou imaginaires. Elles sont réelles, si $-b$ est positive [§ *préc. n°.* 1], c'est-à-dire, si b est négative, & alors l'une a le signe + & l'autre le signe —. Donc, en ce cas, la Courbe traverse l'Axe des ordonnées dessus & dessous l'Origine A. Ces racines sont aussi réelles quand b est positive, pourvû qu'elle ne surpasse pas $\frac{1}{4}cc$ [§. *pr. n°.* 2], & alors elles ont toutes deux un même signe contraire à celui de c; de sorte que c étant négative, la Courbe traverse deux fois l'Axe des ordonnées au-dessus de l'Origine, & c étant positive, la Courbe coupe deux fois l'Axe des ordonnées au-dessous de l'Origine. Si b est égale à $\frac{1}{4}cc$, les deux racines sont égales à $-\frac{1}{2}c$ [§. *pr. n°.* 3], & la Courbe, au lieu de couper l'Axe des ordonnées, le touche à l'extrémité de l'ordonnée $-\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, au-dessus d'A, si c est négative, & au-

Fig. 41. *num.* 1. *num.* 2. *num.* 3. *num.* 4.

PL. V. Fig. 41. num. 5. num. 6.7. 8. 9. 10. au-dessous d'A, si c est positive. Mais si $b > \frac{1}{4}cc$, les racines de l'Egal: $-b = cy + yy$ sont imaginaires, & la Courbe ne rencontre l'Axe des ordonnées qu'à l'Origine. CH. IV. §. 59.

Les sommets d, e, se déterminent en multipliant les termes de l'éq: $0 = -x + by + cyy + y^3$ par la progr. arithm: 0, 1, 2, 3; ce qui réduit cette équation à (H)... $0 = by + 2cyy + 3y^3$, ou $-\frac{1}{3}b = \frac{2}{3}cy + yy$, dont les racines expriment les ordonnées dD, eE, des sommets D, E. On aura leurs abscisses AD, AE, en cherchant x par le moyen des deux équations H, & $0 = -x + by + cyy + y^3$, ce qui donne l'Egalité (I)... $27xx + 18bcx - 4c^3x + 4b^3 - bbcc = 0$.

Il seroit aisé de déterminer ces abscisses, & par là, les limites qui rendent réelles ou imaginaires les racines de B, en résolvant l'Egal: I, qui n'est que du second dégré. Mais, pour montrer comment il faut s'y prendre dans les Egalités des ordres supérieurs, nous n'essayerons pas de résoudre cette Egal. I: nous supposerons seulement qu'on sait, au moyen des Remarques du §. préc. discerner par les coëfficients de cette Egalité, si ces racines sont imaginaires ou réelles, & dans ce dernier cas, si elles sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, ou l'une positive & l'autre négative.

Pour cet effet, on donnera à l'Egal: I cette forme $\frac{bbcc - 4b^3}{27} = \frac{18bc - 4c^3}{27}x + xx$, sous laquelle on voit [§. *préc.* n°. 4] que ses deux racines sont imaginaires, lorsque $\frac{bbcc - 4b^3}{27}$ est plus négative que $-\frac{1}{4}(\frac{18bc - 4c^3}{27})^2$, c'est-à-dire, lorsque $108b^3 - 27bbcc > 81bbcc - 36bc^4 + 4c^6$, ou $108b^3 - 108bbcc + 36bc^4 - 4c^6 > 0$, ce qui, divisant par 4 & tirant la racine cubique, se réduit à $3b - cc > 0$. Ainsi

1°. Quand

Ch. IV. §. 59. 1°. Quand $b > \frac{1}{3}cc$, il y a deux racines de l'Egal. *B* qui sont imaginaires, parce que les abscisses AD, AE, les sommets d, e, & la branche e d qui s'y termine étant imaginaires, la Courbe a, à peu près, la forme qu'on voit au *n°*. 10 de la *Fig.* 41, & qu'elle ne peut être coupée qu'en un seul point par l'ordonnée GH. On trouveroit la même chose, en considérant que les sommets d, e sont imaginaires quand leurs ordonnées D d, E e, sont imaginaires. Car ces ordonnées sont les racines de l'Egal. *H*... $-\frac{1}{3}b = \frac{2}{3}cy + yy$, qui sont imaginaires [§. *pr. n°*. 4] quand $-\frac{1}{3}b$ est plus négative que $-\frac{1}{4}(\frac{2}{3}c)^2 = -\frac{1}{9}cc$, c'est-à-dire, quand $b > \frac{1}{3}cc$. Pl. V.

2°. Si $b = \frac{1}{3}cc$, alors $\frac{bbcc - 4b^3}{27} = -\frac{1}{4}(\frac{18bc - 4c^3}{27})^2$, & les racines AD, AE de l'Eg. *I* sont égales entr'elles & à $-\frac{1}{2}(\frac{18bc - 4c^3}{27}) = -\frac{1}{27}c^3$ [§. *pr. n°*. 3]. De même $-\frac{1}{3}b = -\frac{1}{4}(\frac{2}{3}c)^2$, & les racines D d, E e de l'Eg. *H* sont égales entr'elles & à $-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}c) = -\frac{1}{3}c$. Dans ce cas, les deux sommets d, e, sont réunis en un point, auquel se réduit la branche e d. Ce point a son abscisse AD égale à $-\frac{1}{27}c^3$ & son ordonnée D d égale à $-\frac{1}{3}c$. *Fig.* 41. *n.* 8. & 9.

Donc, si AG [a] est plus grande ou plus petite que AD [$-\frac{1}{27}c^3$], GH ne coupe la Courbe qu'en un point; l'Eg. *B* n'a qu'une racine réelle.

Si AG [a] est égale à AD [$-\frac{1}{27}c^3$], GH passera par le point e ou d, & est censée y rencontrer trois fois la Courbe: si bien que l'Eg. *B* réduite à $-\frac{1}{27}c^3 = \frac{1}{3}ccy + cyy + y^3$, ou $y^3 + cyy + \frac{1}{3}ccy + \frac{1}{27}c^3 = 0$, a trois racines égales entr'elles & à $-\frac{1}{3}c$ [D d]. En effet $y^3 + cyy + \frac{1}{3}ccy + \frac{1}{27}c^3 = 0$ n'est autre chose que le Cube de l'Egal: $y + \frac{1}{3}c = 0$, ou $y = -\frac{1}{3}c$.

3°. Si $b < \frac{1}{3}cc$, la Courbe a trois branches, & l'Eg. *B* peut avoir trois racines réelles. Mais il faut pour cela que

PL. V. AG [a] tombe entre AD & AE, qui sont les racines de l'Eg. *I*. Nommant ces racines R & r, il faut que des deux grandeurs $R - a$, $r - a$, l'une soit positive & l'autre négative. Or, pour juger quand cela arrive, on transformera l'Eg. *I* en diminuant ses racines de la grandeur a, c'est-à-dire, en substituant z à $x - a$, ou $z + a$ à x. La transformée est $27zz + 54az + 27aa + 18bcz + 18abc - 4c^3z - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc = 0$, ou $-\frac{27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc}{27} = \frac{54a + 18bc - 4c^3}{27} z + zz$, dont les racines ont des signes opposés [§. *préc. n°*. 1.] quand le premier membre est positif, c'est-à-dire, quand $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc$ est négative. Cette grandeur, que nous nommerons K, est justement le premier membre de l'Eg. *I*, transformé par le changement d'x en a. Si cette grandeur K est zéro, une des racines z, c'est-à dire, $R - a$, ou $r - a$ est aussi zéro, le point G tombe sur D ou sur E. Mais si K est positive, les deux racines $R - a$, $r - a$ ont le même signe, AG est ou plus grande, ou plus petite que AD & que AE, le point G tombe hors des limites D, E. Donc b étant $< \frac{1}{3}cc$, CH. IV. §. 59.

Fig. 41. n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 1) Si $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc > 0$, l'Egal: *B* a deux racines imaginaires, & une réelle, parce que G tombant hors des limites E, D, l'ordonnée GH ne coupe la Courbe qu'en un point.

2) Si $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc = 0$, G tombe sur D ou sur E, & l'ordonnée GH touche la Courbe en d ou e, & la coupe en un autre point. L'Egal: *B* a donc deux racines égales & une inégale. La valeur des racines égales, qui est Dd, ou Ee, se détermine au moyen des deux Egal: *B* & *H*; elle est $\frac{9a + bc}{6b - 2cc}$: & la racine inéga-

Ch. IV. §. 59. inégale eſt $(\frac{6b - 2cc}{9a + bc})^2 a$. Pl. V.

3) Si $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc < 0$, G tombant entre D & E, l'ordonnée GH coupe la Courbe en trois points, & l'Eg: B a trois racines réelles.

Après avoir reconnu ſi les racines de B ſont réelles ou imaginaires, on s'aſſurera aiſément ſi elles ſont poſitives ou négatives.

Car l'Eg: B a eſſentiellement une racine du même ſigne que le terme a [AG]. Puiſque dans l'éq: $x = by + cyy + y^3$, x ne monte qu'au prémier dégré, la Courbe ne rencontre l'Axe des abſciſſes qu'à l'Origine A [§. 41], d'où elle pouſſe deux Branches infinies de part & d'autre. Ainſi chaque abſciſſe AG [a], poſitive ou négative, aura toûjours une ordonnée GH [y] de même ſigne. Donc

1°. Si l'Eg: B n'a qu'une ſeule racine réelle, on connoît quel eſt ſon ſigne par celui du terme a. Il en eſt de même ſi B a trois racines égales; ce qu'on peut regarder comme n'avoir qu'une racine, mais triple.

Quand les deux autres racines de B ſont réelles, elles ont un même ſigne, qui eſt celui de l'ordonnée Dd, ou de l'ordonnée Ee. Autrement, il faudroit que la Courbe coupât l'Axe des abſciſſes ailleurs qu'en A. Donc

2°. Si Dd & Ee ont un même ſigne, ce ſera auſſi le ſigne de deux racines de l'Eg. B. Or Dd & Ee qui ſont les racines de l'Eg. $H \ldots -\frac{1}{3}b = \frac{2}{3}cy + yy$, ont un même ſigne [§. *pr.* *n°*. 2] quand $-\frac{1}{3}b$ eſt négative mais moins que $-\frac{1}{4}(\frac{2}{3}c)^2 = -\frac{1}{9}cc$, c'eſt-à-dire, quand $b < \frac{1}{3}cc$. Leur ſigne eſt contraire à celui de $\frac{2}{3}c$, ou de c. Donc, quand B a trois racines réelles, b étant poſitive [& il faut pour cela que $b < \frac{1}{3}cc$, ſans quoi deux racines de B ſeroient imaginaires], cette Egalité a une racine de même ſigne qu'a, & deux racines d'un ſigne contraire à celui de c. Fig. 41. n. 2.3.4. 5.6.7.

PL. V. Mais 3°. si B a trois racines réelles, b étant négative, elle a une racine de même signe que a, & les deux autres d'un signe contraire. Ce cas est celui de la *Fig.* 41. *n°.* 1, où AG [a] positive donne une racine positive GH & deux négatives GI, GK, & au contraire AG [a] négative donne deux racines positives & une négative. Ce qui s'acorde très-bien avec la Régle de DES CARTES, pour connoître le nombre des racines positives & des négatives par le nombre des changemens & des successions des signes de ses termes. CH. IV. §. 59.

On aura tout ceci devant les yeux dans la Table suivante.

I. $b > \frac{1}{3}cc$, donne deux Racines imaginaires, & une réelle de même signe qu'a.

II. $b = \frac{1}{3}cc$, donne

1°. Si $a >$ ou $< -\frac{1}{27}c^3$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même signe qu'a.

2°. Si $a = -\frac{1}{27}c^3$, trois Rac. réelles égales à $-\frac{1}{3}c$.

III. b positive & $< \frac{1}{3}cc$, donne, en faisant $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc = K$,

1°. Si $K > 0$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même signe qu'a.

2°. Si $K = 0$, deux Rac: égales à $\frac{9a + bc}{6b - 2cc}$, & une égale à $\left(\frac{6b - 2cc}{9a + bc}\right)^2 a$.

3°. Si $K < 0$, trois Rac: réelles, une de même signe qu'a, & deux d'un signe contraire à celui de c.

IV. $b = 0$, donne, puisqu'en ce cas, $K = 27aa - 4ac^3$,

1°. Si $27aa > 4ac^3$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même signe qu'a.

2°. Si $27aa = 4ac^3$, ou $a = \frac{4}{27}c^3$, deux Rac. égales à $-\frac{1}{3}c$, & une égale à $\frac{1}{3}c$.

3°. Si

CH. IV. §. 59. 3°. Si $27aa < 4ac^3$, trois Racines réelles, une de même signe qu'a, & deux de signe contraire. PL. V.

V. b négative donne

1°. Si $K > 0$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même signe qu'a.

2°. Si $K = 0$, deux Rac. égales à $\frac{9a + bc}{6b - 2cc}$, & une égale à $(\frac{6b - 2cc}{9a + bc})^2 a$.

3°. Si $K < 0$, trois Rac. réelles, une de même signe qu'a, & deux de signe contraire.

Il est facile de réduire une Egalité du troisiéme dégré, $a = by + cyy + y^3$, à n'avoir point de second terme, & à paroître sous cette forme $a = \beta u + u^3$. Il ne faut pour cela que substituer $u - \frac{1}{3}c$ à y. Alors il ne s'agit que de voir si $27aa + 4\beta^3$ est positive, zéro, ou négative. Si elle est positive, ce qui ne peut manquer d'être quand β est positive ou zéro; l'Egalité n'a qu'une Racine réelle de même signe que a. Si $27aa + 4\beta^3$ est zéro; l'Egalité a deux racines égales à $\frac{3a}{2\beta}$, & une troisiéme égale à $-3\frac{a}{\beta}$. Si $27aa + 4\beta^3$ est négative; l'Egalité a trois racines réelles, une du même signe que a, & deux du signe contraire.

60. POUR dire aussi quelque chose des Egalités du quatriéme dégré, soit $(C) \ldots a = by + cy^2 + * + y^4$, où pour abréger le Calcul, nous supposons qu'on ait fait disparoître le second terme. L'éq: $(L) \ldots x = by + cy^2 + y^4$ réprésente une Courbe à deux Branches, qui s'étendent à l'infini du côté des abscisses positives. Car à l'infini, son équation est $x = y^4$, qui a quatre racines $+\sqrt{+\sqrt{x}}$, $-\sqrt{+\sqrt{x}}$, $+\sqrt{-\sqrt{x}}$, $-\sqrt{-\sqrt{x}}$, qui sont toutes Fig. 42.

PL. V. toutes imaginaires quand x eſt négative, & dont les deux dernières le ſont auſſi, même quand x eſt poſitive. Alors les deux prémiéres ſont réelles, & montrent qu'une abſciſſe infinie poſitive a deux ordonnées infinies, l'une poſitive, l'autre négative. La Courbe a donc, du côté des abſciſſes poſitives, deux Branches infinies, l'une ſupérieure, l'autre inférieure à l'Axe des abſciſſes. Mais elles peuvent ſerpenter près de l'Origine, de maniére qu'on comptera quatre branches. Pour en déterminer, en gros, le contour, voyons d'abord en quels points la Courbe rencontre l'Axe des ordonnées : car pour celui des abſciſſes, il eſt certain qu'elle ne le rencontre qu'en A, puiſque dans l'éq: L, x ne monte qu'au prémier dégré [§. 41]. CH. IV. §. 60.

Si dans cette éq: L, on fait $x = 0$, elle ſe réduit à $0 = by + cy^2 + y^4$, ou $(M) \ldots . - b = cy + y^3$, qui peut avoir trois racines réelles, ou deux imaginaires & une réelle. Elle a trois racines réelles quand $27bb + 4c^3$ eſt négative [§. *préc.*]. Alors la Courbe rencontre l'Axe des ordonnées en trois points, ſans compter l'Origine. De ces trois racines, une a le même ſigne que $-b$, les deux autres ont un ſigne contraire. Donc, b étant poſitive, la Courbe coupe deux fois ſon Axe au-deſſus de l'Origine
Fig. 42. num. 1. & une fois au-deſſous : mais b étant négative, elle coupe l'Axe une fois au-deſſus & deux fois au-deſſous de l'Ori-
num. 2. gine. Si $27bb + 4c^3 = 0$, l'Egal : M a deux racines égales à $-\frac{3b}{2c}$, & une troiſiéme égale à $\frac{3b}{c}$. Dans ce
n. 3. & 4. cas, la Courbe touche ſon Axe d'un côté, & le coupe de l'autre à une diſtance double. Enfin, ſi $27bb + 4c^3$ eſt poſitive, M n'a qu'une ſeule racine réelle de même ſigne
n. 5. & 7. que $-b$. Ainſi la Courbe ne coupe ſon Axe qu'en un point ; au-deſſous de l'Origine, ſi b eſt poſitive ; au-deſ-
n. 6. & 8. ſus, ſi b eſt négative.

Il

CH. IV. §. 60. Il faut maintenant déterminer les sommets d, c, f. On multipliera donc l'éq : $(L) \ldots\ 0 = -x + by + cyy * + y^4$ par la progr. arithm : 0, 1, 2, 3, 4, ce qui la transforme en $0 = by + 2cyy * + 4y^4$, ou $(N) - \frac{1}{4}b = \frac{1}{2}cy * + y^3$, dont les racines sont les ordonnées dD, eE, fF des sommets. Ainsi deux de ces sommets, par exemple, d & e, & par conséquent deux branches ed, df de la Courbe deviennent imaginaires, quand deux racines de l'Egal. N sont imaginaires, c'est-à-dire, quand $\frac{1}{2}c$, ou c, & $27(\frac{1}{4}b)^2 + 4(\frac{1}{2}c)^3 = \frac{27bb + 8c^3}{16}$, ou $27bb + 8c^3$ sont positives [§. *prec.*]. C'est le Cas représenté aux *n°*. 7 & 8 de la *Fig.* 42, & alors la racine réelle fF est du même signe que $-\frac{1}{4}b$, c'est-à-dire, négative quand b est positive, & positive quand b est négative. PL. V.

Fig. 42. *num.* 7. *num.* 8.

Qu'au moyen des éq : L & N, on élimine y, on aura $(O) \ldots\ 64x^3 + 32ccxx + 36bbcx + 4c^4x + \frac{27}{4}b^4 + bbc^3 = 0$, dont les racines R, r, ρ sont les abscisses AD, AE, AF des sommets d, e, f. Ces abscisses sont les limites des valeurs de a [AG] qui donnent à l'Eg : C des racines réelles ou imaginaires. Car si G tombe du côté négatif au-delà de F, l'Eg : C n'aura que des racines imaginaires : Si G tombe entre F & E, l'Eg : C aura deux racines réelles & deux racines imaginaires : Si G tombe entre E & D, l'Eg : C aura quatre racines réelles. Mais elle n'en aura plus que deux, si G tombe au-delà de D du côté positif.

Donc, si R est la plus grande AD, r la moyenne AE, & ρ la plus petite AF des racines de O, l'Eg : C n'aura que des racines imaginaires, si $R - a$, $r - a$, & $\rho - a$ sont positives : Elle aura deux racines réelles & deux imaginaires, si $R - a$ & $r - a$ sont positives, & $\rho - a$ négative, ou si $R - a$, $r - a$, & $\rho - a$ sont négatives : Enfin, elle aura ses quatres racines réelles, si $R - a$ est

 positi-

PL. V. poſitive, mais $r - a$, & $p - a$ négatives. Donc ſubſtituant, dans l'Eg: O, z au lieu de $x - a$; ou $z + a$ au lieu d'x, l'Egal: C aura quatre racines imaginaires, ſi toutes les racines z de la transformée ſont poſitives: elle aura deux racines réelles & deux imaginaires, ſi une ou trois racines z ſont négatives: & elle aura ſes quatre racines réelles, ſi la transformée a deux racines z négatives & une poſitive. CH. IV. §. 60.

Par la ſubſtitution de $z + a$ à x, l'Eg: O ſe transforme en $64z^3 + (192a + 32cc)zz + (192aa + 64acc + 36bbc + 4c^4)z + 64a^3 + 32aacc + 36abbc + 4ac^4 + \frac{27}{4}b^4 + bbc^3 = 0$, ou $-a^3 - \frac{1}{2}aacc - \frac{9abbc + ac^4}{16} - \frac{\frac{27}{4}b^4 + bbc^3}{64} = (3aa + acc + \frac{9bbc + c^4}{16})z + (3a + \frac{1}{2}cc)zz + z^3$, que pour abréger, nous écrirons ainſi $(P) \ldots \alpha = \beta z + \gamma zz + z^3$.

Suppoſons d'abord que cette Egal: P a ſes trois racines réelles; & ſi β eſt poſitive, elle a [§. *préc.*] une racine du même ſigne que α & deux racines d'un ſigne contraire à γ. Mais ſi β eſt négative, P a une racine du même ſigne que α & deux racines d'un ſigne contraire. Donc, P ayant ſes trois racines réelles, ſi α & β ſont poſitives, & γ négative, les trois racines de P ſont poſitives, & celles de l'Eg: C ſont imaginaires: ſi α eſt négative mais β & γ poſitives, les racines de P ſont toutes négatives, & C en a deux réelles & deux imaginaires: ce qui arrive auſſi lorſque P a deux racines poſitives & une négative, c'eſt-à-dire, quand α & β ſont négatives, ou quand α eſt négative, β poſitive, & γ négative: enfin ſi α eſt poſitive & β négative, ou ſi α, β, & γ ſont poſitives, P a deux racines poſitives & une négative, ce qui marque que les quatre racines de C ſont réelles. Pour récapituler, α négative

CH. IV. §. 60. gative donne deux racines réelles & deux imaginaires : Et PL. V.
α positive donne quatre racines imaginaires, si β est positive & γ négative : mais elle en donne quatre réelles, si β est négative, ou si β & γ sont positives.

Mais si l'Eg : *P* a deux racines imaginaires, les abscisses AD, AE des sommets d, e deviennent imaginaires, & la Courbe ne conserve que le sommet f. Les ordonnées Fig. 42. n. 7. & 8. dD, eE sont donc aussi imaginaires, & nous avons déja vû que cela arrive, quand c, ou quand $27bb + 8c^3$ sont positives. Alors l'Egal : *C* ne peut avoir que deux racines réelles. Elles seront même toutes quatre imaginaires si a est plus négative que la seule racine *R* [AF] de l'Egal : *O*, si $R - a$ est positive. Or cette racine de l'Egal : *P* a le même signe que le terme α. Donc si deux racines de *P* sont imaginaires ; α négative donne à *C* deux racines réelles, mais α positive rend les quatre racines de *C* imaginaires.

Pour connoître quels sont les signes des racines de *C*, on verra d'abord en jettant les yeux sur la *Fig.* 42, que quand ses quatre racines sont réelles, a étant négative, il y en a deux positives & deux négatives : mais a étant positive, on a trois racines positives & une négative, si b n. 1. & 2. est positive, & au contraire trois racines négatives & une n. 1. 3. 5. positive, si b est négative. Ce qui s'accorde avec la Régle de DES CARTES, puisque, dans le cas des quatre n. 2. 4. 6. racines réelles, c doit être négative.

Mais quand *C* n'a que deux racines réelles, on voit que a positive suppose nécessairement une racine positive n. 1. 2. 3. & une négative : & que a négative donne deux racines 4. 5. 6. 7. 8. négatives, si b est positive, & deux racines positives, si b n. 1. 3 5. 7. est négative. n. 2. 4 6. 8.

On pourroit, en suivant les mêmes principes, passer aux Egalités du cinquiéme dégré. Mais le calcul de l'Egalité générale seroit fort long. Il est plus traitable dans

O 2 les

PL. VI. les cas particuliers. D'ailleurs cette ſpéculation nous a déjà retenu peut-être trop long-tems. Il eſt tems de paſſer à d'autres recherches qui ont un raport plus immédiat à l'Analyſe des Courbes. CH. IV. §. 60.

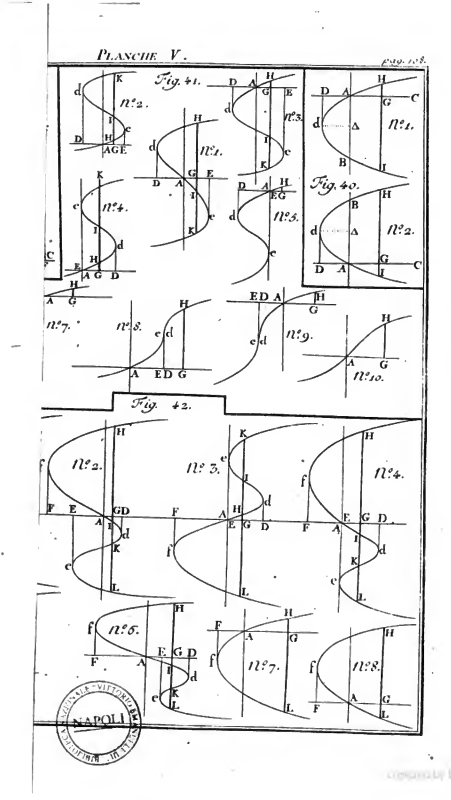
CHAPITRE V.

Valeur du produit de toutes les ordonnées d'une même abſciſſe.

61. NOTRE deſſein eſt de faire voir comment l'Analyſe découvre dans l'équation d'une Courbe ſes principales propriétés. Voici un Théoréme fort général, & qui peut ſervir utilement dans cette recherche *.

Fig. 43. Une Courbe QMSLRN de l'ordre v étant repréſentée par une équation, dont le premier terme, lorſqu'elle eſt ordonnée par y, ſoit $(\alpha x^{s} + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \&c.) y^{v-s}$, & le dernier $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} + Cx^{v-t-2}$ *&c.* Je dis que l'Axe des abſciſſes AP coupant la Courbe aux points Q, R, S, &c. ſi on prend dès l'origine A les parties AT, AV, AX &c. égales aux racines de l'éq : $\alpha x^{s} + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \&c. = 0$, & qu'on méne une ordonnée quelconque LN qui rencontre la Courbe en L, M, N &c. le produit des ordonnées PL, PM, PN &c. de l'abſciſſe AP ſera à la fraction $\frac{PQ \times PR \times PS \ \&c.}{PT \times PV \times PX \ \&c.}$ en raiſon donnée de A à α, c'eſt-à-dire,

* NEWTONI *Enumer. linear. 3i. ordinis.* §. II. 3. 4. STIRLINO, *Lineæ tertii ordinis* Newtonianæ, pag. 76–79. Mr. DE GUA, *Uſage de l'Anal.* pag. 68.


Fig. 41.
Fig. 40.
Fig. 42.
N.° 1.
N.° 2.
N.° 3.
N.° 4.
N.° 5.
N.° 6.
N.° 7.
N.° 8.
N.° 9.
N.° 10.

CH. V. §. 61. dire, comme le coëfficient de la plus haute puissance de x dans le dernier terme, au coëfficient de la plus haute puissance de x dans le premier terme. PL. VI.

Démonstration. Si l'on divise l'équation de la Courbe par le coëfficient $\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2}$ &c, pour lui donner cette forme $y^{v-s} \ldots . + \frac{Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} \text{ \&c.}}{\alpha x^s + \beta x^{s-1} \text{ \&c.}}$ $= 0$, où le premier terme y^{v-s} n'a point d'autre coëfficient que l'unité, le produit de toutes les racines de cette équation, c'est-à-dire le produit PL × PM × PN &c. des ordonnées, est égal au dernier terme $\frac{Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} \text{ \&c}}{\alpha x^s + \beta x^{s-1} \text{ \&c}}$

Or le numérateur de cette fraction est égal à $A \times PQ \times PS \times PT$, &c, & le dénominateur à $\alpha \times PT \times PV \times PX$ &c.

Car les points Q, R, S, &c. où une Courbe rencontre son Axe des abscisses, se déterminent en faisant $y = 0$ dans son équation [§. 15]. Mais cette supposition de $y = 0$ réduit l'équation à son dernier terme $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}$ &c $= 0$, & les racines de cette équation sont les abscisses AQ, AR, AS, &c. qui ont quelque ordonnée égale à zéro. Divisant donc cette équation par A, afin que le premier terme soit pur; $x^{v-t} + \frac{B}{A} x^{v-t-1}$ &c. sera le produit de $(x - AQ)$ par $(x - AR)$ par $(x - AS)$ &c. c'est-à-dire, de $(AP - AQ)$ par $(AP - AR)$ par $(AP - AS)$ &c. ou de PQ par PR par PS &c. Donc multipliant le tout par A, $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}$ &c. est égal au produit $A \times PQ \times PR \times PS$ &c.

De même, puisque AT, AV, AX &c. sont les racines

 de

PL. VI. de l'éq : $\alpha x^s + \beta x^{s-1}$ &c $= 0$, ou, divisant par α, de CH. V. §. 61;
$x^s + \frac{\beta}{\alpha} x^{s-1}$ &c $= 0$; le premier membre $x^s + \frac{\beta}{\alpha} x^{s-1}$ &c. est le produit de (x — AT) par (x — AV) par (x — AX) &c, c'est-à-dire, de (AP — AT) par (AP — AV) par (AP — AX) &c, ou de PT par PV par PX &c. Donc multipliant par α, $\alpha x^s + \beta x^{s-1}$ &c. est égal à $\alpha \times$ PT $\times$ PV $\times$ PX &c.

Ainsi, puisque PL $\times$ PM $\times$ PN &c. est égal à $\frac{Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} \ \&c}{\alpha x^s + \beta x^{s-1} \ \&c}$; que $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}$ &c est égal à $A \times$ PQ $\times$ PR $\times$ PS &c; & que $\alpha x^s + \beta x^{s-1}$ &c. est égal à $\alpha \times$ PT $\times$ PV $\times$ PX &c; il suit que PL $\times$ PM $\times$ PN &c. est égal à $\frac{A \times PQ \times PR \times PS \ \&c}{\alpha \times PT \times PV \times PX \ \&c}$; ou que PL $\times$ PM $\times$ PN &c. est à $\frac{PQ \times PR \times PS \ \&c}{PT \times PV \times PX \ \&c}$, comme A à α.

L'application de ce Théoréme aux divers cas qu'il renferme en fera voir la fécondité.

62. SOIT $ayy + (bx + cc)y + dxx + eex + f^3 = 0$, l'équation générale des Lignes du troisiéme Ordre.

Fig. 44. I. 1. L'abscisse AP & l'ordonnée PL ne peuvent couper la Courbe chacune qu'en deux points, Q, R & L, M [§. 41]. Alors, par le Théoréme préced. le rectangle PL $\times$ PM des ordonnées est au rectangle PQ $\times$ PR des parties de l'abscisse, en raison donnée de d à a, puisqu'ici $d = A$ & $a = \alpha$.

Par la même raison, si l'on méne une autre ordonnée lpm, le rectangle pl $\times$ pm est au rect : pQ $\times$ pR, comme d à a, ou comme le rect : PL $\times$ PM au rect : PQ $\times$ PR. On

Ch. V. §. 62. On peut regarder lm comme l'Axe des abſciſſes, & menant qr paralléle à QR, qui coupe lm en p, on aura $pl \times pm$ à $pq \times pr$ comme pl × pm à pQ × pR. Pl. VI.

Donc enfin $pl \times pm$ eſt à $pq \times pr$ comme PL × PM à PQ × PR.

Ce qui revient à dire, que ſi on méne par un point p deux droites lm, qr paralléles à deux autres droites LM, QR menées par un point P, & que ces quatre droites coupent chacune en deux points une Ligne du ſecond Ordre ; le rectangle lpm des parties de la prémiére droite eſt au rectangle qpr des parties de la ſeconde droite, comme le rectangle LPM des parties de la troiſiéme eſt au rectangle QPR des parties de la quatriéme.

2. Si l'abſciſſe ap, au lieu de couper la Courbe en deux points, la touche en un ſeul q ; on doit concevoir qu'en ce ſeul point de contact q ſont réünis & confondus les deux points de ſection q, r ; en ſorte que les deux parties pq, pr étant devenuës égales, leur produit eſt un quarré pq^2, auquel le rect : LpM des ordonnées eſt en raiſon donnée de d à a. Fig. 45.

De même, ſi on méne l'ordonnée pl qui touche la Courbe en l, on concevra réünis en ce point les deux points de ſection L, M, & le rectangle LpM eſt devenu un quarré pl^2, qui eſt au quarré pq^2 en raiſon donnée de d à a.

3. S'il arrive que l'éq : $dxx + eex + f^3 = 0$ n'ait que des racines imaginaires, la Ligne des abſciſſes $a\pi$ ne rencontre point la Courbe, les points de ſection Q, R, qui ſeroient déterminés par cette équation [§. 15] étant imaginaires. Le Théoréme ne laiſſe pourtant pas de ſe ſoutenir. Car il eſt toûjours vrai que le rect : $\pi L \times \pi M$ des ordonnées eſt égal à $\frac{dxx + eex + f^3}{a}$, ou $\frac{d}{a}(xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d})$. Mais

cette

PL. VI. cette quantité $xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}$ ne sera plus un rectangle CH. V. §. 62.
QPR, qui seroit la différence de deux quarrés KQ^2 & KP^2 [en divisant QR par le milieu en K]. Elle sera la somme de deux quarrés, $(x + \frac{ee}{2d})^2$ & $(\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd})$. Qu'on prenne donc, dès l'Origine α, une abscisse αB égale à $-\frac{ee}{2d}$; qu'on éléve la perpendiculaire indéfinie BC, & qu'on la coupe en C par le Cercle décrit du centre α avec un raïon $\alpha C = \sqrt{\frac{f^3}{d}}$; ce qui donne $BC = \sqrt{(\alpha C^2 - \alpha B^2)} = \sqrt{(\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd})}$, & on aura $\pi C^2 = \pi B^2 + BC^2 = (x + \frac{ee}{2d})^2 + (\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd}) = xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}$. Donc, puisque le rect: $\pi L \times \pi M$ est $= \frac{d}{a}(xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d})$, ce rect: $L\pi M$ est au quarré πC^2 en raison donnée de d à a.

II. Tout le reste subsistant, si la grandeur f est égale à zéro, l'éq: $dxx + eex = 0$, faite en égalant le dernier terme à zéro, aura une racine $x = 0$. L'Origine tombe donc sur un des deux points Q, R de la Courbe. Ce qui ne change rien aux Conclusions précédentes.

III. Mais si c'est e qui est $= 0$, l'éq: $dxx + f^3 = 0$ a deux racines réelles, si d & f ont différents signes, & deux racines imaginaires si d & f ont le même signe. Dans le premier cas, l'Origine est au point K qui divise QR en deux également. Dans le second, l'abscisse $\alpha\pi$ ne rencontre point la Courbe, & c'est le Cas du n°. I. 3 : mais au lieu du point C il faut prendre le point D, sur la perpendiculaire αD, éloigné de l'Origine α d'une distance $\alpha D = \sqrt{f^3}$.

Ch. V. §. 62. $\sqrt{\frac{f^3}{d}}$, parce qu'ici αB $[-\frac{ee}{2d}]$ dévient nulle. On aura donc le rect: LπM au quarré πD^2 en raison donnée de d à a. Pl. VI.

IV. Si d seulement est égale à zéro, l'équation de la Courbe étant $ayy + (bx + cc)y + eex + f^3 = 0$, les ordonnées PL peuvent bien couper la Courbe en deux points L, M; mais les abscisses ne la coupent qu'en un seul point Q [§. 41]. Alors le rect: PL×PM est égal à $\frac{A}{\alpha}$PQ$=\frac{ee}{a}\times$PQ; puisque $A = ee$, & $\alpha = a$. Si on porte donc l'Origine en Q, le rectangle LPM des ordonnées est égal au rectangle de l'abscisse PQ par une Droite constante $\frac{ee}{a}$, troisiéme proportionelle de a à e. Fig. 46.

V. Si d & e, égales chacune à zéro, réduisent l'équation à $ayy + (bx + cc)y + f^3 = 0$, l'Axe des abscisses ne rencontrera point la Courbe & le rect: LPM des ordonnées est une grandeur constante $\frac{f^3}{a}$, quelque abscisse qu'on prenne. Ses deux ordonnées LP, PM sont donc réciproquement proportionelles l'une à l'autre. Fig. 47.

Ce Cas, où l'Axe des abscisses ne rencontre point la Courbe, parce que le dernier terme de l'équation est réduit à f^3, est essentiellement différent de celui qui a été touché au n°. I. 3, où l'Axe des abscisses ne rencontre point la Courbe, parce que l'éq: $dxx + eex + f^3 = 0$ n'a que des racines imaginaires.

On ne peut supposer d, e, & f égales chacune à zéro, parce qu'alors l'équation, divisible par y, se pourroit réduire à deux équations du prémier dégré $y = 0$ & $ay + bx + cc = 0$, & ne représenteroit que deux Lignes droites [§. 21. 40].

Pl. VI. VI. 1. Reprenons l'équation générale, & ſuppoſons $a = o$, ce qui la réduit à $(bx + cc)y + dxx + eex + f^3 = o$. Alors chaque abſciſſe n'a plus qu'une ordonnée [§. 41]. Et pour appliquer à ce Cas-ci le Théoréme général du §. 61, on prendra AT égale à $-\frac{cc}{b}$ racine de l'éq: $bx + cc = o$ & PL ſera à $\frac{PQ \times PR}{PT}$, ou le rect: TPL au rect: QPR, en raiſon donnée de d [A] à b [α]. Tranſportant donc l'Origine en T, ce qui ne change rien aux ordonnées, le rectangle TPL des coordonnées eſt au rect: QPR en raiſon donnée de d à b. Ch. V. §. 62. Fig. 48.

Mais ſi l'axe ap, au lieu de couper la Courbe en deux points Q, R, la touche en un ſeul q, le rect: tpL ſera au quarré de pq en raiſon donnée.

Et ſi l'axe $\alpha\pi$ ne rencontre point la Courbe, parce que les racines de l'éq: $dxx + eex + f^3 = o$ ſont imaginaires, on prendra comme au n°. I. 3, $\alpha B = -\frac{ee}{2d}$, & $BC = \sqrt{(\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd})}$, & le rect: $T\pi L$ ſera au quarré de πC en raiſon donnée de d à b.

2. Dans cette même équation, ſi $f = o$, l'Origine tombe ſur un des points Q, R, où la Courbe eſt rencontrée par l'Axe des abſciſſes.

3. Mais $e = o$ fait tomber l'Origine au point K qui diviſe également QR, lorſque d & f ont des ſignes différens. S'ils ont même ſigne, les racines de l'éq: $dxx + f^3 = o$ ſont imaginaires, l'Axe $\alpha\pi$ ne rencontre point la Courbe, & on doit tranſporter le point C en D ſur la perpendiculaire αD à la même diſtance de l'origine α.

4. Si l'on a $d = o$, l'Axe des abſciſſes ne coupera la Courbe [§. 41] qu'en un ſeul point Q. Et prenant toûjours Fig. 49.

Ch. V. §. 61. jours $AT = -\frac{ee}{b}$, on aura $PL = \frac{ee}{b} \times \frac{PQ}{PT}$, ou TPL Pl. VI. [qui est le rectangle des coordonnées, en transportant l'Origine sur T] est égal au rect: de PQ par une constante $\frac{ee}{b}$. Si on méne donc une autre ordonnée pl, on aura $TP \times PL : Tp \times pl = PQ : pQ$. Donc PL est à pl en raison composée de la directe de PQ à pQ & de l'inverse de PT à pT.

5. Enfin, si l'on a d & e égales chacune à zéro, on aura $TPL = \frac{f^3}{b}$. Donc portant l'Origine en T, le rectangle des coordonnées est constant. Fig. 50.

VII. Dans tous le cas du n°. préc. si on avoit $c = 0$, cela ne changeroit rien aux conclusions, si ce n'est que l'Origine se trouve toute portée sur le point T, puisque la distance AT, qui est $-\frac{ee}{b}$, se trouve nulle.

VIII. 1. Mais si b, aussi bien que a, est égale à zéro, l'équation sera $ccy + dxx + eex + f^3 = 0$, ce qui donne Fig. 48.

$$y = -\frac{dxx + eex + f^3}{cc} = -\frac{d}{cc}\left(xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}\right) = -\frac{d}{cc} \times PQ \times PR.$$

Donc $\frac{cc}{d} \times PL = PQ \times PR$. Le rect: des parties $PQ \times PR$ de l'abscisse est égal au rectangle de l'ordonnée PL par une droite constante $\frac{cc}{d}$.

Si l'abscisse ap touche la Courbe en q, c'est le quarré de pq qui est égal au rectangle de l'ordonnée pL par une constante.

Et si l'abscisse ax ne rencontre point la Courbe, les racines de $xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d} = 0$ étant imaginaires, le rect:

P 2 de

PL. VI. de l'ordonnée πL par une constante est égal au quarré de la Droite πC menée de l'extrémité π de l'abscisse au point fixe C, déterminé, comme aux n°. I. 3, & VI. 1, en faisant $\alpha B = -\frac{ee}{2d}$, & $BC = \sqrt{(\frac{ff}{d} - \frac{e^4}{4dd})}$. CH. V. §. 62.

2. Ici, comme aux n°. II, III, & VI, la supposition de $f = 0$ porte l'Origine sur un des deux points Q & R. Et la supposition de $e = 0$ porte A en K, ou C en D, suivant que les racines de $dxx + f^3 = 0$ sont réelles ou imaginaires.

Mais on ne peut supposer $d = 0$, parce que l'équation, n'ayant plus de terme du second dégré, ne représenteroit qu'une Ligne du premier Ordre.

63. On voit par cet échantillon, quelle varieté de Cas se présenteroit dans les Lignes des Ordres supérieurs. Touchons légérement ceux qui se raportent aux Lignes du troisiéme Ordre. L'équation générale sera $ay^3 + (bx + cc)yy + (dxx + eex + f^3)y + gx^3 + hhxx + i^3x + l^4 = 0$.

I. 1. Et d'abord, s'il n'y manque ni le terme ay^3; ni PL. VII. Fig. 51. le terme gx^3, l'abscisse & l'ordonnée peuvent couper la Courbe LQMRSN représentée par cette équation, chacune en trois points Q, R, S; L, M, N. Et selon le Théor. général [§. 61], le solide PL×PM×PN des ordonnées est au solide PQ×PR×PS des parties de l'abscisse, en raison donnée de g [A] à a [α].

De sorte que menant deux ordonnées LN, ln, le solide PL×PM×PN est au solide PQ×PR×PS comme le solide pl×pm×pn au solide pQ×pR×pS.

Menant aussi qs paralléle à QS, on aura, toûjours par la même raison, le solide pl×pm×pn au solide pQ×pR×pS, comme le solide pl×pm×pn au solide pq×pr×ps.

Donc enfin PL×PM×PN est à PQ×PR×PS comme pl×pm×pn à pq×pr×ps.

Ce

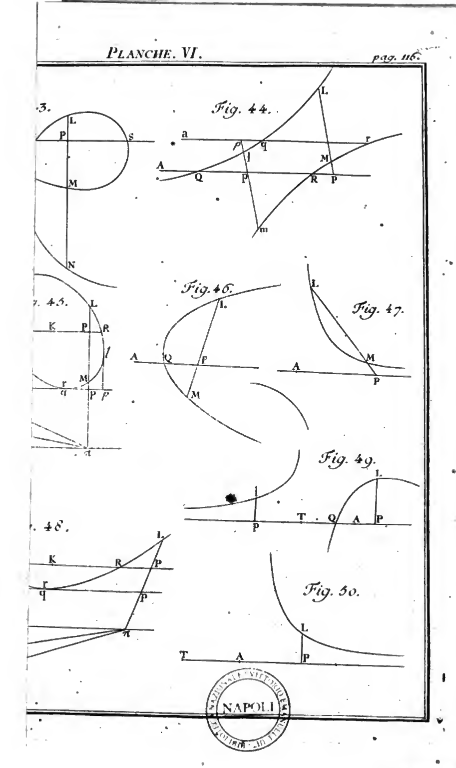


Fig. 44.
a
r
A
Q
R
L
M
m
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 49.
Fig. 50.
K
T
N

PL. VII. Ce qui forme ce Théoréme. Si par un point P on méne deux droites LPN, QPS qui coupent chacune en trois points une Ligne du troisiéme Ordre, & par un autre point p deux autres droites $l p n$, $q p s$ paralléles aux prémiéres & qui coupent aussi chacune la même Courbe en trois points ; le solide des parties de la prémiére droite LN interceptées entre le point P & la Courbe, est au solide des parties de la seconde droite QS interceptées aussi entre le point P & la Courbe, comme le solide des parties de la troisiéme droite ln interceptées pareillement entre le point p & la Courbe, est au solide des parties de la quatriéme droite qs interceptées de même entre le point p & la Courbe. CH. V. §. 65.

2. Si l'abscisse ap coupe la Courbe en un seul point s & la touche en un autre point q, où l'on conçoit réünis deux points de section, alors le solide $pL \times pM \times pN$ est au solide $pq^2 \times ps$ en raison donnée. Fig. 52.

De même, si l'ordonnée lpm touche la Courbe en m & la coupe en l, le solide $pl \times pm^2$ sera au solide $pq^2 \times ps$ en raison donnée.

Il peut même arriver que l'abscisse [ou l'ordonnée] ne touche la Courbe qu'en un seul point, auquel se réünissent les trois points de section Q, R, S. C'est ce qui arrive, quand l'éq : $gx^3 + bbxx + i^3x + l^4 = 0$, a ses trois racines égales. Dans ce Cas, si on transporte l'Origine sur ce point de contact, le cube de l'abscisse est au solide des ordonnées en raison donnée.

3. Si l'abscisse $\alpha\varpi$ ne rencontre la Courbe qu'en un seul point σ, & la coupe en ce point-là sans la toucher, le solide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ des ordonnés est toujours égal à $\frac{gx^3 + bbxx + i^3x + l^4}{a}$, ou $\frac{g}{a}(x^3 + \frac{bbxx}{g} + \frac{i^3x}{g} + \frac{l^4}{g})$. Mais cette grandeur $x^3 + \frac{bb}{g}xx + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g}$ n'est plus le pro-

Ch. V. duit de trois droites terminées à l'extrémité ϖ de l'abscisse, Pl. VII.
§. 63. comme l'étoient PQ, PR, PS à l'extrémité P de l'abscisse AP ; parce que l'éq : $x^3 + \frac{bb}{g}xx + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g} = 0$ n'a plus qu'une racine réelle, les deux autres étant imaginaires. On peut pourtant réduire le produit de ces deux racines imaginaires à un quarré, de la maniére suivante. Soit $\alpha\sigma = z$. Donc $\varpi\sigma$ [$= \alpha\varpi - \alpha\sigma = x - z$] est la racine réelle de l'éq : $x^3 + \frac{bb}{g}x^2 + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g} = 0$. Ainsi, divisant cette équation par $x - z = 0$, le quotient sera le produit des racines imaginaires. Ce quotient est $xx + (z + \frac{bb}{g})x + (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g})$, & le reste $z^3 + \frac{bb}{g}z^2 + \frac{i^3}{g}z + \frac{l^4}{g}$ est nul ; puisque z est la racine réelle de l'éq : $x^3 + \frac{bb}{g}x^2 + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g} = 0$. Il s'agit donc de trouver un quarré égal à $xx + (z + \frac{bb}{g})x + (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g})$. Pour cela qu'on prenne $\alpha D = \alpha\sigma = z$ & $DE = \frac{bb}{g}$, on aura $\alpha E = z + \frac{bb}{g}$, & sa moitié $\alpha B = \frac{1}{2}z + \frac{bb}{2g}$. Sur le diamétre αE qu'on décrive le demi-cercle αFE, qui coupera en F la droite DF élevée perpendiculairement sur αD. De cette maniére αF, moyenne proportionelle entre αE [$z + \frac{bb}{g}$] & αD [z], sera égale à $\sqrt{(zz + \frac{bb}{g}z)}$. Qu'on prenne sur

CH. V. §. 63. sur FE, prolongée s'il le faut, une partie FG égale à $\sqrt{\frac{i^3}{g}}$, PL. VII.

& on aura $\alpha G^2 = \alpha F^2 + FG^2 = zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g}$. Qu'on décrive donc, du centre α, avec le raïon αG, un cercle GC, qui coupe en C la droite BC perpendiculaire à αB, & on aura $BC^2 = \alpha C^2 - \alpha B^2 = \alpha G^2 - \alpha B^2 = (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g}) - (\frac{1}{2}z + \frac{bb}{2g})^2 = \frac{3}{4}zz + \frac{bb}{2g}z + \frac{i^3}{g} - \frac{b^4}{4gg}$.
Donc $\varpi C^2 = \varpi B^2 + BC^2 = (x + \frac{1}{2}z + \frac{bb}{2g})^2 + \frac{3}{4}zz + \frac{bb}{2g}z + \frac{i^3}{g} - \frac{b^4}{4gg} = xx + (z + \frac{bb}{g})x + (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g})$.
Ainsi puisque le solide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ est à $x^3 + \frac{bb}{g}x^2 + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g}$ en raison donnée de g à a, & que $x^3 + \frac{bb}{g}x^2 + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g}$ est le produit de $x - z$ [qui est $\varpi\sigma$] par $xx + (z + \frac{bb}{g})x + (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g})$ [qui est ϖC^2], on conclura que le solide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ des ordonnées est au solide $\varpi\sigma \times \varpi C^2$ en raison donnée de g à a.

II. 1. Si la grandeur l est égale à zéro, alors l'éq: $gx^3 + bbxx + i^3x = 0$, a une racine $x = 0$: ce qui montre que l'Origine tombe sur un des trois points Q, R, S, où l'Axe des abscisses rencontre la Courbe. D'ailleurs tout le reste subsiste comme dans le n°. préc. si ce n'est qu'il faut un peu varier la construction du cas où cette éq: $gx^3 + bbxx + i^3x = 0$ a deux racines imaginaires, & imiter celle du §. 62. n°. I. 3. On prendra $\alpha B = -\frac{bb}{g}$, on élévera

PL. VII. élévera la perpendiculaire indéfinie BC & on la coupera en C par un cercle décrit du centre α avec le raïon $\alpha C = \sqrt{\frac{iii}{g}}$, pour avoir le point fixe C, duquel menant la droite ϖC, on aura $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ à $\varpi C^2 \times \varpi \alpha$ [car, dans ce cas, α & ϖ sont le même point] en raison donnée de g à a. Car le solide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ des ordonnées est égal à $\frac{gx^3 + hhxx + iiix}{a} = \frac{gx}{a}(xx + \frac{hh}{g}x + \frac{iii}{g}) = \frac{g}{a}(\varpi \alpha \times \varpi C^2)$. CH. V. §. 63.

2. Si l & i sont nuls, l'équation, faite en égalant à zéro le dernier terme, se réduit à $gx^3 + hhxx = 0$, qui a deux racines égales à zéro. Donc alors deux des points où l'Axe coupe la Courbe sont réünis en un seul point q, auquel est située l'Origine. Et le solide $pL \times pM \times pN$ des ordonnées est en raison donnée au solide qui a pour base le quarré pq^2 de l'abscisse, & pour hauteur la droite ps.

Enfin, si les trois grandeurs h, i, l sont nulles, l'équation du dernier terme $gx^3 = 0$ a ses trois racines $x = 0$. Les trois points Q, R, S, communs à la Courbe & à l'Axe, se confondent en un seul, sur lequel est pris l'Origine, & le solide des trois ordonnées est au cube de l'abscisse en raison donnée.

III. 1. Si au contraire, dans le dernier terme, la grandeur g est la seule qui soit zéro, l'équation faite de ce dernier terme sera $hhxx + iiix + l^4 = 0$, qui n'a que
Fig. 53. deux racines. L'Axe AP ne peut donc couper la Courbe qu'en deux points Q, R. Et $PL \times PM \times PN$ est égal à $\frac{A}{a} \times PQ \times PR = \frac{hh}{a} \times PQ \times PR$, puisqu'ici $A = hh$, & $\alpha = a$.

Le

Ch. V. §. 63. Le solide des ordonnées $PL \times PM \times PN$ est égal à un solide qui a une hauteur donnée $\frac{bb}{a}$, & une base égale au rectangle des parties PQ, PR de l'abscisse. Pl. VII.

Si l'abscisse a p touche la Courbe au point q, le rect: $PQ \times PR$ devient le quarré pq^2. Transportant donc l'Origine a sur ce point q, le solide $pL \times pM \times pN$ des ordonnées est égal au solide qui a pour hauteur une droite donnée $\frac{bb}{a}$, & pour base le quarré de l'abscisse p q.

Mais si l'Axe $\alpha\pi$ ne rencontre point la Courbe, ce qui arrive quand les racines de l'éq : $bbxx + iiix + l^4 = 0$ sont imaginaires; alors on prendra, comme au §. 62. n°. I. 3, $\alpha\beta = -\frac{iii}{2bb}$, on élévera la perpendiculaire B C, on la coupera par un Cercle décrit du centre α avec un raïon $\alpha C = \sqrt{\frac{l^4}{bb}} = \frac{ll}{b}$, & on aura le point fixe C, duquel menant $C\pi$, le solide $\pi L \times \pi M \times \pi N$ des ordonnées est égal au solide qui a la hauteur donnée $\frac{bb}{a}$ & la base égale au quarré de πC.

2. Si *g* & *h* sont toutes deux nulles, le dernier terme de l'éq : de la Courbe sera $iiix + l^4$ qui, égalé à zéro, n'a qu'une racine $-\frac{l^4}{i^3}$. L'Axe AP ne rencontre la Courbe qu'en un seul point Q. Et le solide $PL \times PM \times PN$ des ordonnées est égal à $\frac{A}{a}\,PQ = \frac{i^3}{a}\,PQ$, c'est-à-dire, [en transportant l'Origine au point Q] que le solide des ordonnées est égal au solide, qui a pour hauteur l'abscisse P Q & une base donnée $\frac{i^3}{a}$. Fig. 54.

Pl. VII. Fig. 55. 3. Enfin ce solide PL×PM×PN des ordonnées est d'une grandeur constante $\frac{l^4}{a}$, si les quantités g, h, i sont chacune égale à zéro. Ch. V. §. 63.

IV. 1. Si dans l'éq : de la Courbe $ay^3 + (bx + cc)yy + (dxx + eex + f^3)y + gx^3 + hhxx + iiix + l^4 = 0$, le coëfficient a du premier terme est zéro, ce qui donne la prémiére place au terme $(bx + cc)yy$: l'Axe des abscisses peut bien couper la Courbe en trois points Q, R, S ; mais aucune abscisse AP n'aura plus de deux ordonnées PL, PM. Et prenant AT $= -\frac{cc}{b}$, racine de l'éq : $bx + cc = 0$, on aura [§. 61] le rect : PL×PM à $\frac{PQ \times PR \times PS}{PT}$ comme A à a, c'est-à-dire, comme g à b. Donc le solide PT×PL×PM est au solide PQ×PR×PS en raison donnée. Ainsi PT×PL×PM : PQ×PR×PS $=$ pT×pl×pm : pQ×pR×pS. En prenant le point donné T pour l'Origine, on dira que le solide PT×PL×PM de l'abscisse & des ordonnées est proportionel au solide PQ×PR×PS des parties de l'Axe. (Fig. 56.)

Ici, comme au n°. I. 2 du présent §. l'Axe ap peut toucher la Courbe en q & la couper en s, & alors c'est au solide $pq^2 \times ps$ que le solide $pt \times pL \times pM$ de l'abscisse & des ordonnées est proportionel.

Il peut arriver aussi que l'abscisse $\alpha\pi$ ne rencontre la Courbe qu'en un seul point σ. Dans ce cas prenant, comme au n°. I. 3 de ce §, $\alpha B = \frac{1}{2}z + \frac{hh}{2g}$, & $BC = \sqrt{(\frac{1}{4}zz + \frac{hh}{g}z + \frac{iii}{g} - \frac{h^4}{4gg})}$, on aura le solide $\pi\sigma \times \pi C^2$ proportionel au solide $\pi T \times \pi L \times \pi M$ de l'abscisse & des ordonnées.

2. A:

CH. V. §. 63. 2. a étant toûjours zéro, si de plus $l = o$, l'Origine tombe sur un des points Q, R, S, ou si l'Axe ne rencontre la Courbe qu'en un seul point σ, c'est à ce point σ qu'est l'Origine. On cherchera, en ce dernier Cas, le point fixe C, comme au n°. II. 1. de ce §, & on aura le solide $\pi T \times \pi L \times \pi M$ de l'abscisse & des ordonnées proportionel au solide $\pi\sigma \times \pi C^2$. PL. VII.

Si outre cela, $b = o$, l'Axe a q touche la Courbe & l'Origine est prise au point de contact q. Mais on a toûjours le solide $pt \times pL \times pM$ proportionel au solide $ps \times pq^2$.

Enfin, si a, l, b & i sont zéros, les trois points Q, R, S se confondent en un seul, où est l'Origine. Et le solide $PT \times PL \times PM$ est proportionel au Cube de l'abscisse.

3. Supposons maintenant que, dans le dernier terme, g seule soit zéro, l'Axe AP ne peut rencontrer la Courbe qu'en deux points, & en raisonant comme au n°. III. 1 de ce §, on trouvera que le solide $PT \times PL \times PM$ est égal au solide $\frac{bb}{a} \times PQ \times PR$, si l'Axe AP coupe la Courbe en deux points ; ou que le solide $pt \times pL \times pM$ est égal au solide $\frac{bb}{a} \times pq^2$, si l'Axe ap rencontre la Courbe en un seul point q : ou enfin que le solide $\varpi T \times \varpi L \times \varpi M$ est égal au solide $\frac{bb}{a} \times \varpi C^2$ ou $\frac{bb}{a} \times \varpi D^2$, si l'Axe $\alpha\varpi$ ne rencontre point la Courbe ; le point C, ou le point D, étant déterminé, dans ce dernier cas, comme au n°. III. 1 de ce §. Fig. 57.

Si, non-seulement g, mais encore b est zéro, l'Axe AP ne peut couper la Courbe qu'en un seul point Q, & & le solide $PT \times PL \times PM$ est égal au solide $\frac{iii}{a} \times PQ$. Mais PL. VIII. Fig. 58.

PL. VIII. ſi de plus $i = 0$, l'Axe ap ne rencontre point la Courbe, & le ſolide $pt \times pL \times pM$ de l'abſciſſe par les ordonnées [en fixant l'Origine en t] eſt d'une grandeur conſtante $\frac{l^4}{a}$. CH. V. §. 63.

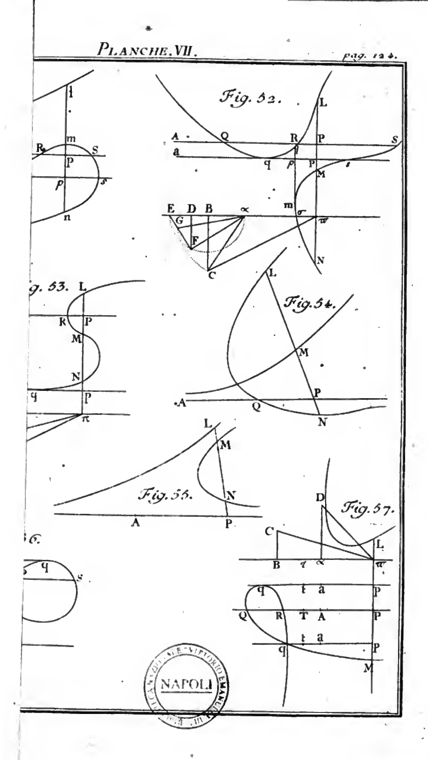
V. Si dans tous les Cas du n°. préced. on ſuppoſe $c = 0$, les concluſions qui ont été tirées reſtent préciſément les mêmes. La ſeule différence eſt que l'Origine A eſt néceſſairement fixée au point T, puiſque AT $[-\frac{cc}{b}]$ ſe trouve nulle.

VI. Mais ſi dans ces mêmes cas on avoit $b = 0$, l'équation ſe réduiroit à cette forme $yy + \frac{dxx + eex + f^3}{cc} y + \frac{gx^3 + hhxx + iiix + l^4}{cc} = 0$. Le rect: des ordonnées

Fig. 59. $PL \times PM$ eſt donc égal à $\frac{gx^3 + hhxx + iiix + l^4}{cc} = \frac{g}{cc} \times (x^3 + \frac{hh}{g} xx + \frac{iii}{g} x + \frac{l^4}{g}) = \frac{g}{cc} \times PQ \times PR \times PS$. Donc $\frac{cc}{g} \times PL \times PM = PQ \times PR \times PS$. On aura ici toutes les mêmes concluſions qui ſe tirent dans le n°. IV, ſi ce n'eſt qu'au lieu de la droite variable PT $[x + \frac{cc}{b}]$ on doit prendre une droite conſtante $\frac{cc}{g}$.

VII. Suppoſons maintenant que a, b & c étant nuls faſſent diſparoître les deux premiers termes de l'éq: générale, & la réduiſent à $(dxx + eex + f^3) y + gx^3 + hhxx +$

Fig. 60. $iiix + l^4 = 0$. Chaque abſciſſe AP n'aura qu'une ſeule ordonnée PL. Et pour appliquer ici le Théor. général, on prendra


Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
6.
Fig. 57.
NAPOLI

CH. V. §. 63. prendra AT & AV égales aux deux racines de l'éq : $dx^2 + eex + f^3 = o$, & l'on aura PL à $\frac{PQ \times PR \times PS}{PT \times PV}$, ou le solide PT×PV×PL au solide PQ×PR×PS en raison donnée de g à d. PL. VIII.

Lorsque les racines AT, AV de l'éq : $dx^2 + eex + f^3 = o$ sont réelles, on les peut déterminer par cette construction triviale. Prenez sur l'Axe des abscisses $AH = -\frac{ee}{2d}$, élevez la perpendiculaire $HI = \sqrt{\frac{f^3}{d}}$, & du centre I, avec un raïon IT égal à AH, décrivez un Cercle qui coupera l'Axe en T & V. Car HT ou $HV = \sqrt{(IT^2 - IH^2)} = \sqrt{(AH^2 - HI^2)} = \sqrt{(\frac{e^4}{4dd} - \frac{f^3}{d})}$. Donc $AT = AH - HT = -\frac{ee}{2d} + \sqrt{(\frac{e^4}{4dd} - \frac{f^3}{d})}$, & $AV = AH + HV = -\frac{ee}{2d} - \sqrt{(\frac{e^4}{4dd} - \frac{f^3}{d})}$, qui sont les deux racines de l'éq: $gxx + eex + f^3 = o$.

Mais si les racines de cette équation sont imaginaires, ce qui arrive quand IT ou AH $[\frac{ee}{d}] <$ IH $[\sqrt{\frac{f^3}{d}}]$, la grandeur $xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}$ ne peut plus représenter un rectangle PT×PV; mais elle pourra exprimer le quarré d'une droite IP, menée de l'extrémité P de l'abscisse AP à un point fixe I, qui sera déterminé comme au §. 62. n°. I. 3, en prenant $AH = -\frac{ee}{2d}$, élevant la perpendiculaire indéfinie HI, & la coupant en I par un Cercle décrit du centre A avec un raïon $AI = \sqrt{\frac{f^3}{d}}$.

 Ainsi

PL. VIII. Ainsi le solide $PQ \times PR \times PS$ est proportionel au solide $PT \times PV \times PL$ quand les deux racines de l'éq : $dxx + eex + f^3 = 0$ sont réelles, & au solide $PI^2 \times PL$ quand ces racines sont imaginaires. CH. V. §. 62.

Dans l'un & dans l'autre cas, ce solide $PQ \times PR \times PS$ est métamorphosé suivant toutes les maniéres indiquées aux n°. I, II, & III du présent §, soit par la position de l'Axe des abscisses, soit par les suppositions de $l = 0$, ou de $l = i = 0$, ou de $l = i = h = 0$; ou de $g = 0$, ou de $g = h = 0$, ou de $g = h = i = 0$.

VIII. Si avec a, b, & c, on a encore $f = 0$, le point T tombe sur A, & le point V doit être pris à une distance AV de l'Origine qui soit $-\frac{ee}{d}$, parce que les racines de l'éq : $dxx + eex = 0$ sont $x = 0$ & $x = -\frac{ee}{d}$. On a donc, en ce cas, le solide $PA \times PV \times PL$ proportionel au solide $PQ \times PR \times PS$, ou à tous ceux dans lesquels ce dernier se métamorphose par les suppositions des n°. I, II, & III.

IX. Si ce n'est pas f, mais e, qui soit $= 0$, les points T & V tombent de part & d'autre de l'Origine A, à une distance $\sqrt{-\frac{f^3}{d}}$, lorsque f & d n'ont pas le même signe, parce que $x - \sqrt{-\frac{f^3}{d}} = 0$ & $x + \sqrt{-\frac{f^3}{d}} = 0$ sont les racines de l'éq : $dxx + f^3 = 0$. Si f & d ont le même signe, $\sqrt{-\frac{f^3}{d}}$ est une grandeur imaginaire ; mais $xx + \frac{f^3}{d}$ exprime le quarré de KP menée de l'extrémité de l'abscisse AP au point K, déterminé en prenant AK [$=$ AI] $= \sqrt{f^3}$

Ch. V. §. 63. $=\sqrt{\frac{f^3}{d}}$, ſur la perpendiculaire indéfinie élevée au point A. Alors, le ſolide $PL\times PK^2$ eſt proportionel au ſolide $PQ\times PR\times PS$, ou à tous ceux que lui ſubſtituent les ſuppoſitions des n°. I, II, & III. Pl. VIII.

X. Si les deux grandeurs f & e ſont, en même tems, $=0$, les deux points T & V tombent enſemble ſur l'Origine A, parce que les deux racines de l'éq: $dxx=0$ ſont $x=0$, $x=0$: & c'eſt le ſolide $PL\times PA^2$ qui eſt proportionel au ſolide $PQ\times PR\times PS$, ou aux ſolides équivalents.

De même, la ſuppoſition de $d=\frac{e^4}{4f^3}$ donnant à l'éq: $dxx+eex+f^3=0$ deux racines égales, chacune à $-\frac{2f^3}{ee}$ ou $-\frac{ee}{2d}$, fait tomber les deux points T & V ſur le point H, & change le rect: $PT\times PV$ en un quarré PH^2, ſur lequel élevant un Parallélépipéde qui ait PL pour hauteur, il ſera proportionel au ſolide $PQ\times PR\times PS$, ou à ceux en qui il ſe transforme par les ſuppoſitions des n°. I, II, & III.

XI. Si a, b, c & d ſont nuls, l'éq: $dxx+eex+f^3=0$ réduite à $eex+f^3=0$ n'a qu'une racine $x=-\frac{f^3}{ee}$, à laquelle prenant égale AT, on aura [§. 61] Fig. 61.

$$PL=\frac{A\times PQ\times PR\times PS}{a\times PT}=\frac{g}{ee}\times\frac{PQ\times PR\times PS}{PT}.$$

Donc le ſolide de la conſtante $\frac{ee}{g}$ par l'abſciſſe PT [en portant l'Origine de A en T] & par l'ordonnée PL eſt égal au ſolide $PQ\times PR\times PS$, ou à ceux dans leſquels le transforment les ſuppoſitions des n°. I & II.

XII. En-

PL. VIII. XII. Enfin, si $a, b, c, d,$ & e sont nuls, l'éq: de la Courbe réduite à $f^3y + gx^3 + hhxx + iiix + l^4 = 0$, ou $\frac{f^3}{g}y + x^3 + \frac{hh}{g}x^2 + \frac{iii}{g}x + \frac{l^4}{g} = 0$, fait voir que le solide de l'ordonnée PL [y] par le rect: constant $\frac{f^3}{g}$ est égal au solide PQ × PR × PS, ou à ceux qui lui sont substitués dans les n°. I & II. CH. V. §. 63. Fig. 62.

Dans le cas des n°. X. & XI. on ne peut pas, comme au n°. III, supposer $g = 0$; parce qu'alors l'équation, n'ayant plus de terme du troisiéme dégré, ne représenteroit qu'une Ligne du second Ordre.

On voit assez, je pense, que si l'on vouloit détailler tous ces Cas, combiner ensemble ceux qui peuvent l'être, & se laisser aller aux conséquences qui en suivent naturellement, il y auroit dequoi faire un Volume. Mais nous ne nous proposons que d'indiquer les principes généraux, & d'autres considérations nous apellent.

CHAPI-

CHAPITRE VI.

Des Diamétres, Contre-diamétres, & Centres des Lignes Courbes.

64. TOUT ce qui a été démontré au Chap. préced. n'eſt que la conſéquence de ce Principe, Que le dernier terme d'une équation eſt égal au produit de toutes ſes racines. On ſait auſſi que le coëfficient du ſecond terme, pris avec un ſigne contraire, eſt égal à la ſomme de toutes les racines. Donc $(\alpha x^t + \beta x^{t-1}\ \&c)\, y^{v-t} + (a x^{t+1} + b x^t + \&c)\, y^{v-t-1}\ \&c = 0$ étant l'équation d'une Courbe $M m O \mu Q$, de l'Ordre v, ſi on la diviſe par le coëfficient du prémier terme, afin que la plus haute puiſſance de y ſoit ſans autre coëfficient que l'unité, elle prendra cette forme $y^{v-t} + \dfrac{a x^{t+1} + b x^t\ \&c}{\alpha x^t + \beta x^{t-1}\ \&c}\, y^{v-t-1}$ $+ \&c = 0$, où le coëfficient du ſecond terme, pris avec un ſigne contraire, c'eſt-à-dire, $-\dfrac{a x^{t+1} + b x^t + \&c.}{\alpha x^t + \beta x^{t-1}\ \&c.}$ exprime la ſomme de toutes les racines y, ou de toutes les ordonnées PM, Pm, $P\mu$, &c. Pl. VIII. Fig. 63.

65. Si ſur les mêmes Axes on décrit une autre Ligne quelconque $N \nu Q n$ repréſentée par une équation dont les deux premiers termes ſoient $y^{v-s} + \dfrac{a x^{t+1} + b x^t\ \&c}{\alpha x^t + \beta x^{t-1}\ \&c}$

Pl. VIII. y^{v-s-1}, la ſomme de ſes ordonnées PN + Pn + Pν &c. Ch. VI. §. 65.
ſera auſſi $-\frac{ax^{t+1} + bx^{t} \&c}{\alpha x^{t} + \beta x^{t-1} \&c}$, c'eſt-à-dire, la même que la ſomme des ordonnées PM + Pm + Pμ &c. de la prémiére Ligne.

La comparaiſon de ces deux Lignes & les varietés infinies dont elles ſont ſuſceptibles [car il ſuffit qu'elles conviennent dans le coëfficient du ſecond terme, leurs équations étant ordonnées par y : elles peuvent différer dans tout le reſte] donnent lieu à une infinité de Propoſitions. Contentons-nous de remarquer un Cas fort ſimple. C'eſt celui où $s = t$, c'eſt-à-dire, celui où les deux Lignes ſont du même ordre v, & où leurs équations ont les deux mêmes premiers termes. Si l'on ne prend que les abſciſſes qui dans chaque Ligne n'ont point d'ordonnées imaginaires, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'on ne prend que les ordonnées qui coupent l'une & l'autre Ligne en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut expoſant $v - t$ de la variable y; non-ſeulement la ſomme PM + Pm + Pμ &c. des ordonnées de la prémiére Ligne MmOμQ eſt égale à la ſomme PN + Pn + Pν &c. des ordonnées de la ſeconde Ligne NνQn ; mais encore le nombre des ordonnées de l'une eſt égal au nombre des ordonnées de l'autre. Et l'éq: PM + Pm + Pμ &c. = PN + Pn + Pν &c. peut prendre cette forme PM — PN + Pm — Pn + Pμ — Pν &c. = o, ou — NM + mn + $\mu\nu$ &c = o, ſoit MN &c = mn + $\mu\nu$ &c. Propoſition qu'on peut énoncer ainſi.

Deux Lignes d'un même Ordre, & dont les équations ordonnées par y ont les deux mêmes prémiers termes, étant décrites ſur les mêmes Axes ; toute ordonnée qui coupe l'une & l'autre en un nombre de points égal à l'expoſant de la plus haute puiſſance d'y, eſt coupée en ſorte que

Ch. VI. §. 65. que la somme de ses parties interceptées entre la prémiére & la seconde Ligne est égale à la somme de ses parties interceptées entre la seconde & la prémiére Ligne. Je distingue ces parties en supposant qu'on parcourt l'ordonnée d'un bout à l'autre, & j'apelle *parties interceptées entre la prémiére & la seconde Ligne* celles qu'on parcourt en allant d'un point de la prémiére Ligne à un point de la seconde, & *parties interceptées entre la seconde & la prémiére Ligne* celles qu'on parcourt en allant d'un point de la seconde Ligne à un point de la prémiére. Ainsi parcourant l'ordonnée Nν de N à ν, MN est une partie interceptée entre la seconde & la prémiére Ligne, mais mn & $\mu\nu$ sont interceptées entre la prémiére Ligne & la seconde. Pl. VIII.

66. S'IL n'y a dans l'équation aucune puissance de x qui ait un exposant négatif, comme on le suppose d'ordinaire, & que t soit zéro, le coëfficient $\frac{ax^{t+1} + bx^{t} + \&c}{\alpha x^{t} + \beta x^{t-1} \&c}$ du second terme se réduit à $ax + b$. Alors on peut toûjours prendre pour l'une des deux Lignes, le Systême d'autant de Droites qu'il y a d'unités dans v. Et ces Droites se peuvent décrire en une infinité de façons. Car si AB, AH sont les deux Axes, & qu'ayant pris une abscisse AB $= 1$, on lui donne les ordonnées BC [$-c$], BD [$-d$], BE [$-e$] &c. dont le nombre soit v, & la somme [$-c - d - e$ &c.] égale à $-a$, où l'on peut, si l'on veut, prendre le zéro pour une ou plusieurs de ces grandeurs c, d, e, &c. & qu'on mène par l'Origine A les Droites ACc, ADd, AEe, &c. qu'on prenne aussi sur l'Axe des ordonnées les parties AF [$-f$], AG [$-g$], AH [$-h$] &c. dont la somme [$-f - g - h$ &c.] soit égale à $-b$: & qu'on mène les Droites Ff, Gg, Hh, &c. parallèles à AC, AD, AE, &c. Le systême de ces Droites Ff, Fig. 64.

PL. VIII. Gg, Hh &c. sera représenté par une équation dont les CH. VI.
deux premiers termes seront $y^v + (ax+b)y^{v-1}$. Car §. 66.
l'ordonnée Pf de la Droite Ff est égale à Pc + cf. Or Pc est la troisiéme proportionelle à AB [1], BC [$-c$] & AP [x]. Donc Pc $= -cx$. Et cf est égale à AF [$-f$], Ff étant paralléle à Ac. Donc Pf [$=$ Pc + cf] $= -cx - f$. L'équation de la Droite Ff est donc $y + cx + f = 0$. Par la même raison l'éq: de Gg est $y + dx + g = 0$, celle de Hh est $y + ex + h = 0$, & ainsi de suite autant qu'il y aura de Droites. Donc le systême de ces Droites est représenté par le produit $(y + cx + f)(y + dx + g)(y + ex + h)$ &c $= 0$ de toutes ces équations [§. 20], dont le premier terme est y^v & le second $((cx + f) + (dx + g) + (ex + h) + \&c)y^{v-1} = ((c + d + e\ \&c)x + (f + g + h\ \&c))y^{v-1} = (ax + b)y^{v-1}$, puisque $c + d + e + \&c = a$, & $f + g + h + \&c = b$. Le systême de ces Droites est donc représenté par l'éq: $y^v + (ax + b)y^{v-1} + \&c = 0$, dont le second terme a pour coëfficient $ax + b$, qui étant pris avec un signe contraire, donne $-ax - b$ pour la somme Pf + Pg + Ph &c. des ordonnées.

On peut aussi, si l'on veut, & cela revient au même, prendre les ordonnées AF, AG, AH &c. égales à f, g, h &c. dont la somme soit $-b$, & les abscisses AI, AK, AL &c. égales à i, k, l, &c. telles que $\frac{f}{i} + \frac{g}{k} + \frac{h}{l}$ &c. soit $-a$, & mener les Droites IF, KG, LH. Car AP étant x, on a AI [i] : AF [f] $=$ IP [$i + x$] : Pf $= f + \frac{f}{i}x$. De même Pg $= g + \frac{g}{k}x$, & Ph $= h + \frac{h}{l}x$, &c. Donc la somme Pf + Pg + Ph &c $= f + g + h$ &c +

CH. VI. §. 66. $\&c + (\frac{f}{i} + \frac{g}{k} + \frac{h}{l} \&c.)\, x = -b - ax.$ PL. VIII.

Ainsi décrivant sur les mêmes Axes une Courbe MQmμ dans l'équation de laquelle les deux prémiers termes soient $y^v + (ax+b)\, y^{v-1}$, si l'on méne une ordonnée Pμ qui rencontre cette Courbe en un nombre v de points M, m, μ &c. la somme des ordonnées PM, Pm, Pμ &c. de la Courbe, sera égale à la somme des ordonnées Pf, Pg, Ph, &c. des Droites Ff, Gg, Hh, &c. & les parties hμ, gm, &c. interceptées entre les Droites & la Courbe, seront égales aux parties [ou à la partie] Mf &c. interceptées entre la Courbe & les Droites.

67. RIEN n'empêche de prendre les ordonnées AF, AG, AH &c. égales entr'elles, & comme leur nombre est v & leur somme $-b$, chacune sera $-\frac{b}{v}$. On peut de même prendre les abscisses AI, AK, AL, &c. égales entr'elles. Les nommant $-r$, la somme $+\frac{b}{vr} + \frac{b}{vr} + \frac{b}{vr}\,\&c = +\frac{b}{r}$ doit être $-a$: ce qui donne $r = -\frac{b}{a}$. Alors toutes les Droites IF, KG, LH &c. se réduisent à une seule RS représentée par l'éq: $y + \frac{a}{v}x + \frac{b}{v} = 0$ ou $vy + ax + b = 0$. Son ordonnée PS prise v fois est égale à la somme PM + Pm + Pμ &c. des ordonnées de la Courbe MQmμ, & les parties MS, mS, &c. interceptées entre la Courbe & la Droite sont égales aux parties [ou à la partie] Sμ &c. interceptée entre la Droite & la Courbe. De sorte que si l'on prend cette Droite RS pour l'Axe des abscisses, la somme des ordonnées négatives SM + Sm, &c. Fig. 65.

PL. VIII. eſt égale à la ſomme $S\mu$ &c. des poſitives. Une Droite qui a cette poſition ſe nomme un *Diamétre*, à prendre ce mot dans une ſignification étenduë *. CH. VI. §. 67.

68. Il n'y a point de Courbe algébrique qui n'ait une infinité de Diamétres, parce qu'il n'y a point de Courbe dont on ne puiſſe transformer, en une infinité de façons, l'équation $(\alpha x^{t} + \beta x^{t-1}$ &c$)y^{v-t} + (ax^{t+1} + bx^{t}$ &c$)y^{v-t-1}$ &c $= 0$, de ſorte que l'expoſant t devienne égal à zéro. Il faut pour cela que la plus haute puiſſance de l'ordonnée y ſoit d'un dégré dont l'expoſant $[v-t]$ ſoit égal à v. Or c'eſt ce qu'on peut toûjours faire en donnant une poſition convenable aux ordonnées.

Car puiſque l'Ordre de la Courbe eſt v, il y aura néceſſairement dans ſon équation des termes, tels que $\alpha x^{t} y^{v-t}$, $ax^{t+1} y^{v-t-1}$, &c où la ſomme des expoſants de x & y ſera v [§. 31]. On change la poſition des ordonnées en ſubſtituant $z+ru$ à x, & su à y [§. 25], ſubſtitution qui change ces termes en $\alpha(z+ru)^{t} s^{v-t} u^{v-t}$, $a(z+ru)^{t+1} s^{v-t-1} u^{v-t-1}$, &c. c'eſt-à-dire, en $\alpha(z^{t} \ldots$ $\ldots + r^{t} u^{t}) s^{v-t} u^{v-t}$, $a(z^{t+1} \ldots r^{t+1} u^{t+1}) s^{v-t-1} u^{v-t-1}$, &c. ou $\alpha s^{v-t} z^{t} u^{v-t} + \ldots \alpha r^{t} s^{v-t} u^{v}$, $as^{v-t-1} z^{t+1} u^{v-t-1}$ $+ \ldots ar^{t+1} s^{v-t-1} u^{v}$, &c. Il y aura donc des termes $\alpha r^{t} s^{v-t} u^{v}$, $ar^{t+1} s^{v-t-1} u^{v}$, &c, où l'expoſant v de l'ordonnée u eſt le même que celui de l'Ordre de la Courbe. Donc, pourvû qu'on choiſiſſe r & s de telle grandeur que le coëfficient $\alpha r^{t} s^{v-t} + ar^{t+1} s^{v-t-1} +$ &c. de

* NEWTON, *Enumer. lin. tert. ordinis.* §. II. 1.

CH. VI. §. 68. de u^v ne soit pas zéro, c'est-à-dire, pourvû que $a + a\frac{r}{s}$ PL. VIII.
$+$ &c. ne soit pas zéro, ce qui se peut faire en une infinité de maniéres, ces ordonnées u auront un Diamétre.

69. MAIS on peut s'élever à des Propositions encore plus générales sur cette matiére. Soit CMNn une Courbe Fig. 66. de l'Ordre v, dont l'équation rélative aux abscisses AP [x] & aux ordonnées PM [y] soit $y^v + (ax + b)y^{v-1} + (cxx + dx + e)y^{v-2} + (fx^3 + gxx + hx + i)y^{v-3}$ $+$ &c $= 0$, où la variable y s'éléve à la puissance v, ce qui est toûjours possible [§. *préc.*]. Soit de plus BQD une autre Ligne décrite sur les mêmes Axes, dont les abscisses soient AP [x] & les ordonnées PQ [u]. Qu'on nomme z la partie QM, QN, ou Qn, de l'ordonnée comprise entre les deux Lignes, & qu'on substituë, dans l'éq: de la Courbe CMNn, $\pm z + u$ au lieu d'y. Cette équation ordonnée, après sa transformation, suivant les dimensions de z aura pour premier terme z^v, & les coëfficients du second, troisiéme, quatriéme &c. termes seront respectivement, $vu + (ax + b)$, $\frac{v.\overline{v-1}}{1.2}u^2 + \frac{v-1}{1}(ax + b) + (cx^2 + dx + e)$, $\frac{v.\overline{v-1}.\overline{v-2}}{1.2.3}u^3 + \frac{\overline{v-1}.\overline{v-2}}{1.2}(ax + b)u^2 + \frac{v-2}{1}(cxx + dx + e) + (fx^3 + gxx + hx + i)$, &c.

Si l'on suppose successivement chacun de ces coëfficients égal à zéro, il en résultera les conséquences suivantes.

I. Le coëfficient du second terme d'une équation étant égal

PL. VIII. égal à la somme de ses racines : si ce coëfficient est zéro CH. VI. §. 68.
la somme des racines positives est égale à la somme des négatives. Donc, faisant $vu + ax + b = 0$ la somme des z positives est égale à la somme des z négatives. Mais $vu + ax + b = 0$ est une équation à la Ligne droite. Ainsi une Courbe CMNn étant donnée, on peut mener une Droite BQD telle que la prenant pour l'Axe des abscisses, la somme des ordonnées positives QM, QN, &c. sera égale à la somme des ordonnées négatives Qn, &c. [§. *préc.*].

II. Le coëfficient du troisiéme terme d'une équation est la somme de tous les produits qu'on peut faire de ses racines prises deux à deux. Cette somme est donc nulle, les produits positifs QM×QN &c. sont égaux aux négatifs QM×Qn + QN×Qn &c, lorsque ce coëfficient est zéro : ce qui donne l'équation $\frac{v.v-1}{1.2} v^2 + \frac{v-1}{1} (ax + b) + (cxx + dx + e) = 0$ à une Ligne du second Ordre. Donc lorsqu'une Courbe du troisiéme Ordre ou d'un Ordre supérieur est donnée, on peut toûjours décrire une Ligne du second Ordre qui coupe ses ordonnées, de maniére que, faisant tous les produits qu'on peut faire en multipliant deux à deux les parties d'une ordonnée comprises entre ces deux Lignes, la somme des produits positifs sera égale à la somme des négatifs.

III. De même, puisque le coëfficient du quatriéme terme d'une équation est la somme des produits des racines prises trois à trois, si l'on fait ce coëfficient égal à zéro, on aura l'éq : $\frac{v.v-1.v-2}{1.2.3} u^3 + \frac{v-1.v-2}{1.2} (ax + b) u^2 + \frac{v-2}{1} (cxx + dx + e) u + (fx^3 + gxx + hx + i) = 0$ à une Ligne du troisiéme Ordre. On peut donc assurer

CH. VI. §. 69. assurer, qu'une Ligne du quatriéme Ordre ou de quelque Ordre supérieur étant donnée, on peut toûjours tracer une Ligne du troisiéme Ordre qui partage les ordonnées de la prémiére Ligne, de maniére que faisant tous les produits possibles de trois dimensions avec les parties d'une ordonnée comprises entre ces deux Lignes, la somme des produits positifs sera égale à la somme des produits négatifs. PL. VIII.

Et ces Propositions se peuvent continuer à l'infini *.

70. LES Courbes, qui divisent ainsi les ordonnées d'une autre Courbe, en peuvent être apellées les *Diamétres Curvilignes*. On attache quelquefois à ce mot de Diamétre une signification bien plus resserrée. On désigne par ce nom un Axe qui coupe les ordonnées de façon que chaque abscisse ait des ordonnées positives & négatives égales. Il coupe donc l'espace terminé par la Courbe en deux parties égales & qui sont même semblables lorsque les ordonnées sont perpendiculaires à l'Axe. Mr. NEWTON apelle ces Diamétres, des *Diamétres absolus* †.

L'on voit d'abord qu'en ce cas chaque abscisse a des ordonnées en nombre pair, puisqu'à chaque ordonnée positive il répond une ordonnée négative égale. Donc la plus haute puissance de y doit être une puissance paire. Mais de plus il faut que toutes les puissances impaires de y manquent dans l'équation. Car, si chaque ordonnée positive a une ordonnée négative égale, chaque racine positive $[+X]$ de y aura une racine négative correspondante $[-X]$, en sorte que l'équation aura autant de racines $y+X=0$ que de racines $y-X=0$. On peut joindre

* STIRLING, *Lin. tert. Ord.* Newton. pag. 75.
† NEWTON, *Enum. lin. tert. Ord.* §. III. à la fin.

 dre ces racines par couples & en faire l'équation du second dégré $yy - XX = 0$, où il n'y a point de puissance impaire de y. Donc, dans l'équation de la Courbe toute composée de pareilles équations, on ne verra aucune puissance impaire de y.

71. Il est clair par les §§. préced. que tout Diamétre d'une Ligne du second Ordre est un Diamétre absolu. Car, dans cet Ordre, chaque abscisse ne peut avoir que deux ordonnées [§. 41]. Donc, si leur somme est égale à zéro, ce qui est le propre des Diamétres [§. 67], il faut que l'une étant positive & l'autre négative, elles soient égales : ce qui constituë la nature du Diamétre absolu [§. *préc.*]

Par conséquent, quelque position qu'on donne aux ordonnées d'une Ligne du second Ordre, pourvû que chaque abscisse ait deux ordonnées, on pourra toûjours leur trouver un Diamétre absolu. Car quelque position qu'ayent les ordonnées d'une Courbe, on peut toûjours leur trouver un Diamétre, pourvû que, dans l'équation, la plus haute puissance d'y ait le même exposant que l'Ordre de la Courbe [§. 68]. Donc, dans le second Ordre, pourvû qu'y s'éléve au quarré, c'est-à-dire, pourvû que chaque abscisse ait deux ordonnées [§. 41], la Courbe aura un Diamétre. Et dans cet Ordre, tout Diamétre est absolu.

72. Il n'en est pas de même dans les Ordres supérieurs. Une Courbe peut n'avoir aucun Diamétre absolu, parce qu'encore qu'on puisse toûjours faire évanouïr quelques-uns des termes de l'équation qui renferment des puissances impaires d'y, il n'est pas toûjours possible de les faire tous disparoître.

Dans les Courbes, par ex. du troisiéme Ordre, représentées généralement par l'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx$

CH. VI. §. 72. $+fxx+gy^3+hxyy+ixxy+lx^3=0$, si l'on demande quel doit être le raport des coëfficients a, b, c, d, &c. qui permet que la Courbe ait un Diamétre absolu : On peut répondre 1°. que cela aura lieu quand b, e, g, & i, qui multiplient les puissances impaires d'y, sont zéro : & alors la Ligne même des abscisses est le Diamétre. Car l'équation, réduite à $yy+\frac{lx^3+fx^2+cx+a}{bx+d}=0$, a deux racines égales, l'une positive, l'autre négative, $\pm\sqrt{-\frac{lx^3+fx^2+cx+a}{bx+d}}$, à moins qu'elles ne soient toutes deux imaginaires. 2°. La Courbe peut avoir un Diamétre absolu différent de l'Axe des abscisses. Et pour déterminer en quel cas la chose est possible, on donnera aux deux Axes une position indéterminée, en substituant $m+pz+ru$ à x & $n+qz+su$ à y [§. 24], ou seulement $qz+su$, parce que la position de l'Origine sur l'Axe des abscisses étant indifférente, on peut la placer au point où la nouvelle Ligne des abscisses coupe la primitive, ce qui rend $n=0$. Après cette substitution, si on égale à zéro les coëfficients des termes u, uz, uzz, u^3 qui contiennent les puissances impaires de l'ordonnée u, on aura ces quatre équations. PL. VIII.

$(A)\ldots bs+cr+ems+2fmr+imms+3lmmr=0$

$(B)\ldots 2dqs+eps+eqr+2fpr+2hmqs+2imqr+2imps+6lmpr=0$

$(C)\ldots 3gqqs+3hpqs+hqqr+2ipqr+ipps+3lppr=0$

$(D)\ldots gs^3+hrss+irrs+lr^3=0$

On peut déterminer le raport de s à r, ou la valeur de la fraction $\frac{s}{r}$ par l'éq : $D\ldots g\frac{s^3}{r^3}+h\frac{s^2}{r^2}+i\frac{s}{r}+l=0$, qui étant du troisiéme dégré a toûjours au moins une racine réelle. Ce raport ainsi déterminé, si on le substi-

PL. VIII. CH. VI. §. 72.

substitué dans l'éq: A réduite à cette forme $m^2 + \frac{2f + e\frac{s}{r}}{3l + i\frac{s}{r}} m$

$+ \frac{c + b\frac{s}{r}}{3l + i\frac{s}{r}} = 0$, on déterminera la valeur de m. Et

comme l'éq : B donne $\frac{q}{p} = \frac{(e + 2im)\frac{s}{r} + 2f + 6lm}{c + 2im + (2d + 2bm)\frac{s}{r}}$, le

raport de q à p est déterminé, dès que $\frac{s}{r}$ & m sont connus. Mettant donc ces valeurs de $\frac{q}{p}$ & de $\frac{s}{r}$ dans l'éq: C qui se réduit à $3g.\frac{q^2}{p^2}.\frac{s}{r} + 2h.\frac{q}{p}.\frac{s}{r} + i.\frac{s}{r} + h.\frac{q^2}{p^2}$ $+ 2i.\frac{q}{p} + 3l = 0$, on aura l'équation qui exprime le raport que doivent avoir entr'eux les coëfficients $b, c, d, e, f, g, h, i, l$, afin que la Courbe soit susceptible de Diamétres absolus.

Mais ce Calcul sera fort long, si l'on ne trouve quelques abrégez. On y suppléera en quelque sorte, si l'on considére qu'on peut toûjours faire évanouïr le terme u^3 par la résolution de l'équat: $g\frac{s^3}{r^3} + h\frac{s^2}{r^2} + i\frac{s}{r} + l = 0$. qui détermine la position des ordonnées qui ne repugne pas à un Diamétre absolu. Cette équation ne pouvant avoir qu'une ou trois racines réelles, il en suit, qu'une Ligne du troisiéme Ordre ne sauroit avoir qu'un ou trois Diamétres absolus. Mais toute Ligne de cet Ordre n'en est

CH. VI. §. 72. est pas susceptible. Supposant que l'équation de la Courbe, après l'évanouïssement du terme u^3, soit $(Az+B)u^2 + (Czz+Dz+E)u + Fz^3 + Gzz + Hz + I = 0$, il faut encore voir si l'on peut donner à l'axe des Abscisses une position qui fasse disparoitre le second terme. Car on ne peut plus changer la position des ordonnées sans faire reparoître u^3. On donnera donc à l'Axe des abscisses une position quelconque [§. 25] en substituant pz pour z & $m+u+qz$ pour u; ce qui transforme l'équation en $(Apz+B)(mm+2mu+uu+2mqz+2quz+qqzz) + (Cppzz+Dpz+E)(m+u+qz) + Fp^3z^3 + Gp^2z^2 + Hpz + I = 0$, dont les termes qui renferment la prémiére puissance d'u [ce sont ceux qu'il faut anéantir] sont $(Apz+B)(2mu+2quz) + (Cppzz+Dpz+E)u$, ou $(2Apq+Cpp)uzz + (2Amp+2Bq+Dp)uz + (2Bm+E)u$. Ces trois termes égalés à zéro donnent ces trois équations $2Apq+Cpq=0$, $2Amp+2Bq+Dp=0$, & $2Bm+E=0$. Des deux prémiéres on déduit $2\frac{A}{C} = -\frac{p}{q} = \frac{2B}{2Am+D}$. Donc $\frac{A}{C} = \frac{B}{2Am+D} =$ [puisque l'éq : $2Bm+E=0$ donne $2m = -\frac{E}{B}$] $\frac{B}{D-\frac{AE}{B}} = \frac{BB}{DB-AE}$. Ainsi on a l'éq : $CBB = ABD - AAE$, ou $AAE - ABD + BBC = 0$, pour déterminer le raport des coëfficients A, B, C, D, E propres à donner à la Courbe un Diamétre absolu. PL. VIII.

73. A L'IMITATION des Diamétres, Mr. DE BRAGELONGNE * a imaginé les *Contre-Diamétres*. C'est le

S 3 nom.

* *Hist. de l'Acad.* 1732. pag. 70.

Pl. VIII. nom qu'il donne à un Axe des abſciſſes tel que les abſ- Ch. VI.
ciſſes oppoſées égales ont des ordonnées oppoſées éga- §. 73.
les. Il coupe donc la Courbe en deux parties égales & ſemblables, comme le Diamétre, mais avec cette différence, que les parties ſemblables ſont oppoſées : celle qui eſt dans l'angle des coordonnées poſitives étant égale & ſemblable à celle qui ſe trouve dans l'angle des coordonnées négatives, &c. ſi bien que, quand un Axe eſt en même tems Diamétre & Contre-Diamétre, la Courbe ſe trouve partagée par ſes Axes en quatre parties égales & ſemblables ; à ſuppoſer, comme on le fait ici, que les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes. Telle eſt la Courbe qu'on a examinée au §. 16.

L'équation d'une Courbe, dont la Ligne des abſciſſes eſt un Contre-Diamétre, doit être telle que, changeant $+x$ en $-x$, & $+y$ en $-y$, elle reſte préciſément la même. Car alors les $-x$ égales aux $+x$ auront des $-y$ égales aux $+y$. Cela a lieu toutes les fois que, dans l'équation miſe ſur le Triangle analytique [§. 35], il manque tous les Rangs pairs, à compter du plus haut Rang en deſcendant. Ainſi l'éq : (A) du quatriéme Ordre, à qui il manque le ſecond & quatriéme Rangs, ne changera

(A)

$$my^4 + uxy^3 + oxxyy + px^3y + qx^4$$

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

$$+ dyy + exy + fxx$$

$$\bullet \quad \bullet$$

$$+ a$$

point, ſi au lieu de $+x$ on écrit $-x$ & $-y$ au lieu de $+y$. Une pareille ſubſtitution changera l'éq : (B) du troiſiéme Ordre, à qui il manque auſſi les Rangs pairs, en l'éq : (C), qui eſt juſtement la même, quoique les ſi-

gnes

CH. VI. §. 73. gnes soient changez : Car si $+B=0$, aussi $-B=0$, c'est-à-dire, $C=0$. PL. VIII.

$$\begin{array}{cc} (B) & (C) \\ +gy^3 + bxyy + ixxy + lx^3 & -gy^3 - bxyy - ixxy - lx^3 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet & \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ +by + cx & -by - cx \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

74. QUAND l'équation d'une Courbe indique un Contre-Diamétre, on peut changer, comme on voudra, la position des abscisses & des ordonnées ; elle conservera son Contre-diamétre, pourvû qu'on conserve la même Origine. Car cette transposition des abscisses & des ordonnées se fait [§. 25] en substituant $pz+ru$ à x, & $qz+su$ à y. Or puisqu'ici les z & les u sont du même dégré que les x & les y, il est clair que z & u dans l'équation transformée seront au même dégré que x & y dans les termes correspondants de la proposée : de sorte que les termes, qui naissent de la substitution faite en un Rang quelconque de l'équation proposée, restent dans le même Rang de la transformée. Donc, puisque, la Courbe ayant un Contre-Diamétre, les Rangs pairs manquent dans la proposée [§. *préc.*], ils manqueront aussi dans la transformée. Ainsi la Ligne des z est un Contre-Diamétre, aussi bien que la Ligne des x.

Cela n'est pas moins évident par cette Démonstration. Soit PAp le Contre-Diamétre d'une Courbe MAm, A l'Origine, d'où prenant les abscisses AP, Ap opposées & égales, on aura les ordonnées PM, pm aussi opposées & égales. Donc les triangles APM, Apm sont égaux & semblables. Donc AM est égale & opposée à Am. Maintenant, si l'on change l'Axe des abscisses & qu'on lui donne une position quelconque QAq, pourvû qu'il passe par la Fig. 67.

même

PL. VIII. même Origine A, & qu'on méne auſſi comme on voudra les ordonnées MQ, mq; puiſqu'elles ſont paralléles, les triangles AMQ, Amq ſont ſemblables & égaux, à cauſe de AM égale à Am. Donc les abſciſſes opposées & égales AQ, Aq, ont des ordonnées QM, qm opposées & égales. Donc QAq eſt auſſi un Contre-Diamétre. CH. VI. § 74.

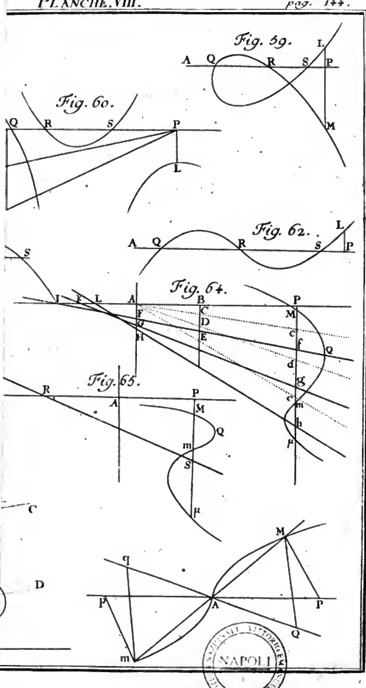
75. ON VOIT par-là que le Contre Diamétre, dans les Courbes qui en ſont ſuſceptibles, dépend du choix de l'Origine. Elle doit être placée de maniére qu'elle diviſe en deux parties égales toutes les droites MAm, qui, menées par ce point A, ſe terminent de part & d'autre à la Courbe. De ſorte que de toutes parts de l'Origine les parties directement opposées de la Courbe ſont une ſimétrie parfaite. Le Point qui a cette ſituation s'apelle le *Centre* de la Courbe *.

76. Pour reconnoître par l'équation d'une Courbe, ſi elle peut avoir un Centre, & pour déterminer le raport de ſes coëfficients qui l'en rend ſuſceptible, auſſi bien que la poſition de ce Centre; on tranſportera l'Origine en un point quelconque, écrivant [§. 25 ou 29] $m + z$ pour x, & $n + u$ pour y dans l'équation de cette Courbe. Puis on ſuppoſera que les rangs pairs, à compter dès le plus haut, s'évanouïſſent, & les équations que donne cette ſuppoſition ſont celles qui déterminent le raport des coëfficients propre à donner un Centre à la Courbe, & qui fixent la poſition de ce Centre.

Exemple I. L'équation générale des Lignes du ſecond Ordre eſt $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$. Par la ſubſtitution de $m + z$ à x, & de $n + u$ à y, elle ſe change en

duu

* NEWTON, *Enumer. lin. tert. Ord.* §. III. Mr. DE GUA *Uſage de l'Anal. &c.* pag. 1.


Fig. 59.
A Q R S P
L
M
Fig. 60.
Q R S P
L
Fig. 62.
A Q R S P
L
Fig. 64.
I K L A B P
F C M
G D
H E
c
f
Q
d
g
e
m
h
μ
Fig. 65.
R A P
M
Q
m
S
μ
C
D
q
p A P
M
Q
m

CH. VI. §. 76. PL. VIII.

$$\left.\begin{array}{l} duu + ezu + fzz \\ +(b+em+2dn)u + (c+en+2fm)z \\ +(a+bn+cm+dnn+enm+fmm) \end{array}\right\} = 0$$

On fera diſparoître le ſecond Rang, en égalant $b+em+2dn$ & $c+en+2fm$ chacun à zéro, d'où l'on tirera $m=\frac{be-2cd}{4df-ee}$ & $n=\frac{ce-2bf}{4df-ee}$. Donc, en général, les Courbes du ſecond Ordre peuvent avoir un Centre, dont la poſition eſt déterminée par ces valeurs de m & de n. Car ce Centre eſt le point dont m eſt l'abſciſſe & n l'ordonnée.

Il n'y a qu'une exception; c'eſt quand $4df-ee=0$. Alors m & n ſont infinies; ce qui tranſporte le Centre infiniment loin & le fait diſparoître.

Cependant, ſi $4df-ee$ étant zéro, $be-2cd$ eſt auſſi zéro, on aura $e=\frac{2cd}{b}$, & cette valeur ſubſtituée dans $4df-ee=0$, la change en $4df-\frac{2cde}{b}=0$, ou diviſant par $\frac{2d}{b}$, en $2bf-ce=0$. Donc $ce-2bf$ eſt auſſi zéro, & par conſéquent n auſſi bien que m s'expriment par la fraction $\frac{0}{0}$, qui eſt d'une valeur indéterminée. La poſition du Centre eſt donc indéterminée. Mais dans ce cas, l'équation générale, réduite à $a+by+bx\sqrt{\frac{f}{d}}+dyy+2xy\sqrt{df}+fxx=0$, eſt réductible en ces deux équations du premier Ordre $y\sqrt{d}+x\sqrt{f}+\frac{b+\sqrt{(bb-4ad)}}{2\sqrt{d}}=0$, & $y\sqrt{d}+x\sqrt{f}+\frac{b-\sqrt{(bb-4ad)}}{2\sqrt{d}}=0$. Elle n'exprime donc que deux Droites parallèles [§.40],

PL. VIII. [§. 40], qui ont une infinité de Centres, affavoir tous les points de la Droite, qui leur eft parallèle & autant éloignée de l'une que de l'autre. CH. VI. §. 76.

Au refte, tout Contre-Diamétre d'une Ligne du fecond Ordre en eft auffi un Diamétre abfolu. Car l'équation, qui exprime la nature d'une Ligne du fecond Ordre relativement à l'Origine placée au Centre, aura cette forme $Ayy + Bxy + Cxx + D = 0$, puifque le fecond Rang y doit manquer. Et l'on peut toujours faire difparoître le terme Bxy fans changer l'Origine ni l'Axe des abfciffes, mais en donnant feulement aux ordonnées une pofition convenable, c'eft-à-dire, en faifant $y = 2Cu$ & $x = z - Bu$ [§. 25], ce qui transformera l'éq : $Ayy + Bxy + Cxx + D = 0$, en $(4ACC - BBC)uu + Czz + D = 0$, où il n'y a aucune puiffance impaire de u. Ce qui fait voir que la Ligne des z eft un Diamétre abfolu, auffi bien qu'un Contre-Diamétre.

Exemple 2. L'équation générale des Lignes du troifiéme Ordre, $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ix^2y + lx^3 = 0$, par la fubftitution de $m + z$ à x, & de $n + u$ à y, fe change en $0 =$

$$\begin{array}{c} gu^3 + hu^2z + iuz^2 + lz^3 \\ (3gn + hm + d)u^2 + (2hn + 2im + e)uz + (3lm + in + f)zz \\ \left(\begin{array}{c} 3gnn + 2hmn + imm \\ + 2dn + em + b \end{array}\right)u + \left(\begin{array}{c} 3lmm + 2imn + hnn \\ + 2fm + en + c \end{array}\right)z \\ + \left(\begin{array}{c} gn^3 + hn^2m + inm^2 + lm^3 \\ + dn^2 + enm + fm^2 \\ + bn + cm \\ + a \end{array}\right) \end{array}$$

Si la Courbe a un Centre, le fecond & quatriéme Rang doivent difparoître. L'évanouïffement du fecond donne ces trois équations $3gn + hm + d = 0$, $2hn + 2im + e = 0$ &

CH. VI. § 76. & $3lm + in + f = 0$. La comparaison de la 1e. & de la 3e. donnent $m = \frac{di - 3fg}{9gl - hi}$ & $n = \frac{fh - 3dl}{9gl - hi}$. Et ces valeurs substituées dans la 2e., la changent en $ehi - 2dii - 2fhh + 6dhl + 6fgi - 9egl = 0$, équation qui exprime un raport des coëfficients d, e, f, g, h, i, l, sans lequel la Courbe ne sauroit avoir un Centre. Il faut de plus substituer ces mêmes valeurs de m & de n, dans l'éq: $gn^3 + hnnm +$ &c $= 0$, faite en égalant le 4e. Rang à zéro, & cette substitution donnera un second raport des coëfficients également nécessaire pour que la Courbe du troisiéme Ordre puisse avoir un Centre : mais ce raport seroit fort compliqué. Il sera plus simple, en appliquant le Principe à une équation moins composée que la générale. PL. VIII.

Par ex. l'éq : $xyy + Ey + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ represénte la plus grande partie des Courbes du troisiéme Ordre. En la comparant avec l'éq: générale, on aura $a = D$, $b = E$, $c = C$, $d = 0$, $e = 0$, $f = B$, $g = 0$, $h = 1$, $i = 0$, $l = A$. Les trois équations que donne l'évanouïssement du 2e. rang, se réduisent donc à $0n + m + 0 = 0$, $2n + 0m + 0 = 0$, & $3Am + cn + B = 0$, d'où l'on tire $m = 0$, $n = 0$, $B = 0$. Et ces valeurs substituées dans l'équation qui résulte de l'évanouïssement du 4e. Rang, la réduisent à $0 = a = D$. Ainsi la Courbe ne peut avoir de Centre, à moins que B & D ne soient zéro, & alors ce Centre est sur l'Origine même, puisque m & n sont l'une & l'autre égales à zéro.

CHAPITRE VII.

Détermination des plus grands termes d'une équation. Principes de la Méthode des Series ou Suites infinies.

77. IL N'Y A rien de plus remarquable dans les Courbes, que les Branches infinies, & les Points singuliers : c'est le nom qu'on donne aux Points d'une Courbe qui ont quelque chose qui les distingue des autres. C'est par le nombre, l'espéce & la position des Branches infinies, que les Courbes se divisent en Genres & Espèces : & c'est la nature, le nombre & la position des Points singuliers, qui caractérisent les diverses Courbes d'une même Espèce.

Voici le Principe qui nous guidera dans ces Recherches. Si dans une équation indéterminée, on suppose une des variables x ou y infinie ou infiniment petite, cette supposition rend certains termes de l'équation infiniment plus grands que les autres. On peut donc retrancher ceux-ci sans scrupule, parce qu'ils ne sont rien en comparaison des plus grands, qui forment seuls toute l'équation. Par ce retranchement elle devient plus simple & plus traitable. Il ne s'agit que d'avoir une Régle pour discerner dans une équation proposée, quels sont les termes que la supposition d'x ou d'y infiniment grande ou infiniment petite, rend infiniment plus grands que tous les autres.

78. IL EST bien clair que quand une variable devient infinie, toutes ses puissances & toutes ses racines sont aussi infinies.

infinies. * Mais ces infinis conſtituent divers *Ordres*, ſelon les dégrés de leurs expoſants. Quand x eſt infinie, ſon quarré xx, qui eſt le produit de l'infini multiplié par l'infini, ou l'infini repeté infiniment ſouvent, ſon quarré, dis-je, eſt infiniment infini, ou l'infini du ſecond Ordre. Le cube xxx, qui eſt le quarré xx multiplié par l'infini x, eſt l'infini du troiſiéme Ordre, & ainſi de ſuite. Ces Ordres de l'infini ſont les *Ordres potentiels*. Ch. VII. §. 78.

Il faut auſſi reconnoître les *Ordres radicaux*. Quoique $x^{1:2}$, ou $\sqrt{x}$ ſoit infinie, aucun fini ne pouvant l'égaler, elle eſt pourtant infiniment moindre que x, puiſqu'elle eſt moyenne proportionelle entre x & l'unité, entre l'infini & le fini. Et $x^{1:3}$, ou $\sqrt[3]{x}$, auſſi infinie, eſt infiniment moindre que $x^{1:2}$.

En général, toute puiſſance, parfaite ou imparfaite, de l'infini [x] eſt infiniment plus grande que toute autre puiſſance du même infini, dont l'expoſant eſt inférieur au ſien. x^{m+n} eſt infiniment plus grande que x^m, parce que x^{m+n} eſt x^m multipliée par x^n. Or x^n eſt infinie. Donc x^{m+n} eſt x^m priſe une infinité de fois.

Mais les puiſſances d'un expoſant négatif, dont la racine eſt infinie, ſont des infiniment petits. Par ex. x^{-1}, qui eſt $\frac{1}{x}$, eſt infiniment petite. Car le quotient d'une Diviſion diminuant dans la même proportion que le diviſeur augmente, le fini [1] diviſé par l'infini [x] aura un quotient [$\frac{1}{x}$] infiniment petit. Et x^{-2}, ou $\frac{1}{xx}$, eſt encore infiniment plus petite, puiſque c'eſt l'infiniment petit

T 3

* Fontenelle, *Geom. de l'Infini.* Part. I. Sect. 2.

Ch. VII. §. 78. tit [$\frac{1}{x}$] divisé par l'infini [x], ou l'infinitiéme partie de l'infiniment petit. Par la même raison x^{-3} est d'un Ordre encore plus bas, & ainsi de suite. Mais $x^{-1:2}$, ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$, quoiqu'infiniment petite, puisque $\sqrt{x}$ est infiniment grande, $x^{-1:2}$, dis-je, est infiniment moins petite que x^{-1}: car $x^{-1:2}$ [ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$] est la moyenne proportionelle entre 1 & x^{-1} [ou $\frac{1}{x}$].

79. Quand on suppose une variable infiniment petite, toutes ses puissances & toutes ses racines d'un exposant positif sont aussi infiniment petites; mais avec la même gradation & la même distinction d'Ordre que dans l'infini, en sorte que de deux puissances d'une même racine infiniment petite, celle qui a le plus grand exposant est infiniment plus petite que l'autre. Si x est infiniment petite, xx est encore infiniment plus petite, ou l'infiniment petit du second Ordre, xxx celui du troisiéme Ordre, &c. Car 1, x, xx, xxx, *&c.* sont des quantités proportionelles; de sorte que 1 étant infiniment plus grand que x, x est infiniment plus grande que xx, & xx que xxx, & en général x^m est infiniment plus grande que x^{m+n}.

A ces *Ordres potentiels* des infiniment petits, il faut joindre les *Ordres radicaux*. Puisque $x^{1:2}$ est moyenne proportionelle entre le fini [1] & l'infiniment petit [x], elle est infiniment petite, quoiqu'elle le soit infiniment moins

moins que x. Et $x^{1:3}$, autre infiniment petit, l'est infiniment moins que $x^{1:2}$. Car $x^{1:3}$ [$=x^{2:6}$] est à $x^{1:2}$ [$=x^{3:6}$] comme le fini [1] à l'infiniment petit [$x^{1:6}$]. CH. VII. §. 79.

Mais la racine x étant infiniment petite, les puissances ou racines d'un exposant négatif sont infinies. Ainsi x^{-1} [ou $\frac{1}{x}$] est l'infini du prémier Ordre, parce que le fini [1] contient l'infiniment petit [x] une infinité de fois. Et x^{-2} [ou $\frac{1}{xx}$], étant l'infini [$\frac{1}{x}$] multiplié par lui-même, est l'infini de l'infini, ou l'infini du second Ordre, &c. Mais $x^{-1:2}$ [ou $\frac{1}{x^{1:2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$] est un infini radical, &c.

80. CETTE subordination des infinis & des infiniment petits étant bien établie, il semble d'abord que rien ne soit plus aisé que de reconnoitre dans une équation les termes que la supposition d'x ou d'y infinie ou infiniment petite rend infiniment plus grands que les autres. Si on suppose x infiniment grande, il semble qu'on n'ait qu'à choisir les termes où x a le plus grand exposant: au contraire, si on suppose x infiniment petite, on croiroit n'avoir qu'à prendre les termes où son exposant est le plus petit. Mais ce seroit conclure avec précipitation. Car l'équation, ou la Courbe qu'elle représente, peut être telle qu'à x infinie réponde y infinie, ou finie, ou infiniment petite. Il faudra donc, du moins par raport aux termes où entrent x & y, avoir égard aux exposants de ces deux variables. Si, par ex., le terme x^3y est celui où x a le plus grand exposant,

CH. VII. §. 80. posant, on ne doit pas se presser de conclure que ce terme est infiniment plus grand que xy^4 autre terme de l'équation. Car si x & y sont deux grandeurs infinies d'un même Ordre, x^3y n'est que du quatriéme Ordre de l'infini, au lieu que xy^4 est du cinquiéme Ordre. C'est donc plutôt xy^4 qui surpasse infiniment x^3y.

On ne doit pas non plus juger qu'un terme soit d'un Ordre supérieur à un autre, parce que les exposants de x & de y pris ensemble font une somme plus grande dans l'un que dans l'autre. Par ce principe on concluroit que xy^4 est infiniment plus grand que x^3y, & cela seroit vrai, si x & y étoient deux infinis du même Ordre. Mais si x étant infinie, y est ou infiniment petite, ou finie, ou seulement d'un Ordre plus petit que $x^{2:3}$, x^3y l'emporte infiniment sur xy^4.

Quel moyen y aura-t-il donc pour discerner les plus grands termes d'une Equation, puisqu'il semble qu'on ne les peut reconnoître sans savoir de quel Ordre est y par raport à x, & qu'on ne peut découvrir ce raport de y à x sans avoir séparé des autres les plus grands termes de l'équation? Quel fil nous conduira dans ce Labyrinthe?

81. D'ABORD il est évident qu'on ne sauroit suppose qu'un seul terme de l'équation soit infiniment plus grand que tous les autres. Car tous les autres termes s'évanouïroient en comparaison de celui-là & pourroient être retranchés. Alors ce terme seul seroit égal à zéro, & le plus grand terme de l'équation ne seroit rien: ce qui est absurde.

Les plus grands termes sont donc au moins au nombre de deux. Mais rien n'empêche qu'on ne prenne deux termes quelconques, & qu'on ne les suppose les plus grands de l'équation; à moins que les conséquences de cette supposition ne détruisent la supposition même.

Qu'on

Qu'on propose, par ex. l'éq: $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$, & qu'on suppose d'abord x infinie. On commencera par comparer x^2y & ay^2, en supposant que ces termes sont toute l'équation, & qu'étant infiniment plus grands que $-a^2x$, ce terme peut être impunément retranché. On aura donc $x^2y + ay^2 = 0$, ou $x^2y = -ay^2$, & divisant par $-ay$, $y = -\frac{x^2}{a}$. Donc x étant infinie, y est un infini du second Ordre. Donc les termes x^2y & ay^2 sont des infinis du quatriéme Ordre, en comparaison desquels a^2x, qui n'est qu'un infini du premier Ordre, s'évanouït. Il n'y a donc rien d'absurde à supposer que x^2y & ay^2 sont les plus grands termes de l'équation. Ch. VII. §. 81.

On peut ensuite comparer x^2y & $-a^2x$, & supposer toute l'équation réduite à $x^2y - a^2x = 0$, ce qui, transposant & divisant par x^2, donne $y = \frac{a^2}{x}$. Donc x étant infinie, y est infiniment petite, & dans cette supposition, le terme ay^2 est un infiniment petit du second Ordre, qui s'évanouït auprès des termes infinis x^2y & a^2x. On a donc pû faire sans absurdité cette supposition.

Il reste à comparer les termes ay^2 & $-a^2x$. S'ils sont infiniment plus grands que x^2y, toute l'équation se réduit à $ay^2 - a^2x = 0$, qui donne $y = a^{1:2}x^{1:2}$. Mais cette valeur de y, substituée dans x^2y, le change en $a^{1:2}x^{5:2}$. Ce terme x^2y, ou $a^{1:2}x^{5:2}$, qu'on supposoit infiniment plus petit que les deux autres ay^2 [$= a^2x$], & $-a^2x$, est donc infiniment plus grand, puisque son exposant [$5:2$] surpasse le leur [1]. Ainsi la supposition se détruit elle-même & ne peut subsister.

Supposons maintenant x infiniment petite. Et si l'on compare d'abord les termes ay^2 & $-a^2x$ en les suppo-

CH. VII. §. 81. sant infiniment plus grands que x^2y, cette suppoſition ne méne à aucune abſurdité. Elle réduit l'éq : à $ay^2 - a^2x = 0$, qui donne $y = a^{1:2} x^{1:2}$. Et cette valeur ſubſtituée dans x^2y, le transforme en $a^{1:2} x^{5:2}$, où l'expoſant d'x [5 : 2] eſt plus grand que dans les deux autres termes ay^2 [$= a^2x$] & $-a^2x$. Or x étant infiniment petite, les puiſſances d'un plus haut expoſant ſont infiniment plus petites que celles d'un expoſant inférieur [§. 79]. Donc x^2y eſt infiniment plus petit que ay^2 & que $-a^2x$; ce qui eſt conforme à la ſuppoſition.

Mais, ſi on ſuppoſoit que le terme $-a^2x$ eſt infiniment plus petit que les deux autres, on réduiroit l'équation à $x^2y + ay^2 = 0$, ce qui donne $y = -\frac{x^2}{a}$. Ainſi x^2y & ay^2 ſe transforment en $-\frac{x^4}{a}$ & $+\frac{x^4}{a}$. Ce ſont donc des infiniment petits du quatriéme Ordre, qui diſparoiſſent auprès de $-a^2x$, infiniment petit du premier Ordre. La ſuppoſition ſe contredit donc à elle-même.

J'en dis autant de la ſuppoſition, qui établiroit x^2y & $-a^2x$ pour les plus grands termes de l'équation. Il en réſulte $y = \frac{aa}{x}$, c'eſt-à-dire, y infinie, quand x eſt infiniment petite. Donc le terme ay^2, qu'on ſuppoſoit le plus petit, eſt réellement infiniment plus grand que les autres: ce qui détruit la ſuppoſition.

Par tout ce détail il paroît, qu'à ſuppoſer x infinie, l'équation propoſée $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$ ſe réduit à ces deux-ci, $x^2y + ay^2 = 0$, ou $xx + ay = 0$, & $x^2y - a^2x = 0$, ou $xy - aa = 0$: & qu'à ſuppoſer x infiniment petite, elle ſe réduit à celle-ci ſeulement, $ay^2 - a^2x = 0$, ou $y^2 - ax = 0$.

82. MAIS

82. MAIS ce qui a été facile dans un Exemple, où l'équation proposée n'avoit que trois termes, deviendroit fort pénible, si l'on avoit eu une équation plus complexe, où le nombre des termes engageroit à beaucoup de comparaisons, la plûpart infructueuses. Dans ces Cas-là, il est fort commode de se servir du Triangle analytique, & de placer chaque terme de l'équation dans la Case qui lui est assignée. En concevant ce Triangle couché sur la bande sans x, lorsqu'on suppose x infinie ou infiniment petite [on le coucheroit sur la bande sans y si la supposition étoit de y infinie ou infiniment petite] il est clair que de de tous les termes qui se trouvent dans une même bande perpendiculaire, on ne peut regarder comme un des plus grands termes de l'équation que celui qui occupe la plus haute place de cette bande, en supposant x infinie, ou celui qui y est placé le plus bas, en prenant x pour infiniment petite. Car dans tous les termes d'une même colomne, y ayant le même exposant, leur subordination dépend uniquement des exposants d'x. Donc, x étant infinie, le plus grand terme de la colomne est celui où x a le plus grand exposant, c'est-à-dire, celui qui est placé le plus haut; & x étant infiniment petite, le plus grand terme de la colomne est celui où x a le plus petit exposant, celui qui est placé le plus bas [§§. 78. 79]. CH. VII. §. 82.

Ch. VII. §. 82.

								x^8
							x^7y	x^7
						x^6y^2	x^6y	x^6
					x^5y^3	x^5y^2	x^5y	x^5
				x^4y^4	x^4y^3	x^4y^2	x^4y	x^4
			x^3y^5	x^3y^4	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3
		x^2y^6	x^2y^5	x^2y^4	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2
	xy^7	xy^6	xy^5	xy^4	xy^3	xy^2	xy	x
y^8	y^7	y^6	y^5	y^4	y^3	y^2	y	1

83. Cette considération sert déjà beaucoup à diminuer les nombre des comparaisons qu'il faudroit faire pour discerner les plus grands termes d'une équation [§. 81]. Mais pour éviter toutes les comparaisons inutiles, il faut y joindre cette observation. C'est que si on compare deux termes quelconques, en les supposant d'un même Ordre, & qu'on méne une ligne droite par les centres des Cases où logent ces deux termes, tous les termes qui sont dans les Cases dont les centres se trouvent sur cette même Droite, seront aussi du même Ordre que les termes comparés. Et que toutes les Cases, dont les centres sont au-dessus de cette ligne droite renferment des termes d'un Ordre supérieur ; comme, au contraire, les Cases dont les centres sont au-dessous de la ligne droite, contiennent des termes d'un Ordre inférieur.

Ainsi, quand on veut comparer les termes x^2 & x^3y^2, en

en les ſuppoſant d'un même Ordre ; ils ſeront encore d'un même Ordre, après diviſé l'un & l'autre par une même grandeur x^2. Donc $[\frac{x^2}{x^2}=]\,1$ & $[\frac{x^3y^2}{x^2}=]\,xy^2$ ſont d'un même Ordre. L'unité étant une grandeur finie, xy^2 eſt auſſi une grandeur finie. Qu'on la nomme R^2. On aura donc $xy^2=R^2$, ou $y^2=\frac{R^2}{x}$, & $y=\frac{R}{\sqrt{x}}=Rx^{-\frac{1}{2}}$. Si on méne une Droite, ou qu'on applique une Régle aux centres des Caſes x^2 & x^3y^2, on verra qu'elle paſſe auſſi par le centre de la Caſe x^4y^4, &, en prolongeant le Triangle, par les centres des Caſes x^5y^6, x^6y^8, *&c.* Subſtituant dans ces termes, au lieu de y^2 ſa valeur $\frac{R^2}{x}$, ils ſeront changez en R^4x^2, R^6x^2, R^8x^2, *&c*, qui ſont tous de l'Ordre x^2. Mais toute Caſe, comme x^4y^3, dont le centre eſt au-deſſus de la Régle, contient un terme d'un Ordre ſupérieur. Car, mettant pour y ſa valeur $Rx^{-1:2}$, x^4y^3 eſt transformé en $R^3x^{4-3:2}=R^3x^{5:2}$ dont l'expoſant ſurpaſſe celui de x^2. Toute Caſe, au contraire, comme x^3y^3, dont le centre eſt au-deſſous de la Régle, loge un terme d'un Ordre inférieur à x^2. Car $Rx^{-1:2}$ ſubſtitué pour y dans x^3y^3, le change en $R^3x^{3-3:2}$ $=R^3x^{3:2}$ qui eſt d'un Ordre inférieur à x^2.

De même, la Régle qui paſſe par les centres des Caſes y^8 & xy^5, paſſe auſſi par le centre de la Caſe x^2y^2. Qu'on ſuppoſe d'un même Ordre deux quelconques de ces termes, comme xy^5 & x^2y^2. Ils ſeront donc du même Ordre en les diviſant par la même grandeur x^2y^2. Donc

Ch. VII. §. 83. $\frac{x^2y^2}{x^2y^2}$ [$=1$] étant une grandeur finie, $\frac{xy^5}{x^2y^2}$, ou $\frac{y^3}{x}$ sera aussi une grandeur finie, qu'on peut nommer R^3, & on aura $y^3 = R^3x$, ou $y = Rx^{1:3}$. Cette valeur substituée dans les termes y^8, xy^5, x^2y^2, qui sont sur la Régle, les change en $R^8x^{8:3}$, $R^5x^{1+5:3} = R^5x^{8:3}$, $R^2x^{2+2:3} = R^2x^{8:3}$, & fait voir qu'ils sont tous du même Ordre $x^{8:3}$. Mais, si on prend une Case dont le centre soit au-dessus de la Régle, comme x^2y^4; on verra, en écrivant $Rx^{1:3}$ pour y, que le terme qui la remplit est [$R^4x^{2+4:3} = R^2x^{10:3}$] d'un Ordre supérieur à $x^{8:3}$. Qu'on prenne, au contraire, une Case dont le centre est au-dessous de la Régle, comme xy^4; & la substitution de $Rx^{1:3}$ à y, change le terme qui remplit cette Case en $R^4x^{1+4:3} = R^4x^{7:3}$, qui est d'un Ordre inférieur à $x^{8:3}$.

84. Il faut, avant qu'aller plus loin, démontrer cette propriété du Triangle analytique. Elle est fondée sur ce que les Cases qui ont leurs centres en Ligne droite sont remplies de termes où les exposants de x & de y sont des progressions arithmétiques. Cela est évident, quand cette Droite, ou cette Régle, est couchée sur une bande horizontale, ou sur une verticale. Pour rendre l'expression plus courte, nous apellerons celles-là des *Lignes* & celles-ci des *Colonnes*. Quand la Régle est horizontale, les termes par lesquels elle passe ont tous le même exposant de x, & ceux d'y sont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c.

Quand

Quand la Régle eſt verticale, les expoſants d'y ſont tous les mêmes, & ceux de x ſont la progreſſion 1, 2, 3, 4, &c. Enſuite lorſque la Régle eſt inclinée aux bandes ; ſi on ſuppoſe que, partant du centre d'une Caſe, elle ne rencontre le centre d'une autre Caſe qu'après avoir traverſé k lignes & l colomnes ; il eſt clair, puiſque les Caſes ſont rangées uniformément, qu'il lui faudra encore traverſer k lignes & l colomnes pour atteindre le centre d'une troiſiéme Caſe, & encore autant pour parvenir à une quatriéme, & ainſi de ſuite. Donc, comme l'expoſant de x augmente d'une unité en montant d'une ligne, & que l'expoſant de y augmente auſſi d'une unité en traverſant une colomne de droite à gauche ; ſi le terme qui eſt dans la prémiére Caſe eſt $x^m y^n$, celui de la ſeconde ſera $x^{m+k} y^{n+l}$, celui de la troiſiéme $x^{m+2k} y^{m+2l}$ & ainſi de ſuite : où les expoſants de x ſont la progr. arithm : m, $m+k$, $m+2k$ &c. & ceux de y la progreſſion n, $n+l$, $n+2l$, &c. CH. VII. § 84.

Réciproquement, ſi l'on choiſit des termes, comme $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, &c. où les expoſants, tant de x que de y, ſoient en progreſſion arithmétique dont les différences ſoient k & l : tous ces termes ſe trouvent dans des Caſes, dont les centres ſont ſur une même ligne droite qui traverſe en même tems k lignes & l colomnes : ce qui détermine l'inclinaiſon de cette Droite aux bandes du Triangle.

85. CAR l'inclinaiſon de la Régle aux bandes du Triangle, & le raport de k à l dépendent entiérement l'un de l'autre, puiſque k & l ſont le nombre des lignes & le nombre des colomnes que traverſe en même tems la Régle. Si k ſurpaſſe l, la Régle eſt plus inclinée aux colomnes qu'aux

CH. VII. §. 85. qu'aux lignes, & coupe une plus grande portion de la premiére bande verticale que de la premiére bande horizontale, à compter ces portions dès la Pointe. C'est le contraire si l surpasse k. En général, puisque la Régle traverse k lignes en traversant l colomnes, elle traversera de colomne en colomne un nombre de lignes exprimé par $\frac{k}{l}$, soit que $\frac{k}{l}$ désigne un nombre entier ou un nombre rompu. Si la Régle traverse deux colomnes en traversant une seule ligne, elle ne traversera qu'une demi-ligne en traversant une seule colomne.

86. DONC, si on tire sur la surface du Triangle analytique deux Droites paralléles, & par conséquent autant inclinées l'une que l'autre aux lignes & aux colomnes; les Cases, dont ces Droites traversent le centre, contiennent des termes où les exposants de x, & aussi ceux de y, font des progressions arithmétiques, qui ont dans l'une & l'autre Droite la même différence. Ceux de la prémiére Droite étant, par ex., $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$ &c. ceux de la seconde peuvent être $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$, $x^{p+2k} y^{q+2l}$ &c.

Réciproquement, si l'on choisit deux suites de termes, $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$ &c. & $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$, $x^{p+2k} y^{q+2l}$, &c. où les exposants de x, & aussi ceux de y, fassent des progressions arithmétiques qui dans l'une & dans l'autre suite ayent les mêmes différences: ces deux suites de termes se trouveront sur deux Droites paralléles.

87. TELLE

87. TELLE étant la diſpoſition des termes ſur le Triangle analytique, ſi on compare enſemble deux termes quelconques, en les ſuppoſant d'un même Ordre d'infini, & qu'on applique une Régle ſur les centres des Caſes où logent ces deux termes : Je dis que tous les termes, qui ſont dans des Caſes par les centres deſquelles paſſe cette Régle, ſont auſſi du même Ordre. Car leurs expoſants ſont en progreſſion arithmétique [§. 84]. On peut donc repréſenter ces termes par la ſuite $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, $x^{m+3k} y^{n+3l}$, $x^{m+4k} y^{n+4l}$, $x^{m+5k} y^{n+5l}$, &c. Prenons-en deux termes quelconques, comme $x^{m+2k} y^{n+2l}$ & $x^{m+5k} y^{n+5l}$, & ſuppoſons-les d'un même Ordre. Ils reſteront d'un même Ordre, après avoir été diviſés par une même grandeur $x^{m+2k} y^{n+2l}$. Donc $[\frac{x^{m+2k} y^{n+2l}}{x^{m+2k} y^{n+2l}} =]$ 1, & $[\frac{x^{m+5k} y^{n+5l}}{x^{m+2k} y^{n+2l}} =] x^{3k} y^{3l}$ ſont d'un même Ordre. Ainſi l'unité étant eſſentiellement une grandeur finie, $x^{3k} y^{3l}$, & ſa racine cubique $x^k y^l$, & toutes ſes racines & ſes puiſſances ſont finies. Ainſi tous les termes qui ſont ſur la Régle, $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, &c. n'étant que $x^m y^n$ multiplié ſucceſſivement par les grandeurs finies 1, $x^k y^l$, $x^{2k} y^{2l}$, $x^{3k} y^{3l}$, &c. ſont tous du même Ordre. CH. VII. §. 87.

Par la même raiſon, tous les termes $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$,

CH. VII. §. 87. $x^{p+2k} y^{q+2l}$, &c. qui sont sur une Droite paralléle à la Régle, sont tous du même Ordre que $x^p y^q$. Et réciproquement tous les termes qui sont d'un même Ordre sont logés dans des Cases dont les centres se trouvent sur la Régle, ou sur une Droite paralléle à la Régle.

88. Puisque $x^k y^l$ est une grandeur finie, si on la nomme R, on aura $y = R^{1:l} x^{-k:l}$, ce qui détermine le raport des Ordres d'x & d'y, en faisant voir qu'y est du même Ordre que la puissance d'x qui a pour exposant négatif le nombre [$\frac{k}{l}$] de lignes que traverse la Régle, tandis qu'elle traverse une seule colomne [§. 85].

En substituant $R^{1:l} x^{-k:l}$ à y, dans le terme $x^m y^n$ ou dans le terme $x^p y^q$, on le transforme en $R^{n:l} x^{m-nk:l}$ & $R^{q:l} x^{p-qk:l}$: ce qui marque que les termes $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$ &c. qui sont sur la Régle, sont de l'Ordre $m-nk:l$, & que les termes $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$ &c. qui sont sur une paralléle à la Régle, sont de l'Ordre $p-qk:l$.

89. On trouvera aussi les exposants de ces Ordres, en examinant quel est le point auquel la Régle, ou sa paralléle, coupe la prémiére bande verticale. Si c'est le centre de quelque Case de cette bande, la puissance de x qui est dans cette Case, montre par son exposant quel est l'Ordre des termes placés sur la Régle, ou sur sa paralléle; puisque tous ces termes sont du même Ordre [§. préc.].

Mais

Mais si la Régle, ou sa paralléle, passe entre les centres de deux Cases, le point où elle passe désigne encore l'Ordre de ses termes, dont alors l'exposant est un nombre rompu. Il faut concevoir cette bande verticale, & en général chaque colomne, comme une Droite divisée en parties égales par les centres des Cases, imaginer que les termes, x^1, x^2, x^3, *&c.* dont les exposants sont des nombres entiers, sont placés sur les points de division, & feindre que les termes, comme $x^{1:2}$, $x^{1+1:3}$, $x^{2+3:4}$, *&c.* dont les exposants sont des nombres rompus ou mixtes, sont placés sur les points qui divisent les intervalles des centres, dans la même raison que l'unité est divisée par la fraction qui fait, ou concourt à faire l'exposant de x. Ainsi, on concevra $x^{1:2}$ précisément au milieu entre x^0 ou 1, & x^1; & $x^{1+1:3}$ sera placé sur le premier point de la subdivision qui partageroit en trois parties égales l'intervalle entre x^1 & x^2, &c. Cela bien conçû, si la Régle, ou sa paralléle, passoit, par ex. entre les centres de x^2 & de x^3, mais trois fois plus près du dernier que du premier, c'est-à-dire, par le point où l'on doit concevoir $x^{2+3:4}$, on concluroit que tous les termes placés sur cette Droite, sont de l'Ordre $2\frac{3}{4}$.

L'exposant d'un Ordre peut être négatif, lorsque la Régle, ou sa paralléle, ne coupe point la prémiére bande verticale, mais bien son prolongement au-dessous de la prémiére bande horizontale. Cela arrive quand $m < nk:l$ ou $p < qk:l$, c'est-à-dire, quand $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$ ou $\frac{p}{q}$. Alors l'exposant $m - nk:l$, ou $p - qk:l$, est négatif. Dans ce cas, on conçoit la prémiére colomne comme une Droite prolongée au-dessous de la Pointe, & divisée en parties

 égales

égales à celles qui sont au-dessus, & l'on attache aux points de division les termes d'exposants négatifs, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, &c.

90. Donc, puisque de deux Droites paralléles celle qui est supérieure coupe la prémiére colomne en un point supérieur; tous les termes qui sont sur la Droite supérieure sont d'un Ordre supérieur aux termes qui sont sur la Droite inférieure. Ainsi la Régle passant par les termes $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, &c. qui sont tous de l'Ordre $m - nk:l$; un autre terme quelconque est d'un Ordre supérieur ou inférieur selon qu'il est logé dans une Case dont le centre est au-dessus ou au-dessous de la Régle.

91. C'EST-LA' le Principe qui détermine les comparaisons qu'on peut faire pour chercher les plus grands termes d'une équation [§. 80, 83]. En supposant x infinie, on voit qu'il seroit inutile de regarder deux termes comme étant du même Ordre & les plus grands de l'équation, si la Régle, appliquée aux centres de leurs Cases, laisse au-dessus d'elle quelque autre terme. Car ce terme [§. *préc.*] seroit d'un Ordre supérieur à ceux par lesquels passe la Régle. Il seroit donc infiniment plus grand que ceux qu'on voudroit supposer les plus grands [§. 78]; ce qui seroit absurde.

Et en supposant x infiniment petite, la comparaison de deux termes sera inutile, si la Régle, appliquée aux centres de leurs Cases, laisse au-dessous d'elle quelque terme de l'équation. Car quand on voudra supposer que ces deux termes sont du même Ordre & les plus grands de l'équation, il se trouvera [§. *préc.*] que les termes qui sont

ſont dans une Caſe inférieure ſeront d'un Ordre inférieur, & par conſéquent infiniment plus grands [§. 79] que ceux qu'on a ſuppoſé les plus grands : ce qui eſt contradictoire. CH. VII. §. 91.

92. De-là on déduit naturellement la Régle ſuivante pour diſcerner dans une équation indéterminée les termes qui deviennent infiniment plus grands que tous les autres, par la ſuppoſition d'x ou d'y infinie ou infiniment petite *.

Ayant tracé le Triangle analytique ; on placera chaque terme de l'équation dans la Caſe qui lui eſt propre. Ou, ce qui dans la pratique eſt plus commode, on formera le Triangle avec des points diſpoſés en quinconce, & on changera en une étoile, ou en une petite croix, chaque point qui tient la place d'un des termes de l'équation. On peut auſſi avoir un Triangle de bois ou d'ivoire, percé de petits trous rangés à égales diſtances & parallélement aux côtés du Triangle, & on remplira avec de petites chevilles les trous qui repréſentent les Caſes où devroient être logés les termes de l'équation.

Puis on couchera le Triangle, ou on ſe le repréſentera couché, ſur la bande ſans x, ſi c'eſt x qu'on ſuppoſe infinie ou infiniment petite : mais on le couchera ſur la bande ſans y, ſi c'eſt y qu'on veut ſuppoſer infinie ou infiniment petite.

Après cela, ſi la variable eſt ſuppoſée infinie, on verra quelles ſont les Caſes pleines par le centre deſquelles peut paſſer une Régle ſans laiſſer au-deſſus d'elle aucune autre Caſe pleine. Les termes qui occupent ces Caſes ſont

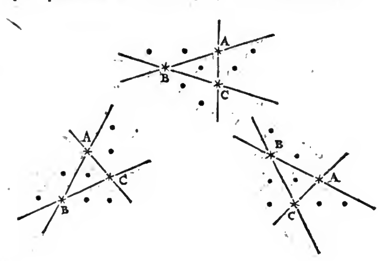
X 3

* NEWTON, *Methode des Fluxions*. §. 29 & ſuiv. *Epiſtola ad* OLDEMBURGUM *poſterior*. TAYLOR, *Methodus Increment.* Part. I. Prop. 9. STIRLING, *Lineæ 3i. ordinis &c.* pag. 12. s'GRAVESANDE, *Elementa Matheſ. univerſ.* pag. 233. & ſeq.

CH. VII. sont ceux qui, dans cette supposition, sont seuls toute
§ 92. l'équation. Et la Droite qui, menée le long de la Régle, détermine ainsi ces plus grands termes, s'apellera *Une Déterminatrice supérieure*. Il s'en peut trouver plusieurs pour une même équation.

Mais si l'on suppose x ou y infiniment petite, on cherchera, avec la Régle, quelles sont les Cases pleines par le centre desquelles peut passer une Droite, sans laisser au-dessous d'elle aucune Case pleine. Cette Droite, ou ces Droites, car il peut y en avoir plus d'une, se nommeront des *Déterminatrices inférieures*, parce qu'elles déterminent les plus grands termes de l'équation: ce sont ceux qui occupent les Cases par les centres desquelles elles passent.

L'*Exemple* I, sera celui de l'équation proposée ci-dessus [§. 81] $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$. Ayant décrit le Triangle avec des points, & converti en étoiles les points qui représentent les Cases x^2y, y^2, & x, on verra,



Qu'on

Qu'on ne peut mener par les Cases pleines que trois déterminatrices *AB*, *BC*, *CA*, desquelles, couchant 1°. le Triangle sur la bande sans x, deux sont supérieures *AB*, *AC*, & une inférieure *BC*: mais en le couchant 2°. sur la bande sans y, la déterminatrice *AB* est supérieure, & *AC* & *BC* inférieures. Ch. VII. §. 92.

La déterminatrice *AB* donne l'éq: $x^2y + ay^2 = 0$, ou $xx + ay = 0$.

La déterminatrice *AC* donne $x^2y - a^2x = 0$, ou $xy - aa = 0$.

Et la déterminatrice *BC* donne $ay^2 - a^2x = 0$, ou $yy - ax = 0$.

Donc par la supposition de x infinie, l'équation proposée est réduite à ces deux $xx + ay = 0$, & $xy - aa = 0$, que fournissent les déterminatrices *AB*, *AC*, supérieures quand le Triangle est couché sur la bande sans x.

Et par la supposition de x infiniment petite, l'équation se réduit à $yy - ax = 0$, que donne la déterminatrice *BC* inférieure dans la même position du Triangle.

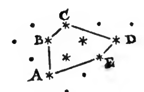
Mais par la supposition d'y infinie, l'équation est réduite à $xx + ay = 0$, donnée par la déterminatrice *AB* supérieure dans le Triangle couché sur la bande sans y.

Et la supposition d'y infiniment petite réduit l'équation à $xy - aa = 0$, & $yy - ax = 0$, que fournissent les déterminatrices *AC*, *BC* inférieures dans cette même position du Triangle.

Exemple 2. On propose l'éq: $xxyy + axy^2 + bx^2y + cx^2 + ddxy + eexx + f^3y = 0$. Après l'avoir mise sur le Triang: analyt: c'est-à-dire, après avoir formé le Triangle avec des points, & changé en étoiles ceux qui répondent aux termes de l'équation, on verra que toutes les étoiles peuvent être renfermées dans le Pentagone *ABCDE*. Il y a donc cinq déterminatrices, qui fournissent les cinq équations suivantes.

AB

CH. VII. §. 92.



AB donne $f^3y + axy^2 = o$, ou, divisant par ay, $xy + \frac{f^3}{a} = o$.
BC donne $axy^2 + x^2y^2 = o$, ou, divisant par xy^2, $x + a = o$.
CD donne $x^2y^2 + cx^3 = o$, ou, divisant par x^2, $yy + cx = o$.
DE donne $cx^3 + eex^2 = o$, ou, divisant par cx^2, $x + \frac{ee}{c} = o$.
& EA donne $eex^2 + f^3y = o$, ou, divisant par ee, $xx + \frac{f^3}{ee}y = o$.

Si on suppose x infinie, on couchera le Triangle sur la bande sans x, & on examinera quelles déterminatrices deviennent supérieures. C'est la seule CD. Donc cette supposition réduit l'équation proposée à la seule éq: $yy + cx = o$.

Et si on suppose x infiniment petite, en laissant le Triangle dans la même situation, on verra quelles déterminatrices sont inférieures. Ce sont AB & AE qui donnent les éq: $xy + \frac{f^3}{a} = o$, & $xx + \frac{f^3}{ee}y = o$. C'est donc à ces deux équations que se réduit la proposée par la supposition d'x infiniment petite.

Si on veut supposer y infinie, il faut concevoir le Triangle couché sur la bande sans y, & voir quelles déterminatrices deviennent alors supérieures. Ce sont AB, BC, CD.

CD. Les éq : $xy + \frac{f^3}{a} = 0$, $x + a = 0$, $yy + cx = 0$, qu'elles donnent, sont celles auxquelles la supposition d'y infinie réduit la proposée. Ch. VII. §. 92.

Mais en supposant y infiniment petite, on prendra les déterminatrices inférieures *AE*, *ED*, qui donnent les éq : $xx + \frac{f^3}{ee} y = 0$, & $x + \frac{ee}{c} = 0$ pour celles auxquelles se réduit la proposée par la supposition d'y infiniment petite.

93. Une déterminatrice peut passer par plus de deux Cases, & alors l'équation qu'elle fournit a plus de deux termes. Mais cette équation peut se résoudre par les Régles ordinaires de l'Algébre en plusieurs équations simples. Si la déterminatrice passe par les Cases $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{m+2l}$, &c. [§. 84] elle donnera une équation telle que $ax^m y^n + bx^{m+k} y^{n+l} + cx^{m+2k} y^{n+2l} + dx^{m+3k} y^{n+3l}$ &c $= 0$, dont les termes qui répondent à des Cases vuides, auront leurs coëfficients a, b, c, ou &c. égaux à zéro. Tous les termes de cette équation étant divisibles par $x^m y^n$, elle se peut réduire à $a + bx^k y^l + cx^{2k} y^{2l} + dx^{3k} y^{3l}$ &c $= 0$, ou, supposant $x^k y^l = z$, à $a + bz + czz + dz^3$ &c $= 0$. Soient R, r, ρ, &c. les racines de cette équation. Elle peut donc se décomposer en ces équations $z - R = 0$, $z - r = 0$, $z - \rho = 0$, &c. c'est-à-dire, $x^k y^l - R = 0$, $x^k y^l - r = 0$, $x^k y^l - \rho = 0$, &c. qu'on réduit à $y^l = Rx^{-k}$, $y^l = rx^{-k}$,

CH. VII. §. 93. $y^{l} = \rho x^{-k}$ &c, ou enfin à $y = R^{1:l} x^{-k:l}$, $y = r^{1:l} x^{-k:l}$, $y = \rho^{1:l} x^{-k:l}$ &c. : ce qui convient avec l'éq : $y = R^{1:l} x^{-k:l}$ trouvée au §. 88 ; la valeur de la lettre R, qui avoit été prise en général pour désigner un coëfficient quelconque, étant ici déterminée à marquer les racines R, r, ρ, &c. de l'éq : $a + bz + czz + dz^3$ &c $= 0$.

94. Ces coëfficients R, r, ρ, &c. des éq: $y = R^{1:l} x^{-k:l}$, $y = r^{1:l} x^{-k:l}$, $y = \rho^{1:l} x^{-k:l}$, &c. peuvent être imaginaires. Ils le sont tous, lorsque l'éq : $a + bz + czz$ &c $= 0$ n'a que des racines imaginaires : ce qui peut arriver toutes les fois qu'elle est d'un dégré pair, quand le nombre complet de ses termes est impair, lorsque la déterminatrice passe par un nombre de Cases impair, à compter depuis la premiére de celles qui sont pleines jusqu'à la derniére. Mais quand ce nombre de Cases est pair, l'éq : $a + bz + czz$ &c $= 0$, étant d'un dégré impair, a nécessairement quelque racine réelle. En particulier, elle n'en peut avoir d'imaginaires, lorsque la déterminatrice ne traverse que deux Cases pleines, qui soient sur deux bandes, horizontales ou verticales, contigues. Car l'équation étant $a x^m y^n + b x^{m+1} y^{n+l} = 0$, ou $a x^m y^n + b x^{m+k} y^{n+1} = 0$, [k ou l n'étant que l'unité, à cause de la contiguité des bandes], on aura $a + bxy^{l} = 0$, ou $a + bx^{k}y = 0$, c'est-à-dire, $x = -\frac{a}{b} y^{-l}$, ou $y = -\frac{a}{b} x^{-k}$.

95. Il

95. Il se peut que les coëfficients R, r, ρ, *&c.* soient réels, & que cependant les valeurs $R^{1:l}x^{—k:l}$, $r^{1:l}x^{—k:l}$, $\rho^{1:l}x^{—k:l}$ *&c.* soient imaginaires, ou entiérement ou à demi. J'apelle *demi-imaginaire*, une racine qui, comme $\sqrt{ax}$, est réelle quand on prend x positive, & imaginaire quand on prend x négative; ou qui, comme $\sqrt{-ax}$, est imaginaire quand x est positive, & réelle quand x est négative. J'apelle *entiérement imaginaire*, ou simplement *imaginaire*, une racine qui, comme $\sqrt{-xx}$, est imaginaire, quelque valeur, positive ou négative, qu'on donne à x. Ch. VII. §. 95.

Puisque les puissances paires d'une racine, positive ou négative, sont nécessairement positives; mais que les puissances impaires sont positives, si la racine est positive, & négatives, si la racine est négative : il est clair qu'une racine impaire est toûjours réelle, quelle que soit la puissance dont on tire cette racine : mais qu'une racine paire n'est réelle qu'autant que la puissance est positive. Donc si cette puissance est une puissance paire d'une quantité variable, la racine paire sera réelle, ou entiérement imaginaire, selon que la puissance est prise positivement ou négativement, c'est-à-dire, selon qu'elle est affectée d'un coëfficient positif ou négatif. Mais si la puissance, dont on tire une racine paire, est une puissance impaire d'une quantité variable, la racine est demi-imaginaire. Ainsi dans l'éq : $y = R^{1:l}x^{—k:l} = \sqrt[l]{Rx^{k}}$, si l est un nombre impair, y est toûjours une grandeur réelle : mais si l est pair, y est demi-imaginaire, k étant impair; & k étant pair, y est réelle lorsque R est positif, imaginaire lorsque R est négatif.

CH. VII. §. 96. 96. Il est bon de remarquer touchant l'exposant $-\frac{k}{l}$ de x dans les éq: $y = R^{1:l}x^{-k:l}$ que donne la déterminatrice,

1°. Qu'il est négatif, quand k & l ont le même signe: ce qui arrive quand les progressions arithmétiques $m, m+k, m+2k$, &c. $n, n+l, n+2l$, &c. des exposants de x & de y dans les termes qui sont sur la Régle [§. 84] sont toutes deux ascendantes ou toutes deux descendantes. Alors la Régle s'éloigne en même tems de la prémiére Bande horizontale & de la prémiére Bande verticale ; elle ne coupe qu'une de ces deux bandes, ou elle part de la Pointe. Dans ce Cas, x infinie rend y [$= R^{1:l}x^{-k:l}$, ou $(\frac{R}{x^k})^{1:l}$] infiniment petite, & x infiniment petite rend y infinie [§. 78. 79].

2°. Que cet exposant $-\frac{k}{l}$ est positif, quand l & k ont des signes contraires : ce qui a lieu quand les progr: arithm: $m, m+k, m+2k$, &c. $n, n+l, n+2l$, &c. sont l'une ascendante & l'autre descendante: quand la Régle s'aproche d'une des deux Bandes extérieures du Triangle en s'éloignant de l'autre : quand elle les coupe toutes deux ailleurs qu'à la Pointe. Dans ce Cas, x & y [$R^{1:l}x^{k:l}$ ou $(Rx^k)^{1:l}$] sont toutes deux infinies ou toutes deux infiniment petites. Elles sont d'un même Ordre, si $\frac{k}{l} = 1$, si $k = l$, si la déterminatrice est également inclinée aux deux bandes. Mais si $\frac{k}{l} > 1$, si $k > l$, si la déterminatrice, plus inclinée aux bandes verticales qu'aux horizon-

horizontales, retranche une plus grande portion de la Bande sans y que de la Bande sans x ; alors y [$R^{1:l} x^{k:l}$] est d'un Ordre supérieur à x, soit dans l'infini soit dans l'infiniment petit : comme, au contraire, il lui est d'un Ordre inférieur, si $\frac{k}{l} < 1$, si $k < l$, si la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande sans y que de la Bande sans x. CH. VII. §. 96.

3°. Que si $k = 0$, ce qui arrive quand la déterminatrice est paralléle à la Bande sans x, alors $y = R^{1:l} x^{-k:l}$ se réduit à $y = R^{1:l} x^{0} = R^{1:l}$. Donc x infinie ne donne pour y que des valeurs finies.

4°. Et par la même raison, quand la déterminatrice, paralléle à la Bande sans y, rend l égal à zéro, on conclura que y infinie ne donne pour x que des valeurs finies, déterminées par les racines de l'équation $ax^{m} y^{n} + bx^{m+k} y^{n+l} + cx^{m+2k} y^{n+2l}$ &c $= 0$, qui, puisque $l = 0$, se réduit, en divisant par $x^{m} y^{n}$, à $a + bx^{k} + cx^{2k} +$ &c $= 0$.

97. Il y a bien des recherches sur les Lignes courbes où il suffit de connoître le raport d'y à x, quand ces variables sont infinies ou infiniment petites. Mais il en est beaucoup d'autres où il faut aller plus loin, & chercher ce que produisent les termes qu'on a négligés comme infiniment petits en comparaison de ceux qu'on a employés. Il est même souvent très-utile de trouver le raport d'y à x finies, du moins par approximation. Ceci nous méne naturellement à la *Méthode des Séries ou Suites infinies*, qui découle sans peine de ce qu'on vient d'établir.

Ch. VII. §. 98. 98. Une *Serie* eſt une ſuite de termes qui fait une approximation continuelle à la racine d'une équation. On la nomme *convergente*, pour marquer qu'on aproche d'autant plus de la valeur de la racine, qu'on prend un plus grand nombre de termes de la Série : enſorte qu'on auroit au juſte cette racine, ſi le nombre des termes de la Série étoit fini, ou qu'étant infinis en nombre, on pût les ſommer.

Une *Série*, au contraire, ſeroit *divergente*, quand on s'éloigneroit d'autant plus de la racine de l'équation, qu'on prendroit plus de termes de la Série. Il eſt clair qu'une Série divergente eſt trompeuſe, ou du moins inutile. Car il vaudroit mieux s'en tenir au premier terme que d'y joindre les ſuivants.

On propoſe par ex. l'éq : $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$. Si on cherche y en x, c'eſt-à-dire, ſi on regarde y comme inconnuë, & x comme connuë, quoique variable, on trouvera que l'équation a ces quatre racines,

$$(A) \ldots\ldots x + \frac{xx}{3a} * - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} \text{ \&c.}$$

$$(B) \ldots - a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \frac{55a^{13}}{x^{12}} \text{ \&c.}$$

$$\text{ou } -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12}, \text{ \&c.}$$

$$(C) \ldots + a^{-1:2}x^{3:2} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{8}a^{5:2}x^{-3:2} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \text{ \&c.}$$

$$(D) \ldots - a^{-1:2}x^{3:2} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{8}a^{5:2}x^{-3:2} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \text{ \&c.}$$

parce que chacune de ces quatre Séries ſubſtituée dans l'équation au lieu d'y, en réduit le premier membre à zéro, & par conſéquent à l'égalité avec le ſecond membre.

Les Séries A, B, C, D ſont donc les valeurs d'y, & ces valeurs ſeroient exactes, ſi on épuiſoit ces Séries. Mais quand

quand cela n'est pas possible, on a du moins dans ces Séries une approximation continuelle aux véritables valeurs d'y, pourvû qu'elles soient convergentes : ce qui a lieu, lorsque chaque terme est plus petit que celui qui le précéde, & que ces termes diminuent à l'infini. CH. VII. §. 58.

99. Pour cet effet, on range tous les termes d'une Série de façon que les exposants des puissances de sa variable aillent toûjours en croissant ou toûjours en décroissant. Car une Série, dont les termes sont disposés selon cette Loi, sera sûrement convergente, pourvû qu'on prenne sa variable assez petite ou assez grande.

Ainsi, dans la Série $A \ldots . x + \frac{x^3}{3a} * - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4}$ &c. les exposants d'x vont en croissant. Si donc on suppose x fort petite, en comparaison d'a, ensorte que $\frac{x}{a}$ soit une fraction moindre que l'unité, les puissances $\frac{x}{a}$, $\frac{xx}{aa}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^4}{a^4}$ &c. de cette fraction sont une progression géométrique qui décroit à l'infini, d'autant plus rapidément que $\frac{x}{a}$ est plus petite. Si par ex. $x = \frac{1}{10}a$, ou $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$, la suite des puissances de $\frac{x}{a}$ sera $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ &c. Si $\frac{x}{a} = \frac{1}{100}$, la suite de ses puissances sera $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$, &c. Ce qui suffit pour faire voir que plus x est petite par raport à a, plus vite décroit la suite des puissances de $\frac{x}{a}$. Donc, si les termes de la Série A sont réglés sur les puis-

CH. VII. § 99. puissance de $\frac{x}{a}$, comme on voit qu'elle l'est en lui donnant cette forme

$$a \times \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{3} \times \frac{xx}{aa} + 0 \times \frac{x^3}{a^3} - \frac{1}{81} \times \frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{243} \times \frac{x^5}{a^5} + \text{\&c.}\right)$$

on pourra toûjours prendre x si petite, que chaque terme sera beaucoup plus petit que celui qui le précéde, & qu'ils décroîtront à l'infini : ce qui rendra la Série convergente.

Au contraire, dans les Séries B, C, D, les exposants d'x vont en décroissant. Il faudra donc supposer x fort grande en comparaison d'a, en sorte que la fraction $\frac{a}{x}$ soit beaucoup plus petite que l'unité. Alors la Série sera convergente, parce que les puissances de cette fraction $\frac{a}{x}$, $\frac{aa}{xx}$, $\frac{a^3}{x^3}$, $\frac{a^4}{x^4}$, &c. font une progression géométrique qui décroit avec d'autant de vitesse que x est plus grande. Les Séries B, C, D, aiant leurs termes ordonnés selon les puissances de $\frac{a}{x}$, comme on le voit en leur donnant cette forme

$$(B) \ldots -a\left(1 + \frac{a^3}{x^3} + 3\frac{a^6}{x^6} + 12\frac{a^9}{x^3} + 55\frac{a^{12}}{x^{12}} \text{\&c}\right).$$

$$(C) \,\&\, (D) \ldots a \times \left(\pm 1 \left(\frac{a}{x}\right)^{-3:2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{0} \mp \frac{3}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^{3:2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{3} \text{\&c}\right).$$

il est clair, qu'en prenant x assez grande, ces Séries seront infailliblement convergentes.

Par la raison des contraires, la Série A, appliquée à une valeur d'x plus grande qu'a, & les Séries B, C, D, appli-

appliquées à des valeurs d'x plus petites qu'a, feroient divergentes. CH. VII. § 99.

100. On diftingue donc deux fortes de Séries. Les unes font d'autant plus convergentes que leur variable eft plus petite : les autres *convergent* d'autant plus que cette variable eft plus grande. Dans les prémiéres, qui fe nomment *Séries croiffantes*, ou *afcendantes*, les expofants de la variable vont en croiffant. Ils vont en décroiffant dans les autres, qui s'apellent *Séries décroiffantes* ou *defcendantes*. Il eft néceffaire de les diftinguer : car on les employe à des ufages très-différens ou même oppofés.

101. La forme générale d'une Série eft $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \&c$, où les expofants b, i, k, l, *&c.* vont en croiffant, ou en décroiffant, felon que la Série eft afcendante ou defcendante. A, B, C, D, *&c* font les coëfficients des termes fucceffifs. Et comme il eft fort poffible que quelcun d'entr'eux foit zéro, avec tous ceux qui le fuivent, il fe peut faire que la *Série* foit *terminée*, & alors elle donne la jufte valeur d'y en termes finis.

102. ON TROUVERA fucceffivement tous les termes d'une Série de cette maniére. Pour avoir le prémier, on fuppofera x infinie, fi on cherche une Série defcendante, & x infiniment petite, fi l'on veut avoir une Série afcendante. Cette fuppofition réduit la Série au feul premier terme Ax^b. Car fi la Série eft defcendante, l'expofant b eft plus grand que tous les autres i, k, l, *&c.* & x étant fuppofée infinie, la puiffance x^b eft infiniment plus grande que les autres x^i, x^k, x^l, *&c* [§. 78], qu'on peut fup-

CH. VII. §. 102. primer sans erreur. Et si la Série est ascendante, l'exposant b est le plus petit, & x étant infiniment petite, la puissance x^b fait disparoître toutes les autres x^i, x^k, x^l, &c. Donc la supposition d'x infinie, dans une Série décroissante, & celle d'x infiniment petite dans une Série croissante, la réduit à $y = Ax^b$. Or ces mêmes suppositions réduisent l'équation proposée à une ou plusieurs équations, telles que $y = R^{1:l} x^{-k:l}$ [§. 93], qui sont données par les déterminatrices supérieures ou inférieures [§. 92]. Donc $A = R^{1:l}$ & $b = -\frac{k}{l}$. De sorte que les déterminatrices font connoître le premier terme de la Série, ou des Séries, lorsque l'équation proposée en peut donner plusieurs.

Les termes suivans se trouvent de la même maniére. Que u représente la somme des termes $Bx^i + Cx^k + Dx^l$ &c. qui suivent le premier, & on aura $y = Ax^b + u$. Cette valeur d'y substituée dans l'équation proposée la transforme en une autre dont les variables sont u & x. Qu'on suppose, dans cette transformée, x infinie pour les Séries descendantes, & x infiniment petite pour les Séries ascendantes: & les déterminatrices, supérieures ou inférieures, donneront une ou plusieurs équations telles que $u = R^{1:l} x^{-k:l}$ [§. 93]. Mais les mêmes suppositions d'x infinie ou infiniment petite, réduisent la Série $u = Bx^i + Cx^k +$ &c. à $u = Bx^i$. Donc $B = R^{1:l}$ & $i = -\frac{k}{l}$. Ainsi les déterminatrices de cette premiére transformée donnent le second terme Bx^i de la Série.

On

On transformera de nouveau l'équation, en supposant $u = Bx^i + t$ où t représente tous les termes $Cx^k + Dx^l +$ *&c.* qui suivent le second de la Série. Et les déterminatrices de cette seconde transformée donneront le troisiéme terme Cx^k de la Série. En continuant de la même maniére on aura le quatriéme terme & les suivans à l'infini, c'est-à-dire, jusqu'au dernier si la Série est terminée, ou du moins autant qu'on en voudra, autant que le demandera le but qu'on se propose, si le nombre des termes de la Série est infini, ou trop grand. C. VII. §. 102.

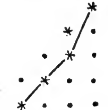
103. Mais dans le cours de ces opérations on doit se souvenir que la nature des Séries ascendantes exige que les exposants d'x aillent en croissant, & que dans les Séries descendantes ces exposants doivent aller en décroissant. Donc, quoiqu'à la prémiére opération, à celle qui se fait sur l'équation proposée, on doive prendre en considération toutes les déterminatrices supérieures, pour avoir toutes les Séries descendantes, ou toutes les déterminatrices inférieures pour avoir toutes les Séries ascendantes: dans les opérations suivantes, on ne doit faire aucune attention aux déterminatrices supérieures qui donneroient le même ou un plus grand exposant que le précédent, ni aux déterminatrices inférieures qui donneroient le même ou un plus petit exposant que celui qu'on a eû par l'opération précédente. S'il n'y a point d'autres déterminatrices, le cours des opérations est fini & la Série est terminée.

Exemple I. L'éq: $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$ proposée ci-dessus [§. 98] étant placée sur le Triang: analyt: & ce Triangle étant couché sur la Bande sans x, on voit qu'elle n'a qu'une seule déterminatrice inférieure, qui, passant par les

Ch. VII.
§. 103.



les Cases y^3 & x^3, donne l'éq: $ay^3 - ax^3 = 0$, ou $y = x$. C'est là le prémier terme d'une Série ascendante. Pour avoir le second, on substituera $x + u$ à y, & l'équation sera transformée en $ax^3 + 3auxx + 3auux + au^3 - x^4 - x^3u - ax^3 = 0$, ou $3auxx + 3auux + au^3 - x^4 - x^3u = 0$, laquelle étant placée, à son tour, sur le Triang: anal: a deux déterminatrices inférieures. L'une qui passe



par les Cases u^3, uux, uxx est à négliger, parce qu'elle donneroit $u = Rx$, & que ce second exposant d'x n'est pas plus grand que celui qu'on a trouvé par la prémiére opération. Mais l'autre déterminatrice, qui passe par les Cases uxx & x^4 donne l'éq: $3auxx - x^4 = 0$, ou $u = \frac{xx}{3a}$. C'est-là le second terme de la Série. On aura le troisiéme en substituant $\frac{xx}{3a} + t$ au lieu d'u dans l'équation précédente, ce qui la transforme en $x^4 + 3atxx +$

x^5.

$\frac{x^5}{3a} + 2tx^3 + 3attx + \frac{x^6}{27aa} + \frac{tx^4}{3a} + ttxx + at^3 - x^4 - \frac{x^5}{3a}$ CH. VII. §. 103.
$- tx^3 = 0$, ou $3atxx + tx^3 + 3attx + \frac{x^6}{27aa} + \frac{tx^4}{3a} + ttxx + at^3 = 0$. En la mettant sur le Tr : anal : on retrouve la déterminatrice, qui donne $t = Rx$, & qui est par conséquent à rejetter. Mais il y a une autre déterminatrice inférieure, qui passe par txx & x^6, & qui donne l'éq : $3atxx + \frac{x^6}{27aa} = 0$, ou $t = -\frac{x^4}{81a^3}$. Et c'est le troisiéme terme de la Série. Car $y = x + u$, & $u = \frac{xx}{3a} + t$, & $t = -\frac{x^4}{81a^3}$, *&c.* Donc $y = x + \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{81a^3}$, *&c.* L'on voit qu'il est aisé de continuer cette Série.

Exemple 2. On propose l'éq : $yy - 2xy + xx - 2ay + ax + aa = 0$, de laquelle on veut tirer la valeur d'y en x par une Série ascendante. On mettra donc l'équation sur le Tr : anal : & on cherchera les déterminatrices inférieures. Il n'y en a qu'une couchée sur la Bande sans x, qui donne l'éq : $yy - 2ay + aa = 0$, qui, quoique

CH VII. §. 103.



que du fecond dégré, n'a qu'une racine, mais double, $y - a = 0$, ou $y = a$. On fubftituera donc $a + u$ à y, & la transformée fera $aa + 2au + uu - 2ax - 2ux + xx - 2aa - 2au + ax + aa = 0$, ou $uu - ax - 2ux + xx = 0$, qu'on mettra auffi fur le Tr: anal: où on ne lui trouvera qu'une déterminatrice inférieure, qui donne



l'éq: $uu - ax = 0$, ou $u = \pm\sqrt{ax} = \pm a^{1:2} x^{1:2}$. Ainfi on fubftituera $\pm a^{1:2} x^{1:2} + t$ à a dans l'éq: $uu - ax - 2ux + xx = 0$, ce qui la transforme en $ax \pm 2a^{1:2} tx^{1:2} + tt - ax \mp 2a^{1:2} x^{3:2} - 2tx + xx = 0$, ou $\pm 2a^{1:2} tx^{1:2} + tt \mp 2a^{1:2} x^{1+1:2} - 2tx + xx = 0$. Celle-ci fera mife, à fon tour, fur le Triangle, & comme deux de fes termes $\pm 2a^{1:2} tx^{1:2}$ & $\mp 2a^{1:2} x^{1+1:2}$ n'ont point de Cafes à fe loger, on les placera [comme on a dit au §. 89] entre deux Cafes, fç. le premier fur la feconde colomne entre les Cafes tx^0, ou t, & tx^1; & le



fecond

second sur la prémiére colomne entre la Case x^1 & la Case x^2. Alors on trouve à l'équation deux déterminatrices inférieures, dont l'une, qui passe par tt & $tx^{1:2}$, donneroit $t = Rx^{1:2}$, ce qui est le même exposant que ci-dessus. On la négligera donc, & l'on ne fera attention qu'à l'autre qui passe par les Cases $tx^{1:2}$ & $x^{1+1:2}$, donnant l'éq: $\pm 2a^{1:2}tx^{1:2} \mp 2a^{1:2}x^{1+1:2} = 0$, ou $t = x$ qui est le troisiéme terme de la Série. Pour avoir le quatriéme, on substituera $x + s$ au lieu de t dans la derniére éq: $\pm 2a^{1:2}tx^{1:2} + tt \mp 2a^{1:2}x^{1+1:2} - 2tx + xx = 0$, & la transformée sera $\pm 2a^{1:2}x^{1+1:2} \pm 2a^{1:2}sx^{1:2} + xx + 2sx + ss \mp 2a^{1:2}x^{1+1:2} - 2xx - 2sx + xx = 0$, ou $\pm 2a^{1:2}sx^{1:2} + ss = 0$. Ces deux termes étant placés sur le Tr: anal: n'ont qu'une déterminatrice, qui donneroit

CH. VII. §. 103.

$s = Rx^{1:2}$. Cet exposant étant donc moindre que le précédent, ne peut être admis. Ainsi la Série est terminée: car on a $y = a + u = a \pm \sqrt{ax} + t = a \pm \sqrt{ax} + x$. Si pourtant on vouloit voir ce que donnera cette derniére déterminatrice, ou son équation $\pm 2a^{1:2}sx^{1:2} + ss = 0$, on lui trouvera deux racines; 1°. $s = 0$, qui termine la Série. 2°. $s = \mp 2a^{1:2}x^{1:2} = \mp 2\sqrt{ax}$, & celle-ci,

CH. VII. §. 103. celle-ci, substituée dans $y = a \pm \sqrt{ax} + x + s$, donne $y = a \pm \sqrt{ax} + x \mp 2\sqrt{ax}$, ce qui est toûjours $y = a \pm \sqrt{ax} + x$. C'est donc là la vraye valeur d'y: ce qui se vérifie sans peine, puisqu'en chassant l'irrationalité, l'éq: $y = a \pm \sqrt{ax} + x$ se transforme dans l'éq: proposée $yy - 2xy + xx - 2ay + ax + aa = 0$.

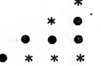
104. On remarquera ici, 1°. que si, dans la suite des équations que fournissent les déterminatrices successives, il s'en trouve quelcune qui n'ait que des racines imaginaires, toute la Série, que les prémiers termes sembloient promettre, devient par-là imaginaire. Car un seul terme imaginaire rend imaginaire toute la somme dont il fait partie; à moins que ce qu'il y a d'imaginaire dans un terme ne soit détruit par ce qu'il y a d'imaginaire dans un autre terme; ce qui ne peut avoir lieu ici, où x a dans chaque terme un exposant différent.

2°. Que si parmi les termes d'une Série il y en a quelcun qui soit demi-imaginaire, la Série est demi-imaginaire; c'est-à-dire [§. 95] imaginaire en prenant x positive, réelle en la prenant négative; ou réciproquement.

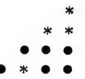
3°. Que si parmi les équations qui déterminent les termes successifs d'une Série, il s'en trouve qui aient plusieurs racines réelles; alors la Série *se fourche*, pour ainsi dire, & se multiplie en autant de Séries, qu'il y a de racines réelles, chaque fois que cela arrive.

Exemple 1. On demande la valeur d'y en x, par une Série ascendante tirée de l'éq: $x^3 + x^2y + ayy - 2a^2y + a^3 = 0$?

Mise sur le Tr. anal: couché sur la Bande sans x, elle n'a qu'une déterminatrice inférieure, qui donne l'éq: $ayy - 2a^2y + a^3 = 0$, dont la racine unique, mais double, est $y = a$. On supposera donc $y = a + u$, & en substi-

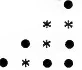


ſubſtituera cette valeur dans l'équation propoſée. La transformée $x^3 + ax^2 + ux^2 + auu = 0$, miſe ſur le Triangle, n'a auſſi qu'une déterminatrice inférieure, qui donne auu



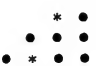
$+ ax^2 = 0$, dont les racines $u = \pm\sqrt{-xx}$, ſont abſolument imaginaires. On ne peut donc exprimer la valeur d'y en x par aucune Série aſcendante. Car la ſeule qui pourroit donner cette valeur, ſeroit $y = a + u = a \pm \sqrt{-xx}$ *&c.* qui eſt imaginaire.

Exemple 2. Soit propoſée l'éq : $x^2y + ayy - 2axy + axx = 0$, dont on veut tirer la valeur d'y en x par une Série aſcendante. On la placera ſur le Tr. anal : & la déterminatrice inférieure paſſant par les Caſes yy, xy, xx,

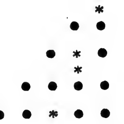


donnera l'éq: $ayy - 2axy + axx = 0$, qui n'a qu'une racine, mais double, $y = x$. On ſubſtituera donc $x + u$ à y dans l'équation propoſée, & on mettra ſur le Trian-

CH. VII. § 104. gle la transformée $x^3+x^2u+auu=0$. Elle n'a aussi



qu'une déterminatrice inférieure, qui donne l'éq: $auu+x^3=0$, laquelle a deux racines $u=+\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ & $-\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$. On substituera $\pm\sqrt{-\frac{x^3}{a}}+t=\pm a^{-1:2}\times-x^{3:2}+t$ à u dans la premiére transformée, & la seconde sera $\pm a^{-1:2}\times-x^{3+1:2}+txx\pm 2a^{1:2}tx-x^{3:2}+att=0$, qu'on mettra sur le Tr: anal: Elle a deux déterminatrices inférieures; l'une inutile, parce que passant par les Cases tt, $tx^{3:2}$, elle donneroit $t=Rx^{3:2}$,



où x a le même exposant que dans le terme précédent: l'autre utile, qui passant par $tx^{3:2}$ & $x^{3+1:2}$, donnera $\pm 2a^{1:2}t\times-x^{3:2}\pm a^{-1:2}\times-x^{3+1:2}=0$, ou $t=$

$t = \frac{xx}{2a}$. Les trois prémiers termes de la Série sont donc $x \pm \sqrt{-\frac{x^3}{a}} - \frac{xx}{2a}$. Où l'on voit

1°. Que la Série est imaginaire, si l'on prend x positive, parce qu'alors $\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ est une grandeur imaginaire. Mais si on prend x négative, la Série sera réelle, & alors

2°. La Série sera double, parce que le terme $\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ a également le signe $+$ & le signe $-$, l'équation $auu + x^3 = 0$, qui a donné ce terme ayant deux racines réelles $u = +\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$, & $u = -\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$.

Il y a donc réellement deux Séries, dont les trois prémiers termes sont $x + \sqrt{-\frac{x^3}{a}} - \frac{xx}{2a}$ pour l'une & $x - \sqrt{-\frac{x^3}{a}} - \frac{xx}{2a}$ pour l'autre.

105. JOIGNONS quelques considérations nécessaires pour rendre cette Méthode plus abregée & plus parfaite.

La substitution de $Ax^b + u$ à y [§. 102] dans un terme quelconque de l'équation proposée, le transforme en autant de termes qu'il y a de colomnes depuis celle où il se trouve jusqu'à la prémiére inclusivement ; chaque terme ayant sa place sur chaque colomne, & tous ces termes étant situés sur une même Droite parallele à la determinatrice qui a donné l'éq : $y = Ax^b$.

Car la puissance n de $u + Ax^b$ étant, [§. 26]

 $u^n +$

CH. VII. §. 105. $u^n + nAx^h u^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} A^2 x^{2h} u^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}$ $A^3 x^{3h} u^{n-3}$ + &c. jusqu'à $A^n x^{nh}$, qui est le dernier terme; si on substitue cette puissance à y^n, dans un terme comme $x^m y^n$ qui est de l'ordre $m + nh$ [§. 88], & qui se trouve sur une colomne précédée de n autres, on le transformera en $x^m u^n + nAx^{m+h} u^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.\ 2}$ $A^2 x^{m+2h} u^{n-2}$ + &c. jusqu'à $A^n x^{m+nh}$, dont tous les termes, en regardant u comme y qui étoit de l'ordre h, sont de l'ordre $m + nh$. Or tous les termes, qui sont d'un même ordre, se trouvent sur une même Droite parallele à la déterminatrice [§. 87]. Donc tous les termes, dans lesquels a été transformé $x^m y^n$, sont sur une Droite parallele à la déterminatrice qui a donné $y = Ax^h$. Et il est clair que le prémier terme $x^m u^n$ occupe la Case où étoit le terme transformé $x^m y^n$, sur une colomne précédée de n autres; que le second terme $x^{m+h} u^{n-1}$ est sur une colomne qui a $n - 1$ colomnes avant elle; que le troisiéme $x^{m+2h} u^{n-2}$ est sur la colomne voisine; & ainsi jusqu'au dernier terme $A^n x^{m+nh}$ qui est sur la prémiére colomne, ou sur la Bande des puissances d'x.

Ainsi quand on place l'éq : $x^2y^2 + ay^3 + bxy^2 + cx^2y + ddxy + f^3x = 0$ sur le Triang : analyt : couché sur la Bande sans x, on lui trouve quatre déterminatrices. Il y en a d'abord une horizontale, qui passe par les Cases x^2y^2,



x^2y^2 & x^2y. Elle donne pour y une valeur conſtante [§. 96, 3°.] qu'on peut nommer A. En ſubſtituant $A+u$ à y dans la propoſée, elle ſe transforme en $A^2x^2 + 2Aux^2 + u^2x^2 + A^3a + 3A^2au + 3Aau^2 + au^3 + A^2bx + 2Abux + bu^2x + Acx^2 + cux^2 + Addx + ddux + f^3x = 0$, où l'on voit que les termes

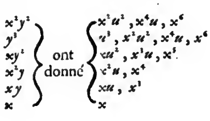
x^2y^2	de la pro-	x^2u^2, x^2u, x^2
y^3	poſée ont	u^3, u^2, u^1, u^0
xy^2	produit	xu^2, xu, x
x^2y	dans la	x^2u, x^2
xy	transfor-	xu, x
x	mée.	x

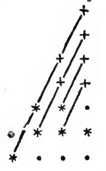
.
. .
* — * — †
. * — * — *
. * — † — † — †

Ainſi chaque terme en a donné un à toutes les colomnes qui le précédent, & ces termes ſe trouvent ſur une Droite horizontale, c'eſt-à-dire, paralléle à la déterminatrice qui a donné $y = A$.

La ſeconde déterminatrice de l'équation propoſée paſſoit par les Caſes y^3 & x^2y^2, & donnoit $y = Ax^2$. La ſubſtitution de $Ax^2 + u$ à y transforme l'équation en $A^2x^6 + 2Aux^4 + u^2x^2 + A^3ax^6 + 3A^2aux^4 + 3Aau^2x^2 + au^3 + A^2bx^5 + 2Abux^3 + bu^2x + Acx^4 + cux^2 + Addx^3 + ddux + f^3x = 0$. Donc les termes







Et en plaçant la transformée ſur le Tr: anal: on verra que tous les termes, auxquels un terme de la propoſée a été transformé, ont leurs places ſur une même Droite parallèle à la déterminatrice qui a donné l'éq: $y = Ax^2$.

La même choſe ſe vérifie pour les deux autres déterminatrices de l'équation propoſée. La troiſième paſſoit par les Caſes y^3 & x, & donnoit une équation de cette forme $y = Ax^{1:3}$. On ſubſtituera donc $Ax^{1:3} + u$ à y, & la transformée ſera $A^2x^{2+2:3} + 2Aux^{2+1:3} + u^2x^2 + A^3ax + 3A^2aux^{2:3} + 3Aau^2x^{1:3} + au^3 + A^2bx^{1+2:3} + 2Abux^{1+1:3} + bu^2x + Acx^{2+1:3} + cux^2 + Addx^{1+1:3} + ddux + f^3x = 0$. Ainſi les termes

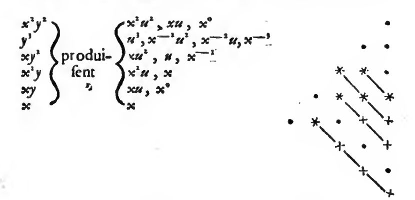
x^2y^2	donnent	$x^2u^2, x^{2+1:3}u, x^{2+2:3}$
y^3		$u^3, x^{1:3}u^2, x^{2:3}u, x$
xy^2		$xu^2, x^{1+1:3}u, x^{1+2:3}$
x^2y		$x^2u, x^{2+1:3}$
xy		$xu, x^{1+1:3}$
x		x



Si

Si on place cette transformée ſur le Tr : anal : on voit que chaque terme de la propoſée a donné un terme à toutes les colomnes qui le précédent, & que ces termes ſont ſur des Droites paralléles à la déterminatrice qui a donné $y = Ax^{1:3}$: mais comme l'expoſant de l'Ordre de y eſt la fraction $\frac{1}{3}$, il a falu, pour placer ces termes, diviſer en trois parties égales les intervalles des Caſes contiguës ſur une même colomne [§. 89]. Ch. VII. §. 105.

Enfin la quatriéme déterminatrice de l'équation propoſée, paſſant par x^2y & x, donne $y = Ax^{-1}$. Et la ſubſtitution de $Ax^{-1} + u$ à y change la propoſée en $A^2 + 2Aux + uuxx + Aa^3x^{-3} + 3A^2aux^{-2} + 3Aauux^{-1} + au^3 + A^2bx^{-1} + 2Abu + bu^2x + Acx + cux^2 + Add + ddux + f^3x = 0$. Donc les termes



Ici l'on obſerve la même Régle : mais comme l'expoſant négatif [-1] de l'ordre d'y a fait naitre des termes où x a un expoſant négatif ; il a falu, pour placer ces termes, prolonger le Triangle au-deſſous de la Bande ſans x [§. 89].

106. Ces

106. Ces Exemples font voir que quand plusieurs termes de l'équation proposée sont sur la déterminatrice ou sur quelcune de ses paralléles; en un mot, quand ils sont d'un même ordre ; ils se transforment en des termes, qui, distribuez sur une même Droite, se mêlent & se logent quelquefois plusieurs ensemble dans la même Case.

Ainsi, dans le 1. *Ex.* du §. préc. quand on a employé la déterminatrice horizontale, les termes x^2y^2 & cx^2y, qui étoient sur cette déterminatrice, ont été transformés en $x^2u^2 + (2A+c)x^2u + (A^2 + Ac)x^2$, & les termes bxy^2, $ddxy$, f^3x, qui étoient sur une Droite parallele à cette déterminatrice, ont donné $bxu^2 + (2Ab + dd)xu + (A^2b + Add + f^3)x$, qui sont encore sur la même Droite.

Donc, lorsqu'on a plusieurs termes d'un même ordre, comme $ax^m y^n + bx^{m+h} y^{n-1} + cx^{m+2h} y^{n-2} + \&c.$ jusqu'à x^{m+nh}, qui sont tous de l'ordre $m+nh$ puisque $y [= Ax^h]$ est de l'ordre h; la substitution de $Ax^h + u$ à y les transforme en une suite de termes telle que $Px^m u^n + Qx^{m+h} u^{n-1} + Rx^{m+2h} u^{n-2} + \&c.$ jusqu'à Zx^{m+nh}, qui sont aussi tous de l'ordre $m+nh$, & où les exposants d'x sont une progression arithmetique dont la différence est h, & les exposants d'u une autre progr: arith: dont la différence est 1.

Les coëfficients P, Q, R, *&c.* de ces termes se peuvent calculer par une Régle abrégée, pareille à celle du §. 26, & fondée sur le même principe. Le terme $ax^m y^n$, par

par la ſubſtitution de $u + Ax^{b}$ à y, ſe transforme en $ax^{m}u^{n} + naAx^{m+b}u^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.\ 2}aA^{2}x^{m+2b}u^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}aA^{3}x^{m+3b}u^{n-3}$ &c. Le terme $bx^{m+b}y^{n-1}$ ſe transforme en $bx^{m+b}u^{n-1} + \frac{n-1}{1}bAx^{m+2b}u^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{1.\ 2}bA^{2}x^{m+3b}u^{n-3}$, &c. Le terme $cx^{m+2b}y^{n-2}$ en $cx^{m+2b}u^{n-2} + \frac{n-2}{1}cAx^{m+3b}u^{n-3}$ &c. Et le terme $dx^{m+3b}y^{n-3}$ en $dx^{m+3b}u^{n-3}$ &c. Donc la ſomme $ax^{m}y^{n} + bx^{m+b}y^{n-1} + cx^{m+2b}y^{n-2} + dx^{m+3b}y^{n-3}$ &c. ſe transforme en $ax^{m}u^{n} + (naA + b)x^{m+b}u^{n-1} + (\frac{n.n-1}{1.\ 2}aA^{2} + \frac{n-1}{1}bA + c)x^{m+2b}u^{n-2} + (\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}aA^{3} + \frac{n-1.n-2}{1.\ 2}bA^{2} + \frac{n-2}{1}cA + d)x^{m+3b}u^{n-3}$, &c. D'où l'on tire cette Régle.

On écrira en prémiére ligne tous les termes d'un même ordre, ou même toute l'équation, en diſtinguant ſeulement, pour plus de commodité, les ordres de ſes termes, & changeant, ſi l'on veut, y en u. Je dis ſi l'on veut; car on trouvera par expérience qu'il eſt plus ſimple de ne point faire ce changement, mais alors il faut ſe ſouvenir que y, qui marque avant l'opération toute la Série, & pendant l'opération ſon premier terme ſeulement, ne marque, pendant la ſeconde opération, que le ſecond terme

CH. VII. §. 106. terme, & pendant la troisiéme opération, que le troisiéme terme, &c. Ce double emploi d'y ne cause aucune équivoque. On écrira donc en prémiére ligne l'équation proposée, les termes étant rangés selon leurs ordres. On multipliera chaque terme par l'exposant d'y & par Ax^{b}, & en divisant ces produits par y, on aura la seconde Ligne. A celle-ci on multipliera chaque terme par la moitié de l'exposant d'y & par Ax^{b}, & divisant tout par y, on aura la troisiéme ligne. Chaque terme de cette ligne sera multiplié par le tiers de l'exposant d'y & par Ax^{b}, & divisé par y pour avoir la quatriéme ligne. On continuera de même jusqu'à-ce qu'on n'ait plus que des termes sans y. La somme de toutes ces lignes est la transformée, qu'on ordonnera en ajoûtant les termes qui peuvent s'ajoûter & retranchant ceux qui se détruisent mutuellement.

Ainsi, dans l'équation du §. préced. si on veut employer la déterminatrice horizontale qui donnoit l'éq: $x^2y^2 + cx^2y = 0$, ou $y = -c$, on aura $A = -c$, & $b = 0$. Et l'opération se fera ainsi:

	I. Ordre.		II. Ordre.			III. Ordre.
	$x^2y^2 +$	$cx^2y +$	$bxy^2 +$	$ddxy +$	$f^3x +$	ay^3
$\times -c)$	2	1	2	1	0	3
	$-2cx^2y$	$-ccx^2$	$-2bcxy$	$-cddx$		$-3acyy$
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{2}{2}$
	$+ccxx$		$+bccx$			$+3accy$
	0		0			$\frac{1}{3}$
						$-ac^3$

La transformée est donc $x^2y^2 + (c - 2c)x^2y + (cc - cc)x^2 + bxy^2 + (dd - 2bc)xy + (f^3 - cdd + bcc)x + ay^3 -$

$ay^3 - 3acyy + 3accy - ac^3 = 0$, où le ſecond terme ſe réduit à $-cx^2y$, & le troiſiéme à rien. CH. VII. § 106.

Si dans la même équation on veut employer la déterminatrice qui paſſe par les Caſes cx^2y & f^3x, & qui donne $y = -\frac{f^3}{cx}$, l'opération ſera ainſi :

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \multicolumn{2}{c}{\text{I}^e.} & \multicolumn{2}{c}{\text{II}^e.} & \text{III}^e. & \text{IV}^e \text{ Ordres.} \\
 & \overbrace{cx^2y + f^3x} & & \overbrace{+ x^2y^2 + ddxy} & & + bxyy & + ay^3 \\
\times -\frac{f^3}{cx}) & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & -f^3x & & -\frac{2f^3xy}{c} & -\frac{f^3dd}{c} & -\frac{2bf^3y}{c} & -\frac{3af^3yy}{cx} \\
 & 0 & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} \\
\hline
 & & & +\frac{f^6}{cc} & & +\frac{bf^6}{ccx} & -\frac{3af^6y}{ccxx} \\
 & & & 0 & & 0 & \frac{1}{3} \\
\hline
 & & & & & & +\frac{af^9}{c^3x^3}
\end{array}
$$

Ainſi la transformée eſt $cx^2y + (f^3 - f^3)x + x^2y^2 + (dd - \frac{2f^3}{c})xy - (\frac{f^3dd}{c} - \frac{f^6}{cc}) + bxyy - \frac{2bf^3y}{c} + \frac{bf^6}{ccx} + ay^3 - \frac{3af^3yy}{cx} + \frac{3af^6y}{c^2x^2} - \frac{af^9}{c^3x^3} = 0$, dont le ſecond terme diſparoit.

107. ON PEUT tirer de cette obſervation divers moyens d'abreger le Calcul des Séries. Il ſeroit facile d'en déduire une maniére aſſez ſimple de calculer la valeur du terme qui remplit une Caſe aſſignée après un nombre de transformations quelconque; de maniére que connoiſſant

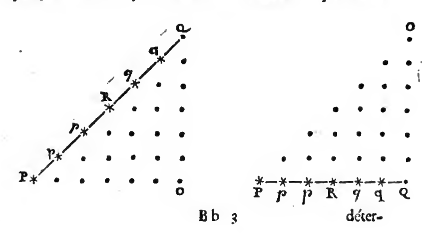
 auſſi

CH. VII. §. 107. aussi par quelles Cases passe la déterminatrice de la derniére transformée, on aura l'équation qu'elle fournit, & par conséquent le terme correspondant de la Série, avec beaucoup de facilité. Mais ce n'est pas ici le lieu d'épuiser cette matiére. Voici une remarque plus nécessaire à nôtre dessein. Si la somme $ax^m y^n + bx^{m+b} y^{n-1} + cx^{m+2b} y^{n-2}$ &c. des termes d'un même ordre quelconque, est divisible, une ou plusieurs fois, par $y - Ax^b$, qui est la valeur d'u, la somme des termes auxquels ceux-ci se transforment [en mettant $u + Ax^b$ pour y] est aussi divisible, le même nombre de fois, par u; puisque ces deux sommes ne différent que par l'expression. Or les termes de la transformée constituent [§. 106] une suite $Px^m u^n + Qx^{m+b} u^{n-1} + Rx^{m+2b} u^{n-2} +$ &c. qui se termine par les termes $+ Xx^{m+(n-2)b} u^2 + Yx^{m+(n-1)b} u + Zx^{m+nb}$. Cette suite ne peut être divisible par u, à moins que le dernier terme ne manque, & que Z ne soit zéro. Elle ne peut être divisible par uu, ou deux fois par u, si ses deux derniers termes, Y & Z ne sont pas zéro. Afin qu'elle soit divisible par u^3, ou trois fois par u, il faut que X, Y & Z soient zéro. En général autant de fois que u, ou plûtôt $y - Ax^b$ qui est sa valeur, divise la somme des termes d'un ordre quelconque, autant manque-t'il, à la transformée, de termes de cet ordre sur les prémiéres colomnes. Car les termes Z, Y, X, &c. sont ceux qui ont leurs places sur la prémiére, seconde, troisiéme, &c. colomnes.

Donc, puisque $y - Ax^b = 0$ est une des racines de l'équation que fournit la déterminatrice, $y - Ax^b$ divise, au

au moins une fois, la somme des termes qui sont sur cette déterminatrice. Ainsi, il manque nécessairement à la transformée le terme qui devroit être au point où la déterminatrice coupe la prémiére Bande verticale. Et il manquera à la transformée les deux termes dont les places sont les points où la déterminatrice coupe la prémiére & la seconde colomne, si $y - Ax^b$ divise deux fois la somme des termes qui sont sur la déterminatrice, si $y - Ax^b = 0$ est une racine double de l'équation que fournit cette déterminatrice. Mais si $y - Ax^b = 0$ est une racine triple de cette équation, il manquera à la transformée les termes qui devroient être où la déterminatrice croise les trois prémiéres colomnes, & ainsi de suite. Ch. VII. §. 107.

108. Si donc PQ représente une déterminatrice, & que $y - Ax^b = 0$ soit une racine simple de l'équation qu'elle fournit, il ne manque à la transformée, sur cette déterminatrice, que le terme qui devroit remplir la Case Q sur la prémiére colomne QO: du moins il ne lui manque pas le terme q sur la seconde colomne. Pq est aussi

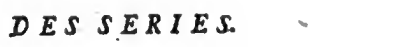


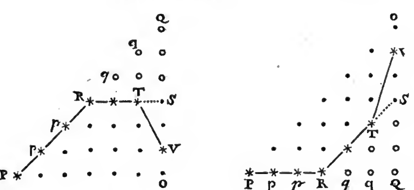
 déter-

CH. VII. §. 108. déterminatrice de la transformée ; car tous les termes de la transformée font au-deffous [ou au-deffus] de Pq, comme l'étoient tous les termes de la propofée [§. 109] ; mais c'eft une déterminatrice inutile, parce que Pq, étant partie de PQ, a la même inclinaifon que PQ aux lignes & aux colomnes. Ainfi PQ ayant donné $y = Ax^b$, Pq donneroit $u = Bx^b$ [§. 85]. On ne doit plus employer Pq après avoir employé PQ [§. 103]. Mais du point q il part une autre déterminatrice, qui porte fur la plus haute [ou la plus baffe] Cafe pleine de la prémiére colomne qO, & qui donne une équation par laquelle on détermine le fecond terme de la Série.

Que fi $y - Ax^b = 0$ eft une racine multiple de l'équation fournie par la déterminatrice PQ, par ex. une racine triple ; alors dans la transformée les Cafes Q, q, *q*, reftent vuides, & la déterminatrice Pp fe termine à la Cafe R fur la quatriéme colomne [§. *pr.*]. Il eft inutile, par la raifon alléguée [§. 103], de confidérer encore cette déterminatrice, mais il en part une (RS) de la Cafe R, qui peut fe terminer en S à la prémiére colomne, & c'eft la feconde déterminatrice qui donne une équation par laquelle on trouve le fecond terme de la Série.

Il peut arriver auffi que le terme S manque, & que la déterminatrice RS fe termine à quelque autre colomne que la prémiére, comme en T ; & alors ce point T donne naiffance à une autre déterminatrice TV ; & fi celle-ci ne va pas à la prémiére colomne, mais fe termine plûtôt, il part de fon extrémité une autre déterminatrice, & de celle-là peut-être encore une autre &c. jufqu'à-ce qu'on vienne aboutir à la prémiére colomne. Chacune de ces déterminatrices, ayant fon inclinaifon particuliére aux lignes





gnes & aux colomnes, donne un expoſant particulier à la puiſſance de *x* dans le ſecond, [ou troiſiéme, quatriéme, &c.] terme : ce qui fait que la Série ſe fourche en autant de Séries qu'il y a de racines dans toutes les équations que fourniſſent toutes ces déterminatrices. Mais ſans trop s'embaraſſer de cela, il ſuffit de prendre la déterminatrice RT, qui part du point R extrémité de la prémiére déterminatrice négligée PR, & de faire uſage de toutes les racines de l'équation qu'elle fournit. Une de ces racines eſt $u = 0$; la ſomme des termes qui ſont ſur cette déterminatrice RΓ étant diviſible par *u*, puiſque RT ne va pas juſqu'à la prémiére colomne qui eſt la Bande ſans *u*. Employant donc cette racine pour avoir la transformée ſuivante, il faudra à *u* ſubſtituer $0 + t$ [§. 102], ce qui n'eſt qu'écrire *t* pour *u*. Ce changement laiſſe tous les termes de l'équation dans leurs places. Ainſi la transformée ſuivante a les mêmes déterminatrices que la précédente : & comme on a déja employé PR & RT, on viendra à la déterminatrice TV, tout comme ſi on avoit paſſé d'abord de PR à TV, la racine $u = 0$ de l'équation fournie par RΓ faiſant le même effet que ſi on avoit négligé RT.

CH. VII. §. 108.

Et

Ch. VII. §. 108. Et il en feroit de même, si la déterminatrice TV, n'aboutissoit pas à la prémiére colomne, mais étoit accompagnée de quelques autres déterminatrices.

109. On voit par-là quelle route il faut suivre pour calculer les *termes irréguliers* de la Série. J'apelle de ce nom ceux qui sont donnés par des équations qui peuvent avoir plusieurs racines, réelles ou imaginaires. Mais il est difficile que cette espèce de désordre dure long-tems. Car aussi-tôt qu'on sera venu à une déterminatrice, dont l'équation n'a point de racines multiples [ou dès qu'on employe une racine simple, si cette équation en a de simples & de multiples] il ne manquera, à la transformée, des termes qui ont leur place sur cette déterminatrice, par ex. RS, que le terme S qui devroit être sur la prémiére colomne [§. 107.]. La déterminatrice de cette transformée partira donc de la Case T, la plus haute [ou la plus basse] de la seconde colomne, & portera sur la Case V, aussi la plus haute [ou la plus basse] des Cases pleines de la prémiére colomne. Donc, dans l'équation que donne cette déterminatrice TV, la variable inconnuë, *u* par ex. ne monte qu'au premier dégré, puisque T est sur la seconde colomne qui est la bande *u*; & cette équation n'aura qu'une seule racine, qui sûrement sera réelle [§. 94]. Et dès-lors la Série dévient réguliére, parceque toutes les déterminatrices suivantes partant du point T, on ne tombe plus dans des équations qui ayent plusieurs racines. Tous les termes suivans de la Série peuvent même se calculer avec plus de facilité par la Méthode qu'on va expliquer.

110. Je suppose qu'on soit venu à une déterminatrice, dont l'équation a quelque racine simple, & qu'on employe cette racine. Pour faciliter l'expression, je la

la nommerai la prémiére déterminatrice, en faiſant abſtraction de toutes les précédentes, s'il y en a eu quelques-unes. J'appellerai auſſi l'équation qu'elle fournit, l'équation propoſée, quoiqu'elle puiſſe être une des transformées. CH. VII. §. 110.

Que m déſigne l'ordre des termes par leſquels paſſe cette prémiére déterminatrice, & que $y - Ax^b = 0$ ſoit une racine ſimple de l'équation qu'elle fournit. En ſubſtituant $Ax^b + u$ à y dans la ſomme des termes de l'ordre m, celui qui devroit être ſur la prémiére colomne feroit x^m [§. 105]: nous négligeons le coëfficient, dont il ne s'agit point ici. Mais ce terme manque, puiſque $y - Ax^b$ eſt ſuppoſée diviſer la ſomme des termes de l'ordre m. [§. 107]. Le terme $x^{m-b}u$, qui ſuit, tombe ſur la ſeconde colomne, & la Caſe qu'il remplit eſt la plus haute [ou la plus baſſe] des Caſes pleines de cette colomne. Si $m \mp n$ eſt l'expoſant des termes du ſecond ordre; [le ſigne $-$ eſt pour les Séries deſcendantes, le ſigne $+$ pour les aſcendantes], le terme le plus haut [ou le plus bas] de la prémiére colomne ſera $x^{m \mp n}$. Ainſi la déterminatrice de cette transformée portant ſur les Caſes $x^{m-b}u$ & $x^{m \mp n}$ donnera $u = Bx^{m \mp n - m + b} = Bx^{b \mp n}$ pour le ſecond terme de la Série. La différence $\mp n$ des expoſants b & $b \mp n$ du prémier Ax^b & du ſecond $Bx^{b \mp n}$ terme de la Série, eſt donc la même que celle des expoſants m & $m \mp n$ du prémier & du ſecond ordre.

Dans toutes les transformées ſuivantes, la Caſe $x^{m-b}u$ reſtera pleine, u ſe changeant ſucceſſivement en t, s, r, &c.

CH.VII. § 110. *&c.* & toutes les déterminatrices suivantes partiront de cette Case pour atteindre la plus haute [ou la plus basse] des Cases pleines de la prémiére colomne. Elles portent successivement sur les diverses Cases de cette colomne, parce qu'à chaque transformation la Case par laquelle a passé la déterminatrice se vuide [§. 107] : mais, d'un autre côté, chaque transformation remplit quelques nouvelles Cases de cette prémiére colomne [§. 105].

Ainsi quand on substituë, dans la prémiére transformée, $Bx^{h \mp n} + t$ à u, les termes du prémier ordre m remplissent les Cases $x^{m \mp 2n}$, $x^{m \mp 3n}$, $x^{m \mp 4n}$, *&c.* & les termes du second ordre $m \mp n$ remplissent aussi les Cases $x^{m \mp 2n}$, $x^{m \mp 3n}$ *&c.* en général $x^{m \mp jn}$ [j marquera un nombre entier quelconque]. Mais la même substitution dans les termes de l'ordre $m \mp p$ remplira, sur la prémiére colomne, les Cases $x^{m \mp p}$, $x^{m \mp p \mp n}$, $x^{m \mp p \mp 2n}$ *&c.* en général $x^{m \mp p \mp jn}$.

Si $x^{m \mp 2n}$ se trouve être la Case pleine la plus haute [ou la plus basse] de la prémiére colomne, la troisiéme déterminatrice passera par $x^{m-h}t$ & $x^{m \mp 2n}$, & donnera $t = Cx^{h \mp 2n}$. Et si ensuite $x^{m \mp 3n}$ est la plus haute [ou la plus basse] des Cases pleines de cette colomne, on aura $s = Dx^{h \mp 3n}$, & ainsi les exposants successifs de x dans les termes y, u, t, s, *&c.* de la Série seroient h, $h \mp n$, $h \mp 2n$, $h \mp 3n$ *&c.* en progression arithmétique dont la différence est n. La Série n'auroit point d'autres termes, s'il n'y avoit dans l'équation proposée point de termes que ceux des ordres m & $m \mp n$. Toutes les transformations à l'infini ne donneroient que des

des termes compris sous cette expression générale $x^{m \mp jn}$ [j est un nombre entier quelconque ou même le zéro]. Ch. VII. §. 110.

Mais s'il y a dans l'équation proposée des termes d'un autre ordre, dont l'exposant soit $m \mp p$, la Case $x^{m \mp p}$ sera une fois la plus haute [ou la plus basse] de la prémiére colomne. Alors la déterminatrice, qui part toûjours de la Case $x^{m-b}u$ [ou $x^{m-b}t$, ou $x^{m-b}s$, &c.] donnera $u = Bx^{m \mp p - m + b} = Bx^{b \mp p}$ [ou $t = Cx^{b \mp p}$, ou $s = Dx^{b \mp p}$ &c]. Le terme où x a pour exposant $b \mp p$ est donc un des termes de la Série.

La substitution de $Bx^{b \mp p} + t$ à u [ou de $Cx^{b \mp p} + s$ à t, &c.] dans les termes des ordres $m \mp jn$ remplira, dans la prémiére colomne, les Cases $x^{m \mp jn \mp p}$, $x^{m \mp jn \mp 2p}$, $x^{m \mp jn \mp 3p}$ &c. Cette prémiére colomne acquerra donc des termes que représente l'expression générale $x^{m \mp jn \mp jp}$. Et la déterminatrice portant successivement sur ces termes, donnera à la Série les termes compris sous cette expression $x^{b \mp jn \mp jp}$.

On ne fait ici attention qu'aux exposants. Dans les équations particuliéres il se peut faire que quelques-uns de ces termes aient le zéro pour coëfficient. Il auroit été plus exact de dire qu'il n'y a dans la Série aucun terme qui ne soit renfermé sous l'expression générale $Hx^{b \mp jn \mp jp}$.

S'il y avoit dans l'équation proposée un quatriéme ordre de termes, dont l'exposant fut $m \mp q$, l'expression gé-

 nérale

CH. VII. §. 110. nérale des termes de la Série seroit $H x^{b \mp jn \mp jp \mp jq}$; & ainsi de suite, s'il y a un plus grand nombre d'ordres.

111. Ainsi quand on est parvenu, dans le calcul d'une Série, aux *termes réguliers*, c'est-à-dire, quand on est venu à une déterminatrice dont l'équation n'a point de racines multiples, ou qu'on ne veut employer qu'une racine simple de l'équation que donne une déterminatrice; on trouve aisément la suite des exposants de x dans les termes suivants de la Série, en prenant les exposants m, $m \mp n$, $m \mp p$, $m \mp q$, &c. de tous les ordres des termes de l'équation, & les retranchant tous du plus grand m [ou ôtant de tous le plus petit m] pour avoir les différences n, p, q, &c. Puis on posera b, exposant du prémier terme, qui est donné par la prémiére déterminatrice, & on lui ajoûtera, ou on en retranchera, successivement les multiples n, $2n$, $3n$, &c. de la prémiére différence. A tous ces termes on ajoûtera ensuite, ou en retranchera, successivement les multiples p, $2p$, $3p$, &c. de la seconde différence; & à tous les termes déjà écrits on ajoûtera, ou on en retranchera, les multiples q, $2q$, $3q$, &c. de la troisiéme différence. On continuera de la sorte, jusqu'à-ce qu'on ait épuisé toutes les différences. Enfin on rangera ces exposants selon leur grandeur.

La progression arithmétique qui commence par b & dont la différence est le plus grand commun diviseur de n, p, q, &c. renferme tous ces exposants. Mais elle contient aussi d'autres termes, non nécessaires, à moins que la plus petite différence n ne soit le commun diviseur de toutes les autres.

112. Par cette Régle, on a la forme de la Série, c'est-à-dire, la suite des puissances de x qui forment ses termes.

Mais

Mais il faut de plus avoir leurs coëfficients. On les calcule assés aisément en supposant à chacune des puissances de x qui entrent dans la Série, un coëfficient indéterminé $A, B, C, D,$ &c. en substituant, dans l'équation, au lieu d'y cette Série indéterminée qui en représente la valeur, & en déterminant l'un après l'autre chaque coëfficient $A, B, C, D,$ &c. par les équations qui se forment en égalant à zéro chaque terme de la transformée. En un mot, on calcule ces coëfficients par la Méthode des indéterminées, que DES CARTES, & après lui tant d'habiles Géométres, ont employé avec un si grand succès pour la résolution des plus beaux Problémes. Ch. VII. §. 112.

Exemple I. Soit proposée l'éq: $6x^7 - 2x^5y^2 - a^3x^2y^2 + 4a^3x^3y + 2a^5xx - 3a^5xy + a^5yy = 0$. On demande la valeur d'y en x par une Série ascendante?

On mettra l'équation sur le Triangle analytique, & puisqu'on veut une Série ascendante, on cherchera ses déterminatrices inférieures. Elle n'en a qu'une, qui donne l'éq: $a^5yy - 3a^5xy + 2a^5xx = 0$, ou $yy - 3xy + 2xx$



$= 0$, qui a deux racines simples $y = x$, & $y = 2x$, en général $y = Ax$. Donc $b = 1$. En menant des droites paralléles à la déterminatrice par tous les termes de l'équation

 tion

Ch. VII. § 112. tion, on voit qu'elle eſt compoſée de trois ordres. Le premier, qui contient les termes a^3yy, $3a^3xy$, $2a^3xx$ par leſquels paſſe la déterminatrice, a 2 pour ſon expoſant, parce que cette droite coupe la prémiére colomne au centre de la Caſe x^2. Le ſecond renferme les termes $-a^3x^2y^2$, & $+4a^3x^3y$, & ſon expoſant eſt 4, parce que la droite qui paſſe par les Caſes x^2y^2 & x^3y vient couper la prémiére colomne au centre de la Caſe x^4. Et le troiſiéme ordre, qui eſt compoſé des termes $-2x^5y^2$ & $6x^7$, a, par une raiſon pareille, 7 pour ſon expoſant. On reconnoitra également bien ces trois ordres, & leurs expoſants, en ſubſtituant dans l'équation au lieu d'y ſa valeur $Ax^b = Ax$ ce qui la change en $6x^7 - 2A^2x^7 - A^2a^3x^4 + 4Aa^3x^4 + 2a^3xx - 3Aa^3xx + A^2a^3xx = 0$, où l'on voit clairement que les deux premiers termes ſont de l'ordre 7, les deux ſuivants de l'ordre 4, & les trois derniers de l'ordre 2. Comme on veut une Série aſcendante, on ôtera le plus petit expoſant 2 des autres 4 & 7, & on aura les différences 2 & 5. On cherchera donc les nombres compris ſous l'expreſſion générale $b + jn + jp$ ou $1 + 2j + 5j$, en poſant 1 [b], lui ajoûtant les multiples de 2 [n], & ajoûtant à tous ces nombres les multiples de 5 [p]. On aura

1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.
6, 8, 10, 12, 14, 16, &c.
11, &c.
16, &c.
21, &c.

qui, rangés ſelon leur grandeur, ſont, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. La forme de la Série ſera donc $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^6 + Ex^7 + Fx^8 + \&c.$ Qu'on ſubſtituë cette valeur d'y dans l'équation, & on aura

$6x^7 =$

$$6x^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots + 6x^7$$
$$-2x^5yy = \ldots\ldots\ldots\ldots -2A^2x^7 \quad * \quad - \&c$$
$$-a^3x^2y^2 = \quad -a^3A^2x^4 - 2a^3ABx^6 - \quad * \quad -2a^3ACx^8 - \&c$$
$$-a^3B^2x^8 - \&c.$$
$$+4a^3x^3y = \quad +4a^3Ax^4 + 4a^3Bx^6 \quad * \quad +4a^3Cx^8 + \&c.$$
$$+2a^3xx = \quad 2a^3xx$$
$$-3a^3xy = -3a^5Axx - 3a^3Bx^4 - 3a^5Cx^6 - 3a^3Dx^7 - 3a^5Ex^8 + \&c.$$
$$+a^5yy = +a^5A^2xx + 2a^3ABx^4 + 2a^5ACx^6 + 2a^5ADx^7 + 2a^3AEx^8 + \&c.$$
$$+a^5B^2x^6 + \quad * \quad + 2a^5BCx^8 + \&c.$$

En égalant ſucceſſivement chaque terme à zéro, on aura ces équations

$$2a^5 - 3a^5A + a^5AA = 0, \text{ ou } AA - 3A + 2 = 0$$
$$-a^3A^2 + 4a^3A - 3a^5B + 2a^3AB = 0,$$
$$\text{ou } AA = 4A = (2aaA - 3aa)B$$
$$-2a^3AB + 4a^3B - 3a^5C + 2a^5AC + a^5B^2 = 0,$$
$$\text{ou } 2AB - 4B - aaBB = (2aaA - 3aa)C$$
$$6 - 2A^2 - 3a^3D + 2a^5AD = 0,$$
$$\text{ou } 2AA - 6 = (2aaA - 3aa)a^3D$$
$$-2a^3AC - a^3B^2 + 4a^3C - 3a^5E + 2a^5AE + 2a^5BC = 0,$$
$$\text{ou } 2AC + B^2 - 4C - 2a^2BC = (2a^2A - 3a^2)E$$
$$\&c \qquad\qquad \&c$$

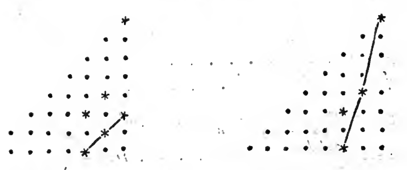
Deſquelles on tire les valeurs de $A, B, C, D, E, \&c.$

$$A = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ou } A = 2$$
$$B = \frac{AA - 4A}{2aaA - 3aa} = \frac{3}{aa} \ldots\ldots B = -\frac{4}{aa}$$
$$C = \frac{2AB - 4B - a^2B^2}{2aaA - 3aa} = \frac{15}{a^4} \ldots\ldots C = -\frac{16}{a^4}$$
$$D = \frac{2AA - 6}{(2aaA - 3aa)a^3} = \frac{4}{a^3} \ldots\ldots D = +\frac{2}{a^3}$$
$$E = \frac{2AC + BB - 4C - 2a^2BC}{2aaA - 3aa} = \frac{111}{a^6} \ldots\ldots E = -\frac{112}{a^6}$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

Ch. VII. §. 112. Il y a deux Séries ascendantes $y = x + \frac{5x^3}{aa} + \frac{15x^5}{a^4} + \frac{4x^6}{a^5} + \frac{111x^7}{a^6}$ &c. & $y = 2x - \frac{4x^3}{aa} - \frac{16x^5}{a4} + \frac{2x^6}{a^5} - \frac{112x^7}{a^6}$ &c.

Exemple 2. Soit proposée l'éq: $x^7 - a^3x^3y + a^3x^2y^2 + a^5yy - 2a^5xy + a^5xx = 0$, d'où l'on demande de tirer la valeur d'y en x par une Série ascendante?

On mettra cette éq: sur le Tr: anal: & on cherchera les déterminatrices inférieures. Il n'y en a qu'une, qui donne l'éq: $a^5yy - 2a^5xy + a^5xx = 0$, ou $yy - 2xy + xx = 0$, qui a deux racines égales, ou une seule racine double $y = x$. Il faut donc [§. 102, 108] substituer $x + u$ à y dans l'équation proposée, & elle se réduira à $x^7 + a^3x^3u + a^3x^2u^2 + a^5uu = 0$, qu'on mettra aussi sur le Tr: anal: Elle y a deux déterminatrices inférieures, dont l'une donne l'éq: $a^5uu + a^3x^3u = 0$, ou $u = -\frac{x^3}{aa}$,



& l'autre donne $a^3x^3u + x^7 = 0$, ou $u = -\frac{x^4}{a^3}$. L'un & l'autre exposant d'x surpasse le précédent: ainsi ces deux déter-

déterminatrices ſont utiles. Mais il ſuffit [§. 108] de conſidérer la prémiére, qui donne $u = -\frac{x^3}{aa} = Ax^b$, c'eſt-à-dire $b = 3$, & $A = -\frac{1}{aa}$. En ſubſtituant Ax^3, ou ſimplement x^3, dans l'éq: $x^7 + a^3x^3u + a^3x^2u^2 + a^5uu = 0$, elle ſe change en $x^7 + a^3x^6 + a^3x^8 + a^5x^6 = 0$, où l'on voit trois ordres de termes, dont les expoſants ſont 6, 7, 8, & les différences 1, 2. Comme la plus petite diviſe la plus grande, la ſuite des expoſants d'x ſera la progr: arith: 3, 4, 5, 6, &c. dont le premier terme eſt 3 [b], & la différence 1 [n]. La forme de la Série ſera donc $u = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6$ *&c.* & cette valeur d'x ſubſtituée dans l'équation donne CH. VII. §. 111.

$$\begin{array}{llllll}
x^7 = \ldots & + x^7 & & & & \\
+a^3x^3u = +a^3Ax^6 & + a^3Bx^7 & + a^3Cx^8 & + a^3Dx^9 & + a^3Ex^{10} & + \&c. \\
+a^3x^2u^2 = \ldots & & + a^3A^2x^8 & + 2a^3ABx^9 & + 2a^3ACx^{10} & + \&c. \\
 & & & & + a^3BBx^{10} & + \&c. \\
+a^5uu = +a^5A^2x^6 & + 2a^5ABx^7 & + 2a^5ACx^8 & + 2a^5ADx^9 & + 2a^5AEx^{10} & + \&c. \\
 & & + a^5BBx^8 & + 2a^5BCx^9 & + 2a^5BDx^{10} & + \&c. \\
 & & & & + a^5CCx^{10} & + \&c.
\end{array}$$

D'où l'on tire, en égalant chaque terme à zéro,

$a^3A + a^5AA = 0$ . . . . c'eſt-à-dire; $A = -\frac{1}{aa}$ ou $A = 0$

$1 + a^3B + 2a^5AB = 0$ . . . . $B = \frac{1}{aaa}$ . . $B = -\frac{1}{aaa}$

$a^3C + a^3AA + 2a^5AC + a^5BB = 0$ . . . . . $C = \frac{2}{a^4}$ . . $C = -\frac{1}{a^4}$

$a^3D + 2a^3AB + 2a^5AD + 2a^5BC = 0$ . . . $D = \frac{2}{a^5}$ . . $D = -\frac{2}{a^5}$

$a^3E + 2a^3AC + a^3BB + 2a^5AE + 2a^5BD + a^5CC = 0$ . . $E = \frac{7}{a^6}$ . . $E = -\frac{4}{a^6}$

&c. *&c.* *&c.*

CH. VII. §. 112. Ainsi u s'exprime par deux Séries, à chacune desquelles ajoûtant x, on aura ces deux valeurs d'y, $y = x - \frac{x^3}{aa} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{2x^5}{a^4} + \frac{2x^6}{a^5} + \frac{7x^7}{a^6}$ &c. & $y = x - \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^6}{a^5} - \frac{4x^7}{a^6}$ &c. Cette derniére est précisément celle qu'auroit donné la déterminatrice dont l'équation étoit $u = -\frac{x^4}{a^3}$.

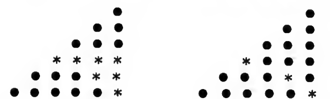
Car, en substituant x^4 à u dans l'éq: $x^7 + a^3x^3u + a^3x^2u^2 + a^5uu = 0$, on la change en $x^7 + a^3x^7 + a^3x^{10} + a^5x^8 = 0$, où l'on voit trois ordres de termes dont les exposants sont 7, 8, 10. Les différences sont donc 1, 3, & comme la plus petite divise la plus grande, la suite des exposants d'x est 4, 5, 6, 7, &c. & la forme de la Série $y = Ax^4 + Bx^5 + Cx^6$ &c. qui, par la détermination des coëfficients se convertit en $-\frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^6}{a^5} - \frac{4x^7}{a^6}$ &c. Ainsi cette déterminatrice ne donne que la seconde des deux Séries qu'avoit fourni l'autre.

Exemple 3. On demande une Série descendante, qui donne la valeur d'y en x tirée de cette éq: $x^2y^3 + 3ax^2y^2 + 3a^2x^2y + a^3xx - a^3xy - a^4x + a^5 = 0$.

L'ayant mise sur le Tr: anal: on ne lui trouve qu'une déterminatrice supérieure qui donne l'éq: $x^2y^3 + 3ax^2y^2 + 3a^2x^2y + a^3x^2 = 0$, ou, divisant par x^2, $y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 = 0$ dont la racine unique, mais triple, est $y = a$. On substituera donc $a + u$ à y dans l'équation proposée, & on la transformera en $x^2u^3 - a^3xu + a^5 = 0$. Celle-ci, mise sur le Triangle, a deux déterminatrices supérieures, dont l'une donne $x^2u^3 - a^3xu = 0$, ou $u = \pm a^{3:2}x^{-1:2}$ & l'autre $-a^3xu + a^5 = 0$, ou $u = a^2x^{-1}$. Il suffira d'employer la prémiére [§. 108], qui donne

b=

$b = -\frac{1}{2}$; & ſubſtituant $x^{-1:2}$ à u dans la transformée, Ch. VII. §. 112.



on la changera en $x^{1:2} - a^3x^{1:2} + a^5x^0 = 0$, où il n'y a que deux ordres dont les expoſants ſont $\frac{1}{2}$ & 0. Il n'y a donc qu'une différence $\frac{1}{2}$; la ſuite des expoſants eſt $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, -2, &c. & la forme de la Série $Ax^{-1:2} + Bx^{-1} + Cx^{-3:2}$ &c. Cette Série ſubſtituée à u,

$$x^2u^3 = A^3x^{\frac{1}{2}} + 3AABx^0 + 3AACx^{-\frac{1}{2}} + 3AADx^{-1} + 3AAEx^{-\frac{3}{2}} + \&c.$$
$$\qquad\qquad + 3ABB \qquad + 6ABC \qquad + 6ABD$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3ACC$$
$$\qquad\qquad\qquad + B^3 \qquad + 3BBC$$
$$-a^3xu = -a^3Ax^{\frac{1}{2}} - a^3Bx^0 - a^3Cx^{-\frac{1}{2}} - a^3Dx^{-1} - a^3Ex^{-\frac{3}{2}} - \&c.$$
$$+ a^5 = \qquad + a^5$$

donne ces équations

$A^3 - a^3A = 0$ . . . . . . c'eſt-à-dire $A = \pm a^{1:2}$ .. ou $A = 0$
$3AAB - a^3B + a^5 = 0$ . . . . . . $B = -\frac{1}{2}aa$ . . . $B = aa$
$3AAC + 3ABB - a^3C = 0$ . . . . . $C = \mp\frac{3}{8}a^{1:2}$ . . . $C = 0$
$3AAD + 6ABC + B^3 - a^3D = 0$ . . . $D = -\frac{1}{2}a^3$ . . . $D = a^3$
$3AAE + 6ABD + 3ACC + 3BBC - a^3E = 0$. . $E = \pm\frac{105}{128}a^{7:2}$ . . . $E = 0$
&c &c &c

On a donc trois Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'u en x, ſçavoir, $u = a^{3:2}x^{-1:2} - \frac{1}{2}aax^{-1} - \frac{3}{8}a^{5:2}x^{-3:2} - \frac{1}{2}a^3x^{-2} + \frac{105}{128}a^{7:2}x^{-5:2}$ &c. $u = -a^{3:2}x^{-1:2}$

$-\frac{1}{2}aax^{-1}$.

CH. VII. §. 112. $-\frac{1}{2}aax^{-1} + \frac{3}{8}a^{5:2}x^{-3:2} - \frac{1}{2}a^{3}x^{-2} - \frac{105}{128}a^{7:2}x^{-5:2}$ &c. & $u = aax^{-1} + a^{3}x^{-2}$ &c. Cette derniére est justement celle qu'auroit donné, un peu plus facilement, la seconde déterminatrice qui donnoit $u = a^{2}x^{-1}$. Car x^{-1} substitué à u dans l'éq: $x^{2}u^{3} - a^{3}xu + a^{5} = 0$ la change en $x^{-1} - a^{3} + a^{5} = 0$: ce qui manifeste deux ordres, dont les exposants sont -1 & 0. Il n'y a donc qu'une différence 1, & la forme de la Série est $Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4}$ &c. valeur qui étant substituée à u dans l'équation,

$$x^{2}u^{3} = \ldots A^{3}x^{-1} + 3AABx^{-2} + 3AACx^{-3} + 3AADx^{-4} + \&c.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3ABB \qquad + 6ABC$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + B^{3}$$
$$-a^{3}xu = -a^{3}A - a^{3}Bx^{-1} - a^{3}Cx^{-2} - a^{3}Dx^{-3} - a^{3}Ex^{-4} - \&c.$$
$$+a^{5} = a^{5} +$$

donne ces équations

$-a^{3}A + a^{5} = 0$ . . . . c'est-à-dire, $A = a^{2}$
$A^{3} - a^{3}B = 0$ . . . . $B = a^{3}$
$3AAB - a^{3}C = 0$ . . . . $C = 3a^{4}$
$3AAC + 3ABB - a^{3}D = 0$ . . . . $D = 10a^{5}$
$3AAD + 6ABC + B^{3} - a^{3}E = 0$ . . . . $E = 49a^{6}$
&c. &c.

Donc $u = a^{2}x^{-1} + a^{3}x^{-2} + 3a^{4}x^{-3} + 10a^{5}x^{-4} + 49a^{6}x^{-5}$ &c. Ainsi la valeur cherchée d'y en x s'exprime par trois Séries descendantes, $y = a + a\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{aa}{2x} - \frac{3aa}{8x}\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{a^{3}}{2xx} + \frac{105a^{3}}{128xx}\sqrt{\frac{a}{x}}$ &c. $y = a - a\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{aa}{2x} + \frac{3aa}{8x}\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{a^{3}}{2xx} - \frac{105a^{3}}{128xx}\sqrt{\frac{a}{x}}$ &c. $y = a + \frac{aa}{x} + \frac{a^{3}}{xx} + \frac{3a^{4}}{x^{3}} + \frac{10a^{5}}{x^{4}} + \frac{49a^{6}}{x^{5}}$ &c.

113. Ajoû-

113. Ajoûtons une Remarque, qui servira dans la suite. On a vû [§. 110] que quand la Série est réguliére, c'est-à-dire, quand on fait usage d'une racine simple de l'équation que fournit la déterminatrice, la différence [n] des exposants d'x dans le prémier & le second [Ax^b, $Bx^{b \mp n}$] termes de la Série est égale à la différence des exposants [m, $m \mp n$] du prémier & du second ordre des termes de l'équation. Il n'en est pas de même d'une racine $y - Ax^b = 0$ qui seroit multiple. Si le dégré de sa multiplicité est j, c'est-à-dire, si $y - Ax^b$ divise j fois la somme des termes du premier ordre m, pourvû qu'elle ne divise point la somme des termes du second ordre $m \mp n$, la différence $b - i$ des exposants du prémier & second terme de la Série $Ax^b + Bx^i$, &c. sera égale à $\frac{n}{j}$, qui est la différence n des exposants des ordres m, & $m \mp n$ divisée par j, de sorte que, dans le second terme, l'exposant d'x sera [$i =$] $b \mp \frac{n}{j}$. Ch. VII. §. 113.

Car puisque $y - Ax^b = 0$ est une racine dont le dégré de la multiplicité est j, quand on aura substitué $Ax^b + u$ à y, il manquera, à la transformée, les termes qui devroient être aux points où la déterminatrice coupe les j prémiéres colomnes [§. 107], c'est-à-dire, les termes x^m, $x^{m-b}u$, $x^{m-2b}u^2$, &c. jusqu'au terme $x^{m-jb}u^j$, qui se trouvera à l'extrémité de cette prémiére déterminatrice. C'est donc de ce terme que part la seconde, qui portera sur le prémier terme du second ordre $x^{m \mp n}$,

CH. VII. §. 113. dont la Case ne sera pas vuide, puisque $y - Ax^b$ ne divise pas la somme des termes du second ordre. Ainsi l'équation, que fournit cette seconde déterminatrice, est de cette forme $x^{m-jb} u^j = B^j x^{m \mp n}$, ou $u^j = B^j x^{m \mp n - m + jb}$, soit $u = Bx^{b \pm \frac{n}{j}}$. L'exposant du second terme est donc $b \mp \frac{n}{j}$.

Cette Remarque sert à discerner, sans calcul, si une Série qui a son prémier terme réel, n'est point demi-imaginaire; dans le cas où la racine $y - Ax^b = 0$, qui donne le premier terme, divisant plus d'une fois les termes du premier ordre m, ne divise point ceux du second $m \mp n$; ce qui est un cas assez ordinaire. Alors si j, dégré de la multiplicité de cette racine, est un nombre pair, & n, différence des exposants des ordres, un nombre impair; le second terme $[Bx^{b \pm \frac{n}{j}}]$ de la Série est à demi imaginaire [§. 95]: il est sûrement réel, si j est impair; mais n & j étant tous deux pairs, il sera ou réel ou imaginaire, selon que les coëfficients des termes $x^{m-jb}u^j$ & $x^{m \mp n}$ auront ou différents signes ou même signe [§. 95]. Or c'est de ce second terme qu'il dépend que la Série soit réelle, ou imaginaire, en entier ou à demi. Car l'équation qui donne ce terme, dans le cas dont nous parlons, n'ayant que deux termes, n'aura point de racines multiples. Ainsi dès-lors la Série est réguliére, & tous ses termes dès le troisiéme sont réels [§. 109].

Nous renvoyons à donner des Exemples pour éclaircir & confirmer cette Remarque, lorsque nous aurons occasion

fion de l'appliquer. [§§. 138. *Ex. III.* 141. *Ex. II.* &c.] Il eſt tems de faire uſage de tous ces Principes pour la recherche des Branches infinies des Courbes. Nous paſſerons enſuite à l'examen des Points ſinguliers.

CHAPITRE VIII.

Des Branches infinies des Courbes.

114. UNE Branche infinie de Courbe s'éloigne infiniment ou de l'Axe des ordonnées, ou de l'Axe des abſciſſes, ou de l'un & de l'autre. Les Branches A, a s'éloignent infiniment de l'Axe des ordonnées, mais non pas de celui des abſciſſes : auſſi leurs abſciſſes infinies ont-elles des ordonnées finies ou même infiniment petites. Les Branches infinies B, b s'éloignent infiniment de l'Axe des abſciſſes, & non de celui des ordonnées, parce que les ordonnées infinies ont des abſciſſes finies ou infiniment petites. Et les Branches infinies C, c s'éloignent infiniment des deux Axes : les abſciſſes infinies ayant des ordonnées infinies, & réciproquement. Pl. IX. Fig. 68.

On trouvera donc les Branches infinies d'une Courbe, en cherchant quelles ordonnées répondent aux abſciſſes infinies, & quelles abſciſſes répondent aux ordonnées infinies : Ou en examinant ce que devient l'équation de la Courbe par la ſuppoſition d'x ou d'y infinies [§. 92] : Ou encore, en cherchant le prémier terme des Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'y en x, ou d'x en y [§. 102]. Car tout cela n'eſt qu'une même choſe.

115. Mais le prémier terme de la Série ne ſuffit pas toûjours pour s'aſſurer de la nature, & de la poſition, ou

PL. IX. ou même de l'existence, des Branches infinies: il faut CH. VII. §. 115.
souvent aller plus loin, & calculer un certain nombre de termes de ces Séries.

Pour être plus bref & plus clair, je supposerai qu'il ne s'agit que d'une Série descendante qui donne la valeur d'y en x. Rien de plus aisé que d'appliquer ce que j'en vais dire à une Série qui donneroit la valeur d'x en y.

Dans la Série descendante $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l +$ &c. les exposants b, i, k, l, &c. vont en diminuant, de sorte qu'à supposer x infinie, chaque terme est infiniment plus petit que celui qui le précéde: & à supposer seulement x extrêmement grande, chaque terme est beaucoup plus petit que celui qui le précéde, & beaucoup plus grand que celui qui le suit [§. 99].

Chacun de ces termes exprime l'ordonnée d'une Ligne, Droite ou Courbe, dont les équations, [en nommant x l'abscisse commune, & y, u, t, s, &c. les ordonnées] seront $y = Ax^b$, $u = Bx^i$, $t = Cx^k$, $s = Dx^l$, &c. l'ordonnée Y de la Courbe proposée étant égale à $y + u + t + s$ &c.

Si cette Série $y + u + t + s$, &c. est imaginaire, l'abscisse infinie a, dans la Courbe proposée, une ordonnée imaginaire, & la Branche infinie que devroit désigner cette Série est imaginaire. Et si toutes les Séries descendantes que peut fournir l'équation d'une Courbe sont dans le même cas, cette Courbe n'a point de Branches infinies. Or un seul terme imaginaire rend la Série entière imaginaire.

Si la Série $y + u + t + s$ &c. est à demi-imaginaire [& pour cela il suffit d'un seul terme qui le soit], des deux abscisses infinies, la positive & la négative, l'une a une ordonnée réelle, l'autre une imaginaire. Et si l'équation ne

CH. VIII. §. 115. ne fournit point d'autres Séries, la Courbe n'a des Branches infinies que d'un côté de l'Axe des ordonnées. PL. IX.

Mais si la Série $y + u + t + s$, *&c.* n'a rien d'imaginaire, les deux abscisses infinies, la positive & la négative, ont des ordonnées réelles : la Courbe jette des Branches de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Une Série réelle indique ainsi deux Branches infinies, une du côté positif & une du côté négatif.

Pour savoir donc précisément le nombre des Branches infinies d'une Courbe, il faut compter au juste le nombre des Séries, réelles & demi-imaginaires, qu'elle peut fournir ; & dans ce compte une Série qui se fourche en deux, trois, quatre, ou &c. fait deux, trois, quatre, ou &c. Séries.

Ainsi il est nécessaire de calculer, au moins, tous les termes irréguliers de chaque Série, pour être sûr que la Série ne se fourche plus, & n'a plus de termes imaginaires, ou en entier, ou à demi. Mais dès qu'on est venu aux termes réguliers, la pluralité des racines & les racines imaginaires ne sont plus à craindre. Il n'est presque pas besoin de connoître ces termes réguliers : du moins il suffit d'en calculer quelques-uns des prémiers suivant le but qu'on se propose dans son Calcul.

116. La Série $y + u + t + s$ *&c.* étant réelle ; si elle est positive, l'ordonnée de l'abscisse infinie est positive : elle est au contraire négative, si la Série est négative. Et comme le prémier terme de cette Série est, lui seul, infiniment plus grand que tous les autres, x étant infinie, c'est le signe de ce prémier terme qui décide de quel côté de l'Axe tombe, à l'infini, la Branche que désigne cette Série.

Si le prémier terme y, ou Ax^{b}, conserve son même

PL. IX. ſigne, ſoit que l'abſciſſe x ait le ſigne $+$ ou le ſigne $-$, CH. VIII. les deux Branches de la Courbe, qui s'étendent l'une du §. 116. côté des abſciſſes poſitives, l'autre du côté des négatives, ces deux Branches, dis-je, tombent d'une même part de l'Axe des abſciſſes ; elle ſe jettent dans les angles de ſuite des ordonnées de même ſigne.

Mais ſi le changement de $+x$ en $-x$ change le ſigne du terme Ax^b de $+$ en $-$ ou de $-$ en $+$, l'ordonnée de l'abſciſſe infinie poſitive a un ſigne contraire à celui de l'ordonnée de l'abſciſſe infinie négative : les deux Branches infinies ſe jettent dans les angles oppoſés des coordonnées.

La Série $y + u + t + s$ &c. étant demi-imaginaire, on jugera par le terme, ou par les termes, demi-imaginaires, de quel côté de l'Axe des ordonnées tombe la Branche qu'elle déſigne, & par le ſigne $+$ ou $-$ du prémier termes Ax^b de quel côté de l'Axe des abſciſſes elle tombe. On ſaura donc dans quel angle des coordonnées ſe jette finalement cette Branche.

Mais ſi la Série a pluſieurs termes demi-imaginaires, qui ſoient tels qu'ils donnent l'excluſion aux Branches infinies, les uns du côté des abſciſſes poſitives, & les autres du côté des abſciſſes négatives : la Courbe n'a alors aucune Branche infinie, non plus que ſi ſa Série étoit entiérement imaginaire.

117. Il paroît de-là que pour ſe faire une juſte idée d'une Branche infinie de Courbe repréſentée par la Série $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l +$ &c. il faut connoître les Lignes que repréſentent les équations $y = Ax^b$, $u = Bx^i$, &c. Ce ſont des *Hyperboles*, quand les expoſants b, i, &c. ſont

CH. VIII. §. 117. ſont négatifs. Ce ſont des *Paraboles*, quand ces expoſants ſont poſitifs. Arrêtons-nous un moment à conſidérer ces deux ſortes de Courbes. Pl. IX.

118. ON NOMME *Hyperbole* la Ligne courbe du ſecond Ordre, dont la nature eſt exprimée par l'équation $y = \frac{\alpha}{x}$, ou $xy = \alpha$. Il eſt aiſé d'en déterminer tant de points qu'on voudra. Soit A l'origine, AB l'Axe des abſciſſes, AD celui des ordonnées. On voit d'abord que l'abſciſſe $AB = 1$ aura une ordonnée $BC = \alpha$, parce que l'éq : $y = \frac{\alpha}{x}$ donne $y = \alpha$ quand $x = 1$. De même l'abſciſſe $Ab = \alpha$ aura l'ordonnée $bc = 1$, parce que l'éq : $y = \frac{\alpha}{x}$ donne $y = 1$ quand $x = \alpha$. On a donc d'abord deux points C & c de l'Hyperbole. Pour en avoir autant d'autres qu'on voudra, on prendra une abſciſſe quelconque AP, & on lui donnera l'ordonnée PM quatriéme proportionelle à AP, AB, & BC; ce qui s'exécute aiſément en prenant ſur le prolongement de l'abſciſſe AP une partie PQ égale à AB [1], & menant par les points Q & C la Droite QC qui coupera l'ordonnée PM au point M. Car les triangles ſemblables QPM, QBC donnent QB ou AP [x] : BC [α] = QP [1] : PM [y]. Donc $y = \frac{\alpha}{x}$. Où l'on peut remarquer, que chaque abſciſſe n'a qu'une ſeule ordonnée, parce que dans l'éq : $xy = \alpha$, la variable y ne monte qu'au prémier dégré [§. 41]. Fig. 69.

Cette conſtruction s'abrége, en conſidérant que puiſque PQ = AB, auſſi QM = Cq. Ayant donc le point C de l'Hyperbole, on en trouvera tant d'autres qu'on voudra en menant par C tant de Droites qu'on voudra Fig. 70.

 QCq,

Pl. IX. QCq, RCr, SCs, &c. terminées aux deux Axes AB, AD des coordonnées. Et sur chacune de ces Droites on prendra $QM = Cq$, $Rm = Cr$, $S\mu = Cs$, &c. ou $qM = CQ$, $rm = CR$, $s\mu = CS$ &c. & on aura les points M, m, μ, &c. de l'Hyperbole. On trouvera par ce moyen un grand nombre de ces points, par lesquels on tracera assez exactement une Hyperbole. Ch. VIII. §. 118.

Fig. 71. 119. Plus l'abscisse AP augmente, plus l'ordonnée PM diminuë. Si AP est égal à $2 = 2AB$, PM est $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}BC$. Si AP vaut $3 = 3AB$, PM est $\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}BC$, & ainsi de suite. Donc la Courbe aproche toûjours plus de l'Axe des abscisses, mais l'ordonnée ne devient jamais nulle ou zéro. Quand AP seroit un million de fois plus grande que AP, PM seroit un million de fois plus petite que BC, très petite par conséquent, mais non pas nulle. La Courbe CMF s'aproche donc toûjours plus de la Droite ABP & ne l'atteint jamais : c'est ce que signifie le nom d'*Asymptote*, qu'on donne à cette Droite.

Plus l'abscisse Ap diminuë, plus l'ordonnée pm augmente. Si Ap est égale à $\frac{1}{2}AB$, pm est $\frac{a}{1:2} = 2a = 2BC$. Si Ap vaut $\frac{1}{3}AB$, pm est $3a = 3BC$, &c. Et lorsque Ap devient nulle, quand le point p tombe sur l'origine A, l'ordonnée devient $\frac{a}{0}$, c'est-à-dire, infinie. Donc la Courbe CmE ne rencontre l'Axe des ordonnées AD qu'à l'infini. AD est donc une autre *Asymptote* de l'Hyperbole. En effet, si l'on considére que l'éq : $xy = a$ donne $x = \frac{a}{y}$, aussi bien que $y = \frac{a}{x}$, on comprendra d'abord que ce qui a été dit des y se peut dire également des x. L'Hyperbole a donc *deux Asymptotes*, qui sont ses deux Axes.

120. Si

CH.VIII. §. 120. 120. Si l'on prend des abſciſſes négatives A p, leurs ordonnées p m ſont auſſi négatives. Car $\frac{a}{-x}$ eſt une grandeur négative. Du reſte, il en eſt des abſciſſes & des ordonnées négatives, comme des poſitives. L'éq : $xy = a$ fait voir que l'origine A eſt un Centre [§. 76]. La Courbe complette a donc deux parties égales & ſemblables E M F, e m f, dans les angles oppoſés D A B, bAd des Aſymptotes, deſquels angles ces Branches ne ſortent pas, & par conſéquent ne ſe rencontrent point l'une l'autre. Les Anciens, regardant comme deux Courbes ces portions détachées, les nommoient les *Hyperboles oppoſées.* Les Modernes les comprennent toutes deux ſous le nom d'Hyperbole, parce que ces deux parties ne ſont qu'une ſeule Courbe, exprimée par une ſeule équation irréductible $y = \frac{a}{x}$, ou $xy = a$ [§. 21]. PL. IX. Fig. 72.

121. Il n'en eſt pas de même des *Hyperboles conjuguées.* C'eſt le nom qu'on donne aux Hyperboles E M Φ, ε μ φ décrites dans les angles D A b, B A d des coordonnées de ſignes contraires, telles que réunies avec les précédentes *EMF*, e m f, chaque abſciſſe A P, A p, poſitive ou négative, a deux ordonnées égales P*M*, PM, ou pμ, pm, l'une poſitive l'autre négative ; & réciproquement que chaque ordonnée A Q, A q, ſoit poſitive ſoit négative, ait deux abſciſſes Q*M*, Qμ, ou qM, q m, l'une poſitive, l'autre négative. Enſorte que les deux Droites b B, D d, ſont en même tems des Diamétres & des Contre-Diamétres [§§. 70 & 73]. Comme l'équation des deux Hyperboles *EMF*, e m f eſt $y = \frac{a}{x}$, ou $xy - a = 0$, celle des deux autres EMΦ, εμφ eſt $y = \frac{a}{-x}$, ou $xy +$ Fig. 73.

 $a = 0$,

Pl. IX. $\alpha = 0$. L'équation qui repréſente les quatre parties des Hyperboles conjuguées ſera donc $x^2y^2 - \alpha^2 = 0$, produit de ces deux éq : $xy - \alpha = 0$, $xy + \alpha = 0$, [§. 20]. Cette équation donne $y^2 = \frac{\alpha^2}{x^2}$, qui a deux racines, 1°. $y = + \frac{\alpha}{x}$, qui repréſente les Hyperboles *EMF*, *emf*, 2°. $y = - \frac{\alpha}{x}$, qui exprime les Hyperboles $EM\Phi$, $\epsilon\mu\varphi$. Mais cette éq : $xxyy - \alpha^2 = 0$ étant réductible en deux autres, les quatre parties des Hyperboles conjuguées ne peuvent pas être regardées comme une ſeule Courbe, mais comme le ſyſtême de deux Hyperboles. Ch. VIII. §. 121.

122. A l'imitation de l'Hyperbole ſimple dont l'équation eſt $y = \frac{\alpha}{x}$, & des Hyperboles conjuguées que repréſente l'éq : $y^2 = \frac{\alpha^2}{x^2}$, & pour étendre la théorie de ces Courbes à toute la généralité poſſible, on a donné le même nom d'*Hyperbole* à toutes les Courbes que peut exprimer l'équation générale $y^l = \frac{\alpha}{x^k}$, ou $y^l = \alpha x^{-k}$, ſoit $y = \alpha^{1:l} x^{-k:l} = Ax^{-k:l}$ en prenant $A = \alpha^{1:l}$. Equation qui peut être de tous les Ordres, ſelon les valeurs qu'on donnera aux expoſants indéterminés k & l, que je ſuppoſe des nombres entiers poſitifs. Si $k = 1 = l$, cette équation générale ſe réduit à $y = \alpha x^{-1}$, ou $xy = \alpha$, qui eſt du ſecond Ordre & repréſente l'*Hyperbole ſimple*, ou *ordinaire*. Si $k = 1$ & $l = 2$, l'éq : générale devient $y = Ax^{-1:2}$, ou $y^2 = \alpha x^{-1}$, ſoit $xy^2 = \alpha$, qui eſt du troiſiéme Ordre & repréſente l'*Hyperbole cubique*. Si

$k = 2$

CH. VIII. §. 122. $k = 2 = l$, l'équation eſt $y^2 = ax^{-2}$, ou $x^2y^2 = a$ du quatriéme Ordre ; mais on a vû [§. *préc.*] qu'elle peut ſe réduire à deux équations du ſecond Ordre. Cette gradation des Hyperboles peut aller à l'infini, & toutes la ſuite de ces Courbes repréſentées par l'équation générale $y^l = ax^{-k}$ ou $y = Ax^{-k:l}$ s'apelle la *Famille des Hyperboles*, l'uſage des Géométres étant d'apeller de même *famille* * les Courbes dont les équations ne différent que par les expoſants de x & de y. PL. IX.

Toutes ces Hyperboles ont leurs Axes pour *Aſymptotes*. Car dans l'éq : $y = Ax^{-k:l} = \frac{A}{x^{k:l}}$, x infinie rend y infiniment petite, & x infiniment petite rend y infinie [§. 78. 79]. D'où l'on conclud, comme pour l'Hyperbole ſimple [§. 119], que la Courbe s'aproche d'un côté infiniment de l'Axe des abſciſſes en s'éloignant infiniment de celui des ordonnées ; & que de l'autre côté elle s'aproche infiniment de l'Axe des ordonnées en s'éloignant infiniment de l'Axe des abſciſſes.

123. LA *Parabole* eſt une autre Courbe du ſecond Ordre, dont l'équation la plus ſimple eſt $y = \frac{xx}{a}$, ou $y = xx$, en prenant a pour l'unité. Les ordonnées [y] ſont donc proportionelles aux quarrés [xx] des abſciſſes. D'où il ſuit que la Courbe AE va en s'éloignant à l'infini de l'Axe AD des ordonnées & de l'Axe AB des abſciſſes, mais infiniment plus de celui-ci que de celui-là ; parce que l'abſciſſe AB ou DE [x] étant ſuppoſée infinie, l'ordonnée BE [y ou xx] eſt infiniment infinie. Et puiſque l'abſciſſe [x], poſitive ou négative, a ſon quarré Fig. 74.

[xx]

* WOLFII *Analyſ.* §. 383.

PL. IX. [xx] positif, l'ordonnée [y ou xx] sera toûjours posi- CH. VIII.
tive. La Parabole jette donc, dans les deux angles des §. 123.
ordonnées positives, deux Branches infinies AM, Aμ, avec lesquelles elle embrasse, pour ainsi dire, l'Axe des ordonnées AD, à la direction de laquelle la Courbe aproche toûjours plus de devenir paralléle, sans y parvenir néantmoins qu'à l'infini. Car on peut concevoir la Parabole comme décrite par le concours de deux mouvemens, l'un de la Droite AD, qui toûjours paralléle à elle-même glisse le long de AB, l'autre d'un Point A qui s'avance sur cette Droite mobile AD de A vers D. Le mouvement de la Droite AD sera supposé uniforme, les espaces parcourus Am, An, Ap, Aq, Ar, &c. étant proportionels au tems que la Droite employe à passer de AD en mD, nD, pD, qD, rD, &c. Le mouvement du Point A sur la Droite AD sera supposé acceléré. D'abord infiniment petit, il augmente continuellement selon la raison des quarrés, ensorte que les espaces mM, nN, pP, qQ, rR, &c. décrits dans les tems proportionels à Am, An, Ap, Aq, Ar, &c. sont comme les quarrés de ces tems. Dans cette supposition, il est clair que la direction de la Courbe, c'est-à-dire, la direction du Point qui la décrit, participe de ses deux mouvemens; l'un par lequel il s'éloigne de AB en coulant sur la Droite AD, l'autre par lequel il s'éloigne avec la Droite AD de la prémiére position de cette Droite mobile. Et l'on voit que, de ces deux mouvemens, le second, qui est uniforme & fini, surpasse d'abord infiniment la vitesse naissante du Point A sur la Droite AD; ce qui fait que la direction de la Parabole à son origine est comme paralléle à AB, ou plûtôt sur AB. Mais cette vitesse du Point A sur AD allant toûjours en croissant, & s'accélérant suivant la progression des quarrés 0, 1, 4, 9, 16, &c. égale bientôt, & puis surpasse la vitesse de la Droite mobile AD; ce qui rend la direction de

CH.VIII. §. 123. de la Parabole moyenne entre celles des Droites AB, AD: mais elle gagne toûjours de plus en plus vers la Direction AD, au parallélisme de laquelle elle tend, & parvient à l'infini, parce qu'à l'infini le mouvement du Point A selon AD est infiniment plus vite que le mouvement de la Droite AD selon AB. Au reste, ce que nous venons de dire de la Branche AM doit s'entendre également de la Branche $A\mu$, qui lui est pareille, & même égale & semblable si AD est perpendiculaire à AB. PL. IX.

124. Il y a plusieurs maniéres de décrire la Parabole, & de trouver géométriquement autant de ses points qu'on voudra. En voici une assez simple, & qui a l'avantage de réussir aussi bien quand les coordonnées sont entr'elles un angle oblique, que quand elles sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Sur l'Axe des abscisses AC, prenez dès l'Origine A une partie AC égale au *Paramétre* [c'est le nom qu'on donne à la Droite constante a qui régle la grandeur de la Parabole & que nous avons prise pour l'unité], & menés CF parallèle à l'Axe des ordonnées AD. Cette préparation faite, si vous voulez avoir l'ordonnée d'une abscisse quelconque Am [ou An, Ap, &c.] portez sur CF la longueur de cette abscisse Am de C en μ. La Droite $A\mu$ retranche de mZ, menée par m parallélement à AD, l'ordonnée mM, dont le sommet M est un point de la Parabole. Car les triangles semblables AmM, $AC\mu$ donnent cette proportion Am [x] : mM [y] $=$ AC [a] : $C\mu$ ou Am [x]. Donc $ay = xx$ ou $y = \frac{xx}{a}$, qui est l'équation de la Parabole. Ayant déterminé par cette Construction un grand nombre de points M, N, E, P, Q, &c. on tracera aisément la demi-Parabole AEQ, & l'autre moitié A*M* se décrira de même. Fig. 75.

 125. On

Pl. IX. 125. On voit par cette deſcription que la Parabole n'a point d'Aſymptote, point de Droite dont elle s'aproche toûjours ſans l'atteindre jamais. Si on veut lui en ſuppoſer, il faudroit en imaginer deux paralléles à l'Axe A D, mais à une diſtance infinie de part & d'autre. Car il eſt vrai que les Branches A M, A *M* de la Parabole s'aprochent toûjours plus de ces Droites conçûës infiniment éloignées, que leurs directions tendent toujours plus à devenir paralléles à celles de ces Droites, & qu'elles coïncident avec elles à l'infini, ce qui eſt le caractére des Aſymptotes [§. 119]. Mais la diſtance infinie à laquelle on eſt obligé d'imaginer ces Aſymptotes, ne permet pas de les tracer, ou de les aſſigner, ce qui fait dire que la Parabole n'a point d'Aſymptotes. Ch. VIII. §. 125.

126. La Parabole ordinaire, ou ſimple, que nous venons de definir, eſt, comme l'Hyperbole ſimple, mére d'une nombreuſe *Famille.* C'eſt celle de toutes les Courbes que repréſente l'équation générale $y = \frac{x^b}{a^{b-1}}$ ou $y = x^b$, en prenant toûjours a, qui eſt le Paramétre, pour l'unité. L'expoſant b peut être un nombre entier, ou rompu $[= \frac{k}{l}]$, mais poſitif; car s'il étoit négatif, l'éq: $y = x^{-k:l}$ ſeroit celle de quelque Hyperbole [§. 122].

Fig. 76. Si l'on ſe repréſente toute cette Famille des Paraboles, décrites ſur les mêmes Axes A B, A D avec un même Paramétre $AC = 1$, on verra qu'elles ont toutes un même point commun E. Car à l'abſciſſe $[x]$ $AC = 1$, répond dans chaque Parabole une même ordonnée $[y]$ $CE = 1$ puiſque l'éq: $y = x^b$ donne $y = 1$ quand $x = 1$. De plus,

CH. VIII. §. 126. plus, si l'on compare deux Paraboles quelconques, on verra que celle qui a le plus grand exposant b a aussi la plus grande ordonnée, lorsque l'abscisse A P surpasse l'unité ou le Paramétre AC, mais qu'elle a la plus petite ordonnée, quand l'abscisse A p est moindre que le Paramétre, ou l'unité AC. Car soit $y = x^b$ l'équation de la Parabole A m E M, & $y = x^H$ celle de la Parabole AμEM [H est supposé plus grand que b]. Donc, si l'on prend une abscisse commune [x] AP ou Ap, les ordonnées PM, PM, ou pm, pμ sont entr'elles comme x^b, x^H. Mais, si x surpasse l'unité, la puissance supérieure x^H surpasse l'inférieure x^b. Donc, quand [x] AP > AC [1], PM [x^H] > PM [x^b]. Et si [A p] x est moindre que l'unité [A C], x est une fraction, dont la puissance plus élevée x^H [p μ] est moindre que la puissance moins élevée x^b [p m]. PL. IX.

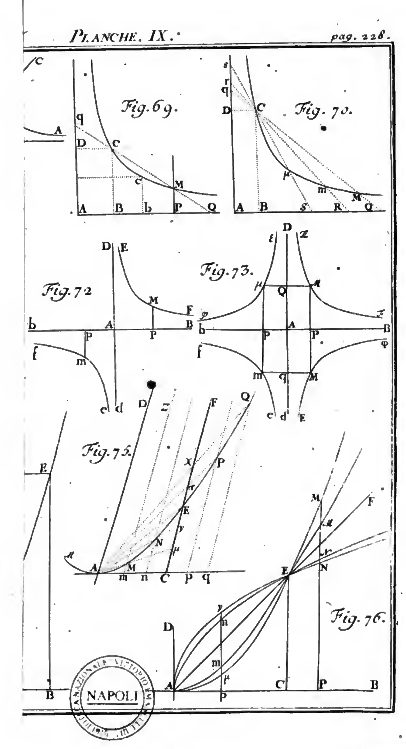
127. Entre ces Paraboles se trouve la Ligne droite AEF, qui coupe en deux également l'angle DAB des coordonnées. Elle est représentée par l'éq: $y = x$, qui résulte de la supposition $b = 1$, ou $k = l$. Cette Droite est moyenne entre les Paraboles AmEM, AμEM qui ont l'exposant $b > 1$, ou $k > l$, & les Paraboles A n EN, AνEN, dans l'équation desquelles $b < 1$, ou $k < l$. Les prémiéres tournent leur concavité, & les derniéres leur convexité vers AD. Mais, si l'on y prend garde, on verra bientôt que celles-là sont les mêmes que celles-ci, si ce n'est que les unes ont AB pour l'Axe des abscisses & AD pour l'Axe des ordonnées, au lieu que les autres ont AB pour l'Axe des ordonnées, & AD pour l'Axe

 des

PL. IX. des abſciſſes. Car l'éq: $y = x^{k:l}$, où $k > l$, eſt la même CH. VIII. §. 127.
que l'éq: $x = y^{l:k}$ où $l < k$. Prenant donc x pour y & y pour x, c'eſt-à-dire, changeant l'Axe des abſciſſes en celui des ordonnées & réciproquement, la même équation répréſente la Parabole A m E M & la Parabole A n E N qui ſont, l'une d'un côté, l'autre de l'autre de la Droite AEF.

128. PAR ces Remarques on peut ſe former une idée d'une Branche de Parabole, de quelque Ordre quelle ſoit. Quoiqu'elles différent beaucoup des Hyperboles, ces deux Familles de Courbes ſont pourtant repréſentées par l'équation commune $y^l = \alpha x^k$, ou $y = \alpha^{1:l} x^{k:l}$ ſoit $y = A x^b$ [en prenant $A = \alpha^{1:l}$, & $b = k:l$]. Cette équation déſigne des Paraboles, quand $\frac{b}{l}$ ou k eſt poſitif. Elle exprime des Hyperboles, quand cet expoſant eſt négatif. Mais pour connoître le nombre & la poſition des Branches de ces Courbes, pour ſavoir dans quels angles des coordonnées elles ſe jettent, il faut faire attention & au Paramétre α, qui peut être poſitif ou négatif, & aux expoſants k, l, qui peuvent être pairs ou impairs. [§. 95].

I. Si k & l ſont tous deux impairs, x^k puiſſance impaire de x a le même ſigne que x. Donc αx^k [$= y^l$] aura le même ſigne que x, ſi α eſt poſitif; elle aura un ſigne contraire, ſi α eſt négatif. Et y, racine impaire de y^l, ayant le même ſigne que y^l [$= \alpha x^k$], aura le
PL. X. même ſigne que x, ſi α eſt poſitif, elle aura un ſigne
Fig. 77. contraire, ſi α eſt négatif. Dans le premier Cas, la Courbe étend ſes Branches dans les angles DAB, bAd des coordonnées de même ſigne; & dans le ſecond Cas, elle les


Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 72
Fig. 73.
Fig. 75.
Fig. 76.

CH.VIII. §. 118. les a dans les angles DAb, BAd des coordonnées de différens signes. Dans l'un & l'autre Cas, les deux Branches sont de part & d'autre des deux Axes. PL. X.

II. Si k est pair & l impair, x^k, puissance paire de x, est positive, quelque signe qu'on donne à x. Ainsi $a x^k$ [$= y^l$] est positive ou négative, selon que a est positif ou négatif : & y, racine impaire de y^l, est de même signe que y^l [$= a x^k$], c'est-à-dire, positive ou négative, selon que a est positif ou négatif. Dans le prémier Cas, la Courbe étend ses Branches dans les angles DAB, DAb des ordonnées positives. Dans le second Cas, elle les jette dans les angles dAB, dAb des ordonnées négatives. Dans l'un & l'autre, les deux Branches sont de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais d'une même part de l'Axe des abscisses. Fig. 78.

III. Si k est impair & l pair, x^k, puissance impaire de x, aura le même signe que x. Ainsi $a x^k$ [$= y^l$] sera positive, si a & x ont le même signe ; elle sera négative, si les signes de a & de x sont contraires. Et y, racine impaire de y^l [$= a x^k$], sera imaginaire, si y^l est négative ; mais elle sera réelle, & aura les deux signes $+$ & $-$, si y^l est positive. Donc y est imaginaire, lorsque a & x ont différent signe ; & lorsque a & x ont le même signe, y a deux valeurs égales, mais l'une positive & l'autre négative. Ainsi, a étant positif, la Courbe étend deux Branches dans les angles de suite BAD, BAd des abscisses positives : mais a étant négatif, la Courbe étend ses Branches dans les angles DAb, bAd des abscisses négatives. Elle est donc toute d'un même côté de l'Axe des ordonnées ; mais elle se jette de part & d'autre de l'Axe des abscisses. Fig. 79.

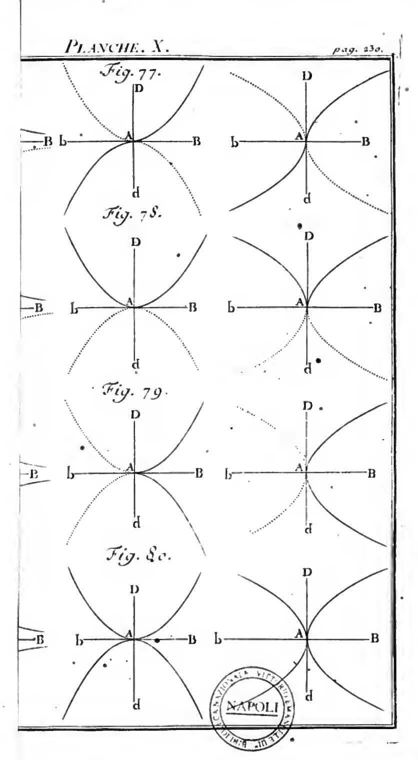
 IV. Enfin,

PL. X. IV. Enfin, si k & l sont tous deux pairs, la Courbe est imaginaire, quand a est négatif : mais elle a quatre Branches réelles, une dans chacun des quatre angles des coordonnées, quand a est positif. Car x^k, puissance paire de x, étant toûjours positive, ax^k [$=y^l$] est négative, & y, racine paire de y^l, toûjours imaginaire, lorsque a est négatif. Mais lorsque a est positif, ax^k [$=y^l$] est toûjours positive, & y, racine paire de y^l, a toûjours deux valeurs égales, une positive, une négative. Donc, a étant positif, chaque abscisse, soit positive soit négative, a deux ordonnées, une positive & une négative ; ce qui fait quatre Branches, une dans chacun des quatre angles des coordonnées. CH. VIII. §. 128. Fig. 80.

129. TOUTE Branche infinie, en s'éloignant de l'Origine, prend insensiblement la nature d'une Branche d'Hyperbole ou d'une Branche de Parabole. Elle en diffère peu à une grande distance ; & elle se confond exactement avec elle à l'infini. De-là, toutes les Branches infinies des Courbes se divisent en deux Genres, les *Branches Hyperboliques*, & les *Branches Paraboliques*. Les Hyperboles, & par conséquent les Branches hyperboliques ont une Asymptote [§. 119], & les Paraboles & les Branches paraboliques n'en ont point [§. 125] : c'est-là leur caractere distinctif *.

130. Quand on a la Série $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l$ &c. qui exprime l'ordonnée d'une Branche infinie, il est aisé de connoitre si cette Branche est hyperbolique ou parabolique.

* NEWTON, *Enumer. lin. tert. ordinis.* II. 5.


PLANCHE. X.
pag. 230.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
D
d
A
B
b
NAPOLI

CH. VIII. §. 130. lique. Qu'on prenne tous les termes de cette Série, où l'exposant de x est positif ou zéro, & que leur somme soit nommée v. Si la Ligne dont x & v sont les coordonnées est une Droite, la Branche de Courbe est hyperbolique & cette Droite est l'Asymptote. Au contraire, la Branche de Courbe est parabolique, si la Ligne dont x est l'abscisse & v l'ordonnée n'est pas une Droite. PL. X.

131. Je dis 1°. que si la Ligne dont x & v sont les coordonnées est une Droite, la Branche infinie que répréſente la Série $v + \&c.$ est une Branche hyperbolique, qui a pour Asymptote cette Droite. Car tous les termes suivants, où x a un exposant négatif, sont une somme d'autant plus petite que x est plus grande [§. 99], & se réduisent à rien quand x est infinie. Donc l'ordonnée Y de la Courbe aproche toûjours plus de l'égalité avec l'ordonnée v de la Droite, & lui devient égale quand x devient infinie : c'est-à-dire, que la Courbe aproche toûjours plus de la Droite & se confond avec elle à l'infini. Cette Droite est donc Asymptote [§. 119], & la Branche de Courbe une Branche hyperbolique [§. 129].

Afin que les termes v soient l'ordonnée d'une Ligne droite, il faut que x, dans ces termes, ne passe pas le premier dégré [§. 40]. Ces termes seront donc ou zéro, ou une constante B, ou Ax, ou $Ax + B$. S'ils sont zéro, c'est-à-dire, si x, dans le premier terme de la Série, a un exposant négatif; l'équation de l'Asymptote est est $v = 0$, ce qui désigne l'Axe des abscisses [§. 40. III. 1]. Si les termes v se réduisent à B, l'équation de l'Asymptote $v = B$ indique une Droite qui est l'abscisse de l'ordonnée B [§. 40. II. 3]. Si les termes v ne sont que le terme Ax, l'éq : $v = Ax$ donne pour l'Asymptote une Droite qui passe par l'Origine & qui est tellement inclinée aux deux Axes, que le Sinus de l'angle qu'elle fait avec les

PL. X. les abſciſſes, eſt au Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ordonnées, comme A eſt à l'unité [§. 40. II. 1]. Enfin, ſi les termes v ſont $Ax+B$, l'Aſymptote repréſentée par l'éq : $v=Ax+B$, eſt une Droite qui paſſe par l'extrémité de l'ordonnée B & de l'abſciſſe $-\frac{B}{A}$, faiſant avec les abſciſſes & avec les ordonnées des angles dont les Sinus ſont entr'eux comme A à 1. [§. 40. I]. CH. VIII. §. 131.

132. Cette même Branche hyperbolique, qui a une Aſymptote droite, a auſſi une *Aſymptote courbe*, ou plûtôt elle en a une infinité. Car plus on prendra de termes de la Série, plus on aprochera de la valeur d'Y. Donc ſi on décrit une Courbe, qui ait x pour abſciſſe, & pour ordonnée v avec un ou pluſieurs des termes ſuivants de la Série, cette Courbe ſera une Aſymptote de la Courbe propoſée, qui s'en aprochera d'autant plus à l'infini, qu'on prendra un plus grand nombre de termes après v. Mais auſſi l'équation de cette Courbe Aſymptote devient d'autant plus compoſée. Ainſi, comme le prémier terme de ceux qui ſuivent v vaut lui ſeul infiniment plus que tous les autres [§. 78], la Courbe, qui a pour ordonnée les termes v avec le prémier terme qui ſuit, c'eſt-à-dire avec le prémier terme de la Série où x a un expoſant négatif, eſt proprement celle qu'on nomme l'Aſymptote courbe de la Branche infinie repréſentée par cette Série : & cette Courbe eſt une Hyperbole.

Fig. 81. Soit A l'origine; AB, AC les deux Axes ; AP [x] une abſciſſe; PM [Y] l'ordonnée de la Courbe propoſée Mm ; PO [v] l'ordonnée de l'Aſymptote droite BCO ; PN [$v+t$] l'ordonnée de l'Aſymptote courbe Nn [t eſt le prémier terme de la Série où x a un expoſant négatif; nous le ſuppoſerons égal à $Cx^{-k:l}$] : Je dis que cette Courbe

CH. VIII. §. 132. Courbe Nn est une Hyperbole, dont on peut regarder CO comme l'abscisse, & ON [t] comme l'ordonnée. Car les paralléles AC, PO donnent AB : BC = AP : CO. La raison de AB à BC est donnée, puisque l'angle BAC des deux Axes, & les côtés AB [$-\frac{B}{A}$] & AC [B] du triangle ABC sont donnés. Que $\frac{B}{A} : \frac{K}{A}$, ou $B : K$, exprime la raison de AB à BC. Donc $B : K =$ AB [x] : CO [z]. Ainsi l'abscisse z est $\frac{Kx}{B}$, ou $x = \frac{Bz}{K}$, & l'ordonnée t [$Cx^{-k:l}$] $= \frac{CB^{-k:l}}{K^{-k:l}} z^{-k:l}$. L'équation de cette Courbe Nn est donc $t = \frac{CB^{-k:l}}{K^{-k:l}} z^{-k:l}$, ou $t^l = \frac{C^l K^k}{B^k} z^{-k}$, qui est l'équation d'une Hyperbole [§. 122]. PL. XI.

La position des Branches de cette Hyperbole-asymptote est déterminée par le coëfficient C & par l'exposant $-\frac{k}{l}$ du terme t [$= Cx^{-k:l}$]. Si le coëfficient a, à l'infini, le même signe qu'v, les Branches tombent, par raport à l'Axe des abscisses, au-delà de l'Asymptote-droite : mais elles tombent en-deça, c'est-à-dire, entre l'Axe & l'Asymptote, si v & t ont à l'infini des signes contraires.

Quant à l'exposant $-\frac{k}{l}$, si k & l sont tous deux impairs, les deux Branches de l'Hyperbole-asymptote

PL. XI. tombent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, & de part & d'autre de l'Axe des abscisses, qui est ici l'Asymptote-droite. Si k est impair & l pair, les deux Branches tombent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais d'une même part de l'Axe des abscisses, qui est ici l'Asymptote droite. Si k est pair & l impair, les deux Branches tombent d'une même part de l'Axe des ordonnées, & de part & d'autre de l'Axe des abscisses ou de l'Asymptote droite. Et si k & l sont tous deux pairs, l'Hyperbole-asymptote a quatre Branches qui se jettent dans chacun des quatre angles que fait l'Asymptote droite avec l'Axe des ordonnées; angles que nous apellerons, dans la suite, les *Angles asymptotiques*. [§. 128]. CH. VIII, §. 132.

La position des Branches de l'Hyperbole-asymptote détermine celle des Branches infinies de la Courbe dont elles sont asymptotes : Du moins celles de la Courbe n'auront pas d'autres positions que celles de l'Hyperbole. Car il peut se faire que les termes suivants de la Série ou multiplient, ou rendent imaginaires les Branches de la Courbe, dont celles de l'Hyperbole devroient être les asymptotes.

Mais cela ne sauroit arriver, si t est un des termes réguliers de la Série [§. 109]. Il sera donc convenable, en conservant le nom d'*Hyperbole-asymptote* à celle dont l'abscisse x a l'ordonnée $v+t$, d'appeller *Asymptote-courbe*, ou *curviligne*, la Ligne qui a pour ordonnée tous les termes irréguliers de la Série, en y joignant s'il le faut, autant de termes réguliers qu'il en est besoin, pour en avoir au moins un, où l'exposant de x soit négatif. Mais alors il se peut bien que cette Courbe ne soit plus une Hyperbole.

133. J'ai dit 2°. Que la Branche infinie, représentée par une Série, est Parabolique lorsque les termes v [ce sont

CH. VIII §. 133. ſont ceux où l'expoſant d'x eſt poſitif ou zéro] n'expriment pas une Droite. Ainſi dès que, dans le prémier terme Ax^b, l'expoſant b eſt un nombre poſitif différent de l'unité, la Branche de Courbe eſt parabolique : elle l'eſt auſſi lorſque $b = 1$, pourvû que l'expoſant i du ſecond terme Bx^i ſoit poſitif, quoiqu'inférieur à l'unité. PL. XI.

Car ſoit $t = Bx^i$. Que la Droite AO ſoit celle dont l'abſciſſe AP [x] a ſon ordonnée PO égale à Ax prémier terme de la Série, c'eſt-à-dire, que la Droite AO faſſe avec les abſciſſes AP & les ordonnées PO des angles OAP, AOP, dont les Sinus ſont entr'eux comme OP [Ax] & AP [x], ou comme A & 1. Soit auſſi NAn la Parabole dont l'abſciſſe x [AP] a une ordonnée t ou Bx^i [PN]. Donc prenant par tout OM égale à PN, la Courbe MAm, qui paſſe par tous les points M, eſt celle qui a pour ordonnée $Ax + Bx^i =$ PO + PN = PO + OM = PM. Je dis que cette Courbe eſt une Parabole, dont on doit regarder AO comme l'Axe des abſciſſes. Car nommant z l'abſciſſe AO, elle eſt à AP [x] en raiſon donnée, puiſque les angles du triangle APO ſont tous donnés. Que cette raiſon ſoit exprimée par celle de K à 1. Donc $z = Kx$, ou $x = \frac{z}{K}$. Et l'ordonnée OM [t] étant égale à PN [Bx^i, ou $\frac{Bz^i}{K^i}$], l'équation de la Courbe MAm ſera $t = \frac{B}{K^i} z^i$, qui eſt celle d'une Parabole, i étant poſitif. [§. 126]. Fig. 82.

Le prémier terme Ax^b de la Série, qui exprime l'or-

 donnée

PL. XI. donnée d'une Branche parabolique, fait juger de la dernière direction de cette Branche. Comme il surpasse infiniment tous les autres, x étant infinie; la Courbe est censée avoir à l'infini des ordonnées égales à celles que représente ce terme seul. Quand b surpasse l'unité, la dernière direction de la Branche infinie est paralléle aux ordonnées, & elle est paralléle aux abscisses, quand b est plus petit que l'unité [§. 127]. Mais lorsque $b = 1$, la dernière direction des Branches infinies est oblique aux coordonnées, & les sinus des angles qu'elle fait avec les ordonnées & avec les abscisses sont entr'eux comme 1 à A [coëfficient du prémier terme Ax]; puisque la dernière direction d'une Parabole est celle de son Axe [§.123]. CH. VIII. §. 133.

134. C'est pourquoi l'on regarde comme Asymptote-courbe d'une Branche parabolique, la Parabole qui a pour ordonnée le prémier terme Ax^b de la Série, ou les deux prémiers termes $Ax + Bx^i$, lorsque dans le prémier, x a l'exposant 1. Car quoique quelques termes suivants puissent encore être infinis, si x a dans ces termes un exposant positif; de sorte qu'à l'infini, les ordonnées de la Courbe & de la Parabole diffèrent d'une grandeur infinie; cependant comme cette différence est infiniment moins grande que l'ordonnée parabolique [§. 78], elle s'évanouit en comparaison de cette ordonnée, & la Courbe & sa Parabole-asymptote sont censées coïncider à l'infini.

On peut pourtant, si l'on veut [& il est même plus exact de le faire] regarder comme Asymptote-curviligne d'une Branche parabolique, la Courbe qui a pour ordonnée la somme de tous les termes de la Série, dans lesquels x a un exposant positif ou zéro. Car dans les termes suivants x ayant un exposant négatif, ils deviennent très petits quand x est très grande, & infiniment petits quand

CH.VIII. §.134. quand x eſt infinie. Donc alors la Courbe & ſon Aſymptote s'aprochent toûjours plus l'un de l'autre, & coïncident à l'infini. Mais cette Aſymptote-curviligne peut n'être plus une Parabole. On diſtinguera donc, quand il ſera néceſſaire, la *Parabole-aſymptote*, & *l'Aſymptote-courbe*, ou *curviligne*. Celle-là a pour ordonnée le prémier terme de la Série, ou les deux prémiers, quand l'expoſant d'x dans le prémier terme eſt l'unité. L'ordonnée de celle-ci eſt la ſomme de tous les termes de la Série, dans leſquels l'expoſant d'x eſt poſitif ou zéro. PL. XI.

Le terme ſuivant marque par ſon ſigne, ſemblable ou contraire au ſigne de l'ordonnée de l'Aſymptote-curviligne à l'infini, que la Courbe tombe en-deçà ou en-delà de cette Aſymptote : & l'expoſant de x dans ce terme fait connoître ſi les Branches infinies exprimées par la Série s'étendent d'une ſeule part ou de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, & ſi elles tombent d'un même ou de différents côtés de leur Aſymptote. C'eſt la même choſe que pour les Branches hyperboliques [§. 132], & ici, comme là, il eſt indiſpenſable de faire attention à tous les termes irréguliers de la Série.

135. Pour démêler ſans confuſion tout ce qui regarde les Branches infinies d'une Courbe dont l'équation eſt donnée; il faut, après l'avoir miſe ſur le Triangle analytique, égaler à zéro ſon plus haut Rang. Les racines de cette équation ne peuvent avoir que ces trois ou quatre formes $y = 0$, $x = 0$, $y = Ax$, ou, ce qui revient au même, $x = \frac{y}{A}$. Car ſi ce plus haut Rang eſt $\alpha y^v + \beta x y^{v-1} + \gamma x^2 y^{v-2} + \ldots \&c. \ldots + \chi x^{v-2} y^2 + \psi x^{v-1} y + \omega x^v$, on aura, [en l'égalant à zéro & diviſant par x^v]

 αy^v

PL. XI. $\alpha\frac{y^v}{x^v}+\beta\frac{y^{v-1}}{x^{v-1}}+\gamma\frac{y^{v-2}}{x^{v-2}}+\ldots$ &c. $\ldots+\chi\frac{y^2}{x^2}+\psi\frac{y}{x}+\omega$ CH. VIII. §. 135.

$=0$, qui a le nombre v de racines telles que $\frac{y}{x}\pm A=0$, $\frac{y}{x}\pm A'=0$, &c. ou $y\pm Ax=0$, $y\pm A'x=0$, &c.

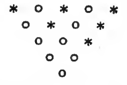
Lorsque le plus haut Rang a une ou plusieurs Cases vuides du côté de la Bande sans y, lorsque ω, ou ω & ψ, ou ω, ψ & χ, &c. sont zéro, l'éq: $\alpha y^v+\beta xy^{v-1}$ &c. est divisible, une ou plusieurs fois, par y; elle a une ou plusieurs racines $y=0$. De même, lorsque ce plus haut Rang a une ou plusieurs Cases vuides du côté de la Bande sans x, lorsque α, ou α & β, ou α, β & γ, &c. sont zéro, l'éq: $\alpha y^v+\beta xy^{v-1}$ &c. est divisible, une ou plusieurs fois, par x; elle a une ou plusieurs racines $x=0$. Mais si les deux Cases extrémes du plus haut Rang, y^v, x^v sont remplies, toutes les racines de l'équation faite en égalant ce Rang à zéro sont de la forme $y=Ax$, ou $x=\frac{y}{A}$.

La racine $y=0$, étant l'équation de l'Axe des abscisses; les Branches infinies qu'elle indique auront leur derniére direction paralléle à cet Axe. La racine $x=0$ marque au contraire des Branches infinies dont la derniére direction est paralléle à l'Axe des ordonnées, duquel l'équation est $x=0$. Et les racines $y-Ax=0$ dénotent des Branches dont la derniére direction est paralléle à la Droite que représente cette éq: $y-Ax=0$, c'est-à-dire, à une Droite oblique aux coordonnées, & dont l'inclinaison est telle que les Sinus des angles qu'elle fait avec

CH. VIII. §. 135. avec les abſciſſes & avec les ordonnées ſont entr'eux comme *A* à 1. Si ces Branches ſont paraboliques, cette Droite eſt l'Axe de leur Parabole-aſymptote ou paralléle à cet Axe [§. 133]. Si ces Branches ſont hyperboliques, cette Droite eſt leur Aſymptote, ou paralléle à l'Aſymptote [§. 131]. PL. XI.

136. C'eſt donc en égalant à zéro le plus haut Rang de l'équation d'une Courbe, qu'on juge de la derniére direction de ſes Branches infinies. Elles peuvent avoir autant de derniéres directions que cette équation du plus haut Rang a de racines réelles: Si elle n'a que des racines imaginaires, la Courbe n'a point de derniéres directions, point de Branches infinies.

Exemple. Soit propoſée l'éq: $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axyy - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$. Si on la met ſur le Tr: anal: on voit que l'éq: $x^4 + 2x^2y^2 + x^4 = 0$ du plus haut



Rang n'a que des racines imaginaires. Car, en tirant la racine quarrée, on a $yy + xx = 0$, dont les racines ſont $y + x\sqrt{-1} = 0$, & $y - x\sqrt{-1} = 0$, toutes deux imaginaires. Donc la Courbe n'a point de Branches infinies. Fig. 83.

En effet, l'équation propoſée n'a point d'autres déterminatrices ſupérieures que celle qui traverſe le plus haut Rang, puiſque les deux Caſes extrémes de ce Rang y^4 & x^4 ſont pleines. Cette équation ne fournit donc point d'autres

PL. XI. tres Séries descendantes que les deux qui commencent par les termes $-x\sqrt{-1}$ & $+x\sqrt{-1}$, donnés par cette déterminatrice. Et dès le prémier terme ces Séries sont imaginaires. L'équation ne donne donc aucune Série qui puisse représenter quelque Branche infinie. CH. VIII. §. 136.

On le rendra très sensible par la Construction de cette Courbe. En regardant son équation comme une équation du second dégré, on trouvera $yy = 3ax - xx \pm 2\sqrt{(2a^2x^2 - ax^3)} = ax \pm 2\sqrt{(ax(2ax - xx))} + 2ax - xx$, & tirant la racine quarrée $y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{(2ax - xx)}$. Chaque abscisse AP[$x$] a donc quatre
Fig. 83. ordonnées [y] PM, PM, Pm, Pm, les deux prémiéres positives & les deux derniéres négatives. PM, Pm sont égales à la somme $+\sqrt{ax} + \sqrt{(2ax - xx)}$ & $-\sqrt{ax} - \sqrt{(2ax - xx)}$, & P$M$, P$m$ sont égales à la différence $-\sqrt{ax} + \sqrt{(2ax - xx)}$ & $+\sqrt{ax} - \sqrt{(2ax - xx)}$, des ordonnées PN, PO, ou Pn, Po de la Parabole NDAdn, dont l'équation est $yy = ax$, ou $y = \pm\sqrt{ax}$; & du Cercle ADOBodA dont l'équation est $yy = 2ax - xx$, ou $y = \pm\sqrt{(2ax - xx)}$. Or comme le Cercle ne s'étend que jusqu'au diamétre AB, & qu'au-delà ses ordonnées sont imaginaires, la Courbe AECAÇeA, ne passera pas non plus au-delà de l'abscisse AB, & n'aura, comme on le voit par sa Construction, aucune Branche infinie.

137. Lors qu'égalant à zéro le plus haut Rang de l'équation de la Courbe on lui trouve des racines réelles; ces racines sont ou $y = 0$, ou $x = 0$, ou $y = Ax$, soit $x = \frac{y}{A}$ [§. 135].

I. Elle a des racines $y = 0$, lors qu'il manque au prémier Rang une ou plusieurs Cases du côté de la Bande sans y. Alors il part de la Case pleine qui est la plus voisine

CH. VIII. §. 137. fine de cette bande une déterminatrice supérieure, qui PL. XI. fournit l'équation par laquelle on a le premier terme Ax^{b} de la Série [car on ne peut regarder o [$=y$] comme un terme]. Selon les Cases qui sont pleines dans les Rangs inférieurs, cette déterminatrice aura différentes positions qu'on peut réduire à trois. Ou elle est parallèle à la Bande sans x, ou elle tombe au-dessous de cette parallèle, ou elle reste au-dessus.



1. Lorsque la déterminatrice est parallèle à la Bande sans x, le prémier terme de la Série est Ax^{o}, ou simplement A [§. 96. 3°]. A l'abscisse x infinie il répond une ordonnée finie A, & réciproquement l'ordonnée A a une abscisse x infinie. Si on méne cette abscisse de l'ordonnée A, la Courbe s'éloignant infiniment de l'Origine s'aproche infiniment de cette abscisse, qui est ainsi son Asymptote [§. 119]. Donc, une déterminatrice parallèle à la Bande sans x indique des Abscisses-asymptotes †, c'est-à-dire des Asymptotes droites parallèles à l'Axe des abscisses, & par conséquent des Branches hyperboliques. [§. 129].

2. Quand la déterminatrice tombe au-dessous de la parallèle à la Bande sans x; elle ne coupe que la Bande sans y, ou bien elle passe par la Pointe. Alors l'exposant d'x, dans le prémier terme de la Série, est négatif [§. 96. 1°],

† M. DE GUA, *Usage de l'Anal.* pag. 35.

PL. XI. ce qui marque des Branches hyperboliques, qui ont pour CH. VIII. Aſymptote l'Axe des abſciſſes [§. 131] *. §. 137.

3. Quand, au contraire, la déterminatrice tombe au-deſſus de la parallèle à la Bande ſans x; elle coupe, étant prolongée, les deux Bandes extérieures du Triangle, mais elle retranche une plus grande portion de la Bande ſans x que de la Bande ſans y. Alors x, dans le prémier terme de la Série, a un expoſant poſitif plus petit que l'unité [§. 96. 2°], ce qui marque des Branches paraboliques dont la derniére direction eſt parallèle aux abſciſſes [§. 133].

II. Par un raiſonnement tout pareil, les racines $x=0$ ayant lieu lorſqu'il manque au premier Rang une ou pluſieurs Caſes du côté de la Bande ſans x, il part de la Caſe pleine qui eſt la plus voiſine de cette Bande, une déterminatrice ſupérieure, qui eſt ou parallèle à la Bande ſans y, ou au-deſſous de cette parallèle, ou au-deſſus.

1. Si elle eſt parallèle à la Bande ſans y; elle indique des Branches hyperboliques, qui ont des Ordonnées-aſymptotes, c'eſt-à-dire, des Aſymptotes droites parallèles aux ordonnées.

2. Si elle tombe au-deſſous de la parallèle à la Bande ſans y, c'eſt-à-dire, ſi elle ne coupe que la Bande ſans x, ou ſi elle paſſe par la Pointe; elle déſigne des Branches hyperboliques, qui ont pour Aſymptote l'Axe des ordonnées.

3. Et ſi elle tombe au-deſſus de la parallèle à la Bande ſans y, coupant les deux Bandes extérieures du Triangle, mais retranchant une plus grande portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x; elle indique des Branches paraboliques, dont la derniére direction eſt parallèle à l'Axe des ordonnées.

III. Les

* M. DE GUA, *Uſage de l'Analyſ.* pag. 41.

CH. VIII. §. 137. III. Les racines $y = Ax$, ou $x = \frac{y}{A}$ ne marquent PL. XI.
que la derniére direction des Branches infinies d'une Courbe, sans décider si elles sont hyperboliques, ou paraboliques. Elles sont hyperboliques, lorsqu'x dans le second terme de la Série $y = Ax + Bx^i + \&c.$ ou lorsqu'y dans le second terme de la Série $x = \frac{y}{A} + By^i + \&c.$ a un exposant négatif. Elles sont paraboliques, lorsque cet exposant du second terme est positif. [§§. 132. 133].

Mais ceci demande d'être éclairci par le détail, & rendu sensible par les Exemples.

Nous suivrons la distinction qui vient d'être indiquée & qui nous présente ces quatre Cas.

I. Lorsque la déterminatrice part de la Pointe, ou ne coupe qu'une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, sans être parallèle à l'autre.

II. Lorsque la déterminatrice est parallèle à une des deux Bandes extérieures du Triangle.

III. Lorsque la déterminatrice coupe inégalement les deux Bandes extérieures.

IV. Lorsque la déterminatrice coupe également les deux Bandes extérieures, & que couchée sur le plus haut Rang elle fait avec ces Bandes un triangle isoscèle.

138. *Cas I.* Quand une déterminatrice, sans être parallèle aux Bandes extérieures du Triangle analytique, n'en coupe qu'une, ou passe par la Pointe; elle se trouve supérieure si l'on conçoit le Triangle couché sur une de ses Bandes, & inférieure si on le conçoit couché sur l'autre.

Suppofons d'abord que cette déterminatrice laisse toutes les Cases pleines entr'elle & la Bande sans x; elle sera supérieure lorsque le Triangle est couché sur la Bande sans

 x, infé-

PL. XI. x, inférieure lorſqu'il eſt couché ſur la Bande ſans y. Mais, le Triangle étant couché ſur la Bande ſans x, une déterminatrice ſupérieure indique les termes qui compoſent ſeuls toute l'équation, quand on ſuppoſe x infinie: Et le Triangle étant couché ſur la Bande ſans y, une déterminatrice inférieure paſſe par les termes que la ſuppoſition d'y infiniment petite rend infiniment plus grands que les autres. Donc puiſque la déterminatrice qui laiſſe toutes les Caſes pleines entr'elle & la Bande ſans x, paſſe par les termes qui conviennent à la ſuppoſition d'x infinie & d'y infiniment petite, les termes par leſquels elle paſſe conſtituent l'équation de la Courbe, lorſque les abſciſſes ſont infinies & les ordonnées infiniment petites. Cette déterminatrice marque donc des Branches, qui s'éloignant infiniment de l'Axe des ordonnées s'aprochent infiniment de celui des abſciſſes, c'eſt-à-dire des Branches qui ont pour Aſymptote l'Axe des abſciſſes. CH. VIII. §. 138.

Suppoſons, au contraire, que la déterminatrice laiſſe toutes les Caſes pleines entr'elle & la Bande ſans y; elle ſera ſupérieure lorſque le Triangle eſt couché ſur la Bande ſans y, & l'équation qu'elle donne répond à la ſuppoſition d'y infinie. Cette même déterminatrice eſt inférieure, quand le Triangle eſt couché ſur la Bande ſans x, & ſon équation convient à la ſuppoſition d'x infiniment petite. Les termes par leſquels elle paſſe conſtituent donc l'équation de la Courbe qui répond en même tems à la ſuppoſition d'y infinie & d'x infiniment petite. Ainſi la déterminatrice indique des Branches infinies qui s'éloignent infiniment de l'Axe des abſciſſes en s'aprochant infiniment de celui des ordonnées, lequel eſt par conſéquent leur Aſymptote.

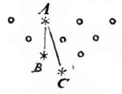
On examinera donc de quel côté une déterminatrice qui part de la Pointe du Tr: anal: ou qui ne coupe qu'une de ſes deux Bandes extérieures, laiſſe toutes les Caſes

CH. VIII. §. 138. Cases remplies par l'équation proposée. Si c'est du côté de la Bande sans x, l'Axe des abscisses est Asymptote. Si c'est du côté de la Bande sans y, c'est l'Axe des ordonnées qui est Asymptote. PL. XI.

Le signe & l'exposant du prémier terme de la Série, lequel est donné par cette déterminatrice, fait connoître dans quels Angles asymptotiques s'étendent les Branches de l'Hyperbole-asymptote dont il exprime l'ordonnée. Si l'équation de cette déterminatrice n'a point de racines multiples, ou qu'ayant des racines multiples & des racines simples, on se serve d'une racine simple pour calculer ce prémier terme; dès-lors la Série est réguliére, & les Branches de la Courbe se jettent dans les mêmes angles que ceux de l'Hyperbole qui est son Asymptote. Mais si l'on employe une racine multiple, la Série n'est pas réguliére dès le prémier terme, & il en faut encore calculer quelques-uns, pour avoir l'Asymptote-curviligne dont les Branches infinies sont accompagnées de celles de la Courbe. [§. 132].

Exemple I. On demande quelles sont les Branches infinies de la Courbe que représente l'éq : $xyy - aay - b^3 = 0$.

Cette équation mise sur le Tr: anal: a deux déterminatrices AB & AC. Celle-ci passe par la Pointe: L'autre



coupe la Bande sans x & n'est pas parallèle à la Bande sans y. Ainsi elles marquent, l'une & l'autre, des Branches

 hyper-

PL. XI. hyperboliques. *AB*, qui laiſſe la Caſe *C* du côté de la Bande ſans *y*, déſigne des Branches qui ont pour Aſymptote l'Axe des ordonnées. Et *AC*, qui laiſſe la Caſe *B* du coté de la Bande ſans *x*, indique des Branches dont l'Axe des abſciſſes eſt l'Aſymptote. La ſeule vûë du Triangle donne ces concluſions. CH. VIII. §. 138.

Mais pour s'aſſurer de l'exiſtence & de la poſition de ces Branches infinies, il faut voir les équations que donnent ces déterminatrices.

AB donne $xyy - aay = 0$, ou $x = \frac{aa}{y}$. C'eſt le prémier terme de la Série deſcendante qui donne *x* en *y*, & il exprime l'ordonnée d'une Aſymptote-courbe, qui eſt une Hyperbole ſimple d'un Paramétre poſitif; dont par conſéquent les Branches s'étendent dans les angles des coordonnées de même ſigne [§. 128. I]. Et les Branches de la Courbe qui doivent accompagner celles de cette Hyperbole ſont réelles, puiſque l'éq: $xyy - aay = 0$ n'a point de racines multiples. En couchant le Triangle ſur la Bande ſans *y*, on voit que la déterminatrice *AB* porte ſur les plus hautes Caſes des deux prémiéres colomnes. Donc la Série eſt réguliére dès le prémier terme. Ainſi la Courbe, à l'exemple de ſon Hyperbole-aſymptote, jette deux Branches qui s'aprochent à l'infini de l'Axe des ordonnées, l'une dans l'angle des coordonnées poſitives, l'autre dans l'angle des coordonnées négatives.

L'autre déterminatrice *AC* donne l'éq: $xyy - b^3 = 0$, ou $y = \pm b^{3:2} x^{-1:2}$, qui indique une Hyperbole du troiſiéme Ordre, dont les Branches s'étendent dans les Angles des abſciſſes poſitives [§. 128. III]. Elles embraſſent donc, pour ainſi dire, l'Axe des abſciſſes qui eſt leur Aſymptote-droite, & l'accompagnent à l'infini du côté poſitif. Et comme cette équation n'a point de racines multiples; la Série eſt réguliére dès le prémier terme, & les

CH VIII. les Branches de la Courbe accompagnent, dans les mêmes PL. XI.
§. 138. angles, celles de l'Hyperbole-asymptote.

La Courbe proposée a donc quatre Branches infinies hyperboliques: deux desquelles, qui ont pour Asymptote-droite l'Axe des ordonnées, se jettent dans les angles opposés des coordonnées de même signe; & les deux autres, dont l'Axe des abscisses est l'Asymptote, s'étendent dans les angles de suite des abscisses positives. Le cours de cette Ligne est à peu près tel que le représente la *Fig.* 84.

Et cela s'acorde très bien avec ce qu'on peut tirer de l'équation proposée. Résoluë comme une équation du second dégré, elle donne $y = \frac{aa \pm \sqrt{(4b^3x + a^4)}}{2x}$ où l'on voit 1°. qu'y est imaginaire lorsque $4b^3x + a^4$ devient négative; ce qui n'a jamais lieu, x étant positive; mais bien quand x négative est au-dessous de $\frac{a^4}{4b^3}$ [AB], dont l'ordonnée y est égale à $-aa : \frac{2a^4}{4b^3} = -\frac{2b^3}{aa}$ [BC]. 2°. Que x étant infinie, y est infiniment petite & a deux valeurs égales, mais l'une positive RS, l'autre négative Rs. Car x étant infinie, il ne reste dans le numérateur de la fraction égale à y, que $\pm\sqrt{4b^3x}$, qui divisé par $2x$ se réduit à $\pm\sqrt{\frac{b^3}{x}}$. 3°. Que x étant zéro, ou plûtôt infiniment petite, y a deux valeurs, l'une finie $-\frac{b^3}{a}$, [AD], l'autre infinie $+\frac{aa}{x}$, qui est positive [AE] quand x est positive, & négative [AF] quand x est négative. Car si on tire la racine quarrée $\sqrt{(a^4 + 4b^3x)}$, on aura une Série $aa + \frac{2b^3x}{aa}$ &c. qu'on ajoûtera à aa & qu'on en retranchera

PL. XI. tranchera, pour avoir, en divisant par $2x$, les deux valeurs d'y, $\frac{aa}{x} + \frac{b^3}{aa}$ &c. [AE ou AF] infinie, & $-\frac{b^3}{aa}$ &c. [AD] finie. CH. VIII. §. 138.

Que si l'on veut, pour plus de clarté, décrire la Courbe par points, on le fera aisément en prenant la valeur d'x, qui est $\frac{aa}{y} + \frac{bbb}{yy}$. Ainsi supposant $a = 2 = b$, on aura $x = \frac{4}{y} + \frac{8}{yy}$, ce qui donné les valeurs suivantes.

Soit $y = 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6$, &c.
on aura $x = 1\frac{3}{25}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{9}, 4, 12$, *inf.*, $4, 0, -\frac{4}{9}, -\frac{1}{2}, -\frac{12}{25}, -\frac{4}{9}$, &c.

Exemple 2. L'équation proposée est $xxyy - a^3y - b^3x = 0$. En la mettant sur le Tr: anal: on lui trouve deux déterminatrices, AB, AC, qui sont alternativement supérieures & inférieures, quand on couche le Triangle sur la Bande sans y & sur la Bande sans x. Elles marquent donc des Branches hyperboliques, qui ont pour

```
        A
o   o   *   o   o
  o   o   o   o
    o   o   o
    B*     *C
        o
```

Asymptote, les unes l'Axe des ordonnées, les autres l'Axe des abscisses. La Série qui représente les prémiéres a pour son prémier terme $x = \pm a^{3:2} y^{-1:2}$, que donne l'éq: $xxyy - a^3y = 0$ fournie par la déterminatrice AB. Il marque deux branches qui se jettent le long de l'Axe des ordonnées dans les deux angles de suite des ordonnées positives. Et ces deux branches de l'Hyperbole-asymptote sont

CH.VIII. §. 138. sont accompagnées de celles de la Courbe, puisque l'éq: $xxyy - a^3y = 0$ n'a point de racines multiples. PL. XI.

Il en est précisément de même des Branches qui ont pour Asymptote l'Axe des abscisses. La position de la déterminatrice *AC* est symétrique à celle de la déterminatrice *AB*, & l'équation que donne *AC* est la même que celle que donne *AB*, en changeant x en y & a en b. La Courbe a donc quatre Branches hyperboliques, dont deux FC, DC suivent l'Axe des ordonnées dans les angles des ordonnées positives, & deux DB, HB accompagnent l'Axe des abscisses dans les angles des abscisses positives. Fig. 85.

Cette conclusion se confirme par la résolution de l'équation proposée. Elle se présente alors sous cette forme $y = \frac{a^3 \pm \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$, où y a deux valeurs. En prenant x positive, l'une des deux valeurs d'y est positive, sç. $\frac{a^3 + \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$, l'autre $\frac{a^3 - \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$ est négative, parce que $\sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}$ surpasse $a^3 = \sqrt{a^6}$. Quand x est infinie, ces deux valeurs se réduisent à $\pm \frac{\sqrt{4b^3x^3}}{2xx} = \pm b^{3:2}x^{-1:2}$. Elles sont donc infiniment petites & égales, mais de différents signes. Quand x est infiniment petite, la valeur positive devient $[\frac{a^3 + \sqrt{a^6}}{2xx} = \frac{a^3}{xx}]$ infinie, & la valeur négative se réduit à $[\frac{a^3 - \sqrt{a^6}}{2xx} =]$ zéro. La valeur positive désigne donc une Branche BDC, qui a pour Asymptote les deux Axes; & la valeur négative indique une Branche BHA, qui a pour Asymptote l'Axe des abscisses, & qui passe par l'origine A. Si l'on prend x négative, les deux valeurs d'y, qui sont présen-

Pl. XI. tement $\frac{a^3 \pm \sqrt{(a^6 - 4b^3x^3)}}{2xx}$, sont toutes deux positives, Ch. VIII. §. 138.
parce que a^3 [$= \sqrt{a^6}$] surpasse $\sqrt{(a^6 - 4b^3x^3)}$. La Courbe n'a donc point de Branches dans l'angle des coordonnées négatives, mais elle en a deux AF, FC, dans l'angle des abscisses négatives & des ordonnées positives. Il est vrai qu'elles ne s'écartent pas beaucoup de l'Axe des ordonnées, puisqu'elles deviennent imaginaires dès que x est plus négative que $\frac{aa}{b\sqrt[3]{4}}$ [AE], laquelle abscisse AE a son son ordonnée EF $= \frac{bb\sqrt[3]{2}}{a}$. On prouveroit de même, en résolvant l'équation selon l'inconnuë x, ce qui donne $x = \frac{b^3 \pm \sqrt{(b^6 + 4a^3y^3)}}{2yy}$, que la Branche AHB ne s'éloigne de l'Axe des abscisses nulle part plus qu'en H, qui a pour abscisse GH $= \frac{aa\sqrt[3]{2}}{b}$ & pour ordonnée AG $= \frac{bb}{a\sqrt[3]{4}}$. D'où il paroit que la Courbe est composée de deux parties dont la position est celle qu'on voit dans la *Fig.* 85, & qu'elle a les quatre Branches hyperboliques qui ont été indiquées par les deux déterminatrices de son équation mise sur le Triangle analytique.

Cet Exemple peut faire naitre une difficulté apparente. Si on cherche la Série qui donne y en x, on trouvera $y = \pm b\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^3}{2xx} \pm \frac{a^6}{8b^2x^3}\sqrt{\frac{b}{x}}$ &c. dont les termes demi-imaginaires semblent indiquer que les ordonnées sont imaginaires du côté des abscisses négatives. Cependant on vient de voir que la Courbe a deux Branches AF, FC de ce côté-là. Mais il faut considérer que la Série

CH. VIII. §. 138. Série n'est convergente que quand x est fort grande : elle est divergente & trompeuse, quand x est assez petite, ce qui est le cas des Branches AFC, dont l'abscisse ne surpasse point $AE = \frac{aa}{b\sqrt[3]{4}}$. On a trouvé $y = \frac{a^3 \pm \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$. PL. XI.

Or la racine quarrée de $a^6 + 4b^3x^3$ se peut exprimer par deux Séries différentes, dont l'une sert quand $a^6 > 4b^3x^3$, & l'autre quand $4b^3x^3 > a^6$. La préміére, qu'on trouve en tirant la racine de $a^6 + 4b^3x^3$, est $a^3 + \frac{2b^3x^3}{a^3} - \frac{2b^6x^6}{a^9} + \frac{2b^9x^9}{a^{15}}$ &c. Et la seconde, qu'on trouve en tirant la racine de $4b^3x^3 + a^6$, est $2bx^2\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^6}{4bx}\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{a^{12}}{64b^5x^4}\sqrt{\frac{b}{x}}$ &c. Ces Séries substituées pour $\sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}$ dans la valeur d'y, donnent quatre Séries, sç. P & Q quand $a^6 > 4b^3x^3$, ou $x < \frac{aa}{b\sqrt[3]{4}} = AE = Ae$; & R, S, quand $4b^3x^3 > a^6$, ou $x > \frac{aa}{b\sqrt[3]{4}} = AE = Ae$.

$$P \ldots y = \frac{a^3}{xx} + \frac{b^3x}{a^3} - \frac{b^6x^4}{a^9} \text{ \&c.}$$

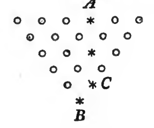
$$Q \ldots y = -\frac{b^3x}{a^3} + \frac{b^6x^4}{a^9} + \frac{b^9x^7}{a^{15}} \text{ \&c.}$$

$$R \ldots y = +2b\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^3}{2xx} + \frac{a^6}{8b^2x^3}\sqrt{\frac{b}{x}} \text{ \&c.}$$

$$S \ldots y = -2b\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^3}{2xx} - \frac{a^6}{8b^2x^4}\sqrt{\frac{b}{x}} \text{ \&c.}$$

PL. XI. La Série P exprime les ordonnées des Branches C f, CF, suivant qu'on prend x positive ou négative. La Série Q celle des Branches A φ, AF. Et les Séries R, S celles des Branches fB, φB. Les deux prémiéres n'ont rien d'imaginaire, mais leur usage ne s'étend point au-delà des abscisses A e $[\frac{aa}{b\sqrt[3]{4}}]$, A E $[-\frac{aa}{b\sqrt[3]{4}}]$. Les Séries R, S, qui servent au delà des abscisses AE, A e, à l'infini, sont réelles quand x est positive, imaginaires quand x est négative. Aussi la Courbe a-t'elle deux Branches du côté positif, qui ont des abscisses infinies: elle n'en a aucune du côté négatif, qui ayent des abscisses plus grandes que AE $[-\frac{aa}{b\sqrt[3]{4}}]$. CH. VIII. § 138.

Exemple 3. Il s'agit de la Courbe représentée par l'éq: $x^3yy - 2aaxxy + a^4x - b^5 = 0$, qui étant mise sur le Triangle analytique, a deux déterminatrices. La prémiére AB qui est supérieure quand on couche le Triangle sur la Bande sans y, indique des Branches hyperboli-



ques, dont l'Asymptote droite est l'Axe des ordonnées, & l'Asymptote courbe l'Hyperbole exprimée par l'éq: $x^3yy - b^5 = 0$, ou $x = b^{5:3}y^{-2:3}$, qui étend ses Branches dans les deux angles de suite des abscisses positives, c'est-à-dire

CH. VIII. à-dire du côté positif de leur Asymptote droite. Et ces Pl. XI.
§. 138. Branches d'Hyperboles sont accompagnées de deux Branches réelles de la Courbe, puisque l'éq: $x^3yy - b^5 = 0$ n'a point de racines multiples.

L'autre déterminatrice *AC*, qui est supérieure quand on couche le Triangle sur la Bande sans x, & qui par conséquent désigne des Branches hyperboliques dont l'Asymptote droite est l'Axe des abscisses, donne pour l'équation de l'Hyperbole-asymptote $x^3yy - 2aaxxy + a^4x = 0$, ou, divisant par x, $xxyy - 2aaxy + a^4 = 0$, qui n'a qu'une racine, mais double, $xy - aa = 0$, ou $y = \frac{aa}{x}$. Elle exprime une Hyperbole ordinaire positive, c'est-à-dire, qui jette ses Branches dans les angles des coordonnées de même signe. Mais comme cette racine est double, la Série n'est pas encore régulière, & il faut en chercher au moins encore un terme. On substituera donc $\frac{aa}{x} + u$ à y dans l'équation proposée, ce qui la transformera en $x^3uu - b^5 = 0$, ou $u = b^{5:2}x^{-3:2}$, qui est la même Hyperbole qu'on a trouvé pour l'Asymptote courbe des Branches infinies qui s'étendent le long de l'Axe des ordonnées. La transformée n'ayant que deux termes, la Série est terminée, & l'équation de la Courbe se réduit à $y = \frac{aa}{x} + \frac{bb}{x}\sqrt{\frac{b}{x}}$. D'où il paroit que la Courbe n'a aucune ordonnée du côté des abscisses négatives, & que du côté des positives elle a deux Branches BM, D*M* le Fig. 86. long de l'Axe des ordonnées, & deux autres Bm, D*m* le long de l'Axe des abscisses.

Puisque l'équation proposée se réduit à $y = \frac{aa}{x} \pm \frac{bb}{x}\sqrt{\frac{b}{x}}$, on la construira en décrivant sur les Axes AC, AD deux Hyper-

PL. XI. Hyperboles, l'une Nn, qui a pour ordonnée $\frac{aa}{x}$ [PN, pn], CH. VIII. §. 138.

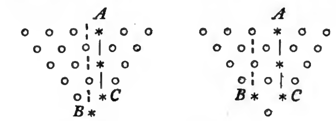
& l'autre Oo, qui a pour ordonnée $\pm\frac{bb}{x}\sqrt{\frac{b}{x}}$ [PO, P*O*, po, p*o*]. Car si on donne à chaque abscisse AP, ou Ap, deux ordonnées PM, P*M*, ou pm, p*m*, dont l'une PM, ou pm, soit égale à la somme N*O* [PN+P*O*], ou n*o* [pn+p*o*] des ordonnées de ces deux Hyperboles, & l'autre P*M*, ou p*m*, à leur différence NO [PN—PO], ou no [pn—po]; les points M, m, *M*, *m*, seront à la Courbe proposée MBm, *MDm*.

Si au lieu de $-b^5$, on avoit eu $-b^4y$ dans l'équation proposée, la transformée par la substitution de $aax^{-1}+u$ à y auroit été $x^3uu-b^4u=aab^4x^{-1}=0$, qui, étant mise sur le Triang: anal: couché sur la Bande sans x, a une déterminatrice supérieure qui fournit l'éq: $x^3uu-aab^4x^{-1}=0$, ou $u=\pm abbx^{-2}$. Comme cette équation n'a point de racines multiples, la Série est régulière dès ce second terme. L'équation de l'Asymptote-courbe est donc $y=\frac{aa}{x}\pm\frac{abb}{xx}$: par laquelle il paroit

que les deux Branches de l'Hyperbole $y=\frac{aa}{x}$ qui accompagnent l'Axe des abscisses, sont suivies, l'une & l'autre, de deux Branches de la Courbe, qui tombent, l'une endeçà, l'autre en-delà, des Branches de l'Hyperbole. Ainsi la Courbe a huit Branches hyperboliques, dont le cours est à peu près tel qu'on le voit dans la *Fig. 87*.

On pouvoit prévoir cette différence des deux Courbes *Fig. 86 & 87*, presque par la seule inspection de leurs équations mises sur le Triang: analytique. La racine double $xy-aa=0$ de l'équation que donne la déterminatrice *AC* ne divise pas le terme unique b^5, ou b^4y, du second

CH. VIII. §. 138. second ordre. Donc [§. 113] la Série qui donne y par x, aura, ou n'aura pas, des termes demi-imaginaires, selon que la différence des exposants du prémier & du second ordre est non-divisible, ou divisible, par l'exposant 2 de la multiplicité de la racine $xy - aa = 0$, c'est-à-dire se- PL. XI.



lon que cette différence est impaire ou paire. Or cette différence est impaire dans l'éq: $x^3y^2 - 2a^2x^2y + a^4x - b^5 = 0$, où les exposants des deux ordres sont 1 & 0. Elle est paire dans l'éq: $x^3y^2 - 2a^2x^2y + a^4x - b^4y = 0$, où ces exposants sont 1 & -1. Cela se voit aussi par la seule inspection du Triangle, en menant la déterminatrice AC & sa parallèle qui passe par tous les termes [ici par le terme unique B] du second ordre. Entre ces deux droites il n'y a, dans la prémiére équation qu'un intervalle; puisqu'il n'y a entr'elles aucune Case; mais dans la seconde équation, il y a deux intervalles séparés par une ligne de Cases vuides. Ainsi la différence des exposants des ordres est, dans la prémiére équation, 1 nombre impair; dans la seconde, 2 nombre pair. Donc la prémiére Série a des termes demi-imaginaires, & par conséquent la Courbe n'étend que d'un seul côté des Branches infinies le long de l'Axe des abscisses. La seconde Série n'a point de termes demi-imaginaires, mais elle sera entiérement imaginaire ou réelle, selon que les racines de l'équation de la seconde déterminatrice sont imaginaires ou réelles. Comme Fig. 86.

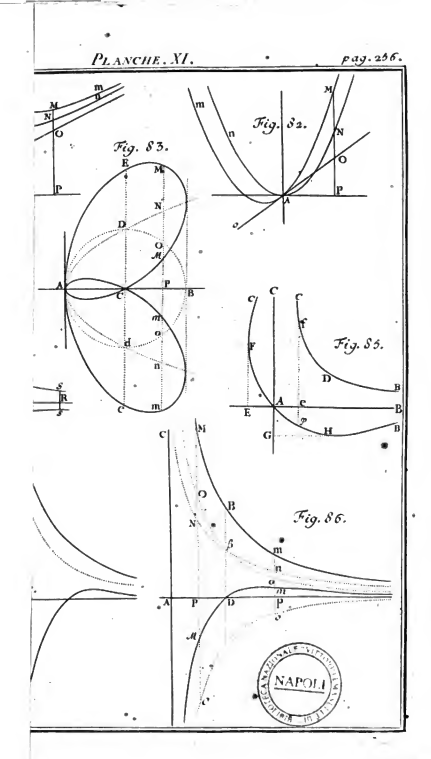
elles

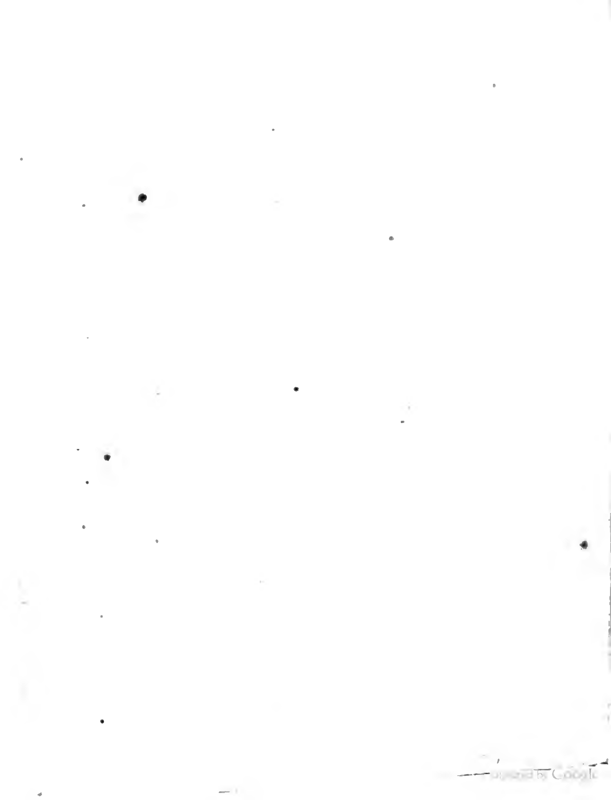
Pl. XI. Fig. 87. elles se trouvent ici réelles, la Courbe a quatre Branches infinies le long de l'Axe des abscisses, deux du côté positif & deux du côté négatif de l'Axe des ordonnées. Ch. VIII. §. 138.

Exemple 4. On propose l'éq : $xxyy - 2abxy - bbdy + aabb - bbcd = 0$, dont voici la Construction. Une Parabole N C n, décrite avec un Paramétre $= d$, sur les Axes CB, CE, étant donnée, avec une Droite DO parallèle à CE, & un Point fixe A : si l'on tire par ce Point A une droite quelconque AN, qui rencontre la Droite donnée en O, & la Parabole en n, N, & qu'on méne par le point O la droite MOm parallèle à l'Axe CB, & par les points N, n, les droites NM, nm parallèles à l'Axe CE, les points M, m, où ces droites se coupent seront à la Courbe proposée. Car si l'on méne par A deux droites AQ, AB parallèles aux Axes CB, CE de la Parabole, lesquelles rencontrent l'une en D la Droite donnée DO, l'autre en B l'Axe CB, & qu'en prenant AQ, AB pour les Axes de la Courbe, on nomme AB, a; AD, b; BC, qui est négative dans la Figure, c; l'abscisse AP, x, & l'ordonnée PM, ou Pm, y : les triangles semblables ADO, AQN ou Aqn, donneront AD [b] : DO [$=$ AP, x] : : AQ ou Aq [$=$ PM ou Pm, y] : QN ou qn [$\frac{xy}{b}$].

Pl. XII. Fig. 88.

Donc RN [$=$ QN $-$ QR $=$ QN $-$ AB] $= \frac{xy}{b} - a$, ou rn [$=$ qr $-$ qn $=$ AB $-$ qn] $= a - \frac{xy}{b}$. Et CR, ou Cr [$=$ CB $+$ BR ou Br $=$ CB $+$ PM ou Pm] $= c + y$. Ainsi puisque, par la propriété de la Parabole, le rectangle du Paramétre d par l'ordonnée CR ou Cr est égal au quarré de l'abscisse RN ou rn [§. 123], on aura $d \times (c + y) = \frac{xxyy}{bb} - \frac{2axy}{b} + aa$, qui se réduit à l'équation propo-


Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 85.
Fig. 86.



CH. VIII. §. 138. proposée $xxyy - 2abxy + aabb = bbcd + bbdy$. PL. XII.

On voit aisément, par cette construction, que la Courbe aura toujours deux Branches infinies le long de l'Axe des ordonnées AD qui est leur Asymptote : mais elle peut en avoir aussi, ou n'en pas avoir, le long de l'Axe des abscisses AB. Ces cas se distinguent en examinant si cet Axe AB coupe, touche, ou ne coupe ni ne touche la Parabole.

1. S'il la coupe, & que le Point A tombe dans la Parabole, ce qui a lieu quand BA $[a] < $ Bb $[\sqrt{cd}]$, la Courbe a quatre Branches infinies dont AB est l'Asymptote, & elles se jettent dans les quatre angles des coordonnées. Fig. 88. num. 1.

2. Si l'Axe AB coupe la Parabole, mais que le Point A tombe hors de cette Courbe, ce qui a lieu quand BA $[a]$ $>$ Bb $[\sqrt{cd}]$, la Courbe a aussi quatre Branches infinies qui accompagnent l'Axe AB; mais de ces quatre Branches, deux s'étendent dans l'angle des coordonnées positives & deux dans l'angle des coordonnées négatives. num. 2.

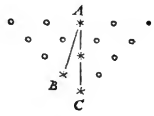
Si le Point A tomboit sur la Parabole, alors AB $[a]$ seroit $=$ Bb $[\sqrt{cd}]$, & le terme constant disparoîtroit de l'équation, qui seroit divisible par y, & réduite à $xxy - 2abx - bbd = 0$, ne représenteroit qu'une Ligne du troisième ordre.

3. Si AB touche la Parabole, ce qui a lieu quand $c = 0$, la partie de la Courbe qui est au-dessous de l'Axe AB disparoit, & la Courbe n'a plus que deux Branches infinies le long de cet Axe, lesquelles se jettent toutes deux dans un même angle, qui est celui des coordonnées positives, à supposer d positive. num. 3.

4. Enfin si AB ne touche ni ne coupe la Parabole, ce qui est le cas de c négative, ou de BC positive, toutes les Branches infinies qui accompagnoient l'Axe AB dis- num. 4.

PL. XII. paroissent, & la Courbe ne conserve que celles qui s'étendent le long de l'Axe des ordonnées AD. CH.VIII. §. 138.

Tout cela se discerne, indépendemment de la construction de la Courbe, par la seule équation mise sur le Triangle analytique.



Elle a deux déterminatrices, l'une AB qui a la même position que AB dans l'*Exemple II*, & qui désigne, ici comme là, [car le Calcul est le même], deux Branches hyperboliques qui accompagnent l'Axe des ordonnées dans les deux angles de suite des ordonnées positives.

Mais AC, qui indique des Branches dont l'Axe des abscisses est Asymptote, donne l'éq: $xxyy - 2abxy + (aa - cd)bb = 0$, dont les racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$, présentent quatre Cas différents; sans compter celui où $a = \sqrt{cd}$, qui réduit l'éq: $xxyy - 2abxy - bbdy = 0$, ou $xxy - 2abx - bbd = 0$, à ne représenter qu'une Courbe du troisiéme ordre.

1°. Si cd est plus grande que aa, les racines $xy = ab + b\sqrt{cd}$, & $xy = ab - b\sqrt{cd}$ désignent deux Hyperboles, l'une positive, l'autre négative; dont la prémiére étend ses Branches dans les angles des coordonnées de même signe, & la seconde dans les angles des coordonnées de différens signes. Ces Hyperboles-asymptotes se
num. 1. répandent donc dans les quatre angles des coordonnées; & la Courbe les accompagne le long de l'Axe des abscisses

CH. VIII. §. 138. ſes dans ces quatre angles, puiſque dans ce Cas l'équation de la déterminatrice AC n'a point de racines multiples. PL. XII.

2°. Si cd étant poſitive eſt plus petite que aa, les deux racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$, déſignent deux Hyperboles poſitives, qui étendent, l'une & l'autre, leurs Branches dans les angles des coordonnées de même ſigne. Donc, puiſque l'équation de la déterminatrice n'a point dans ce Cas de racines multiples, les Branches de la Courbe ſuivent celles des Hyperboles le long de l'Axe des abſciſſes qui eſt leur Aſymptote, & ſe jettent deux dans l'angle des coordonnées poſitives, & deux dans l'angle des coordonnées négatives. num. 1.

3°. Si cd eſt négative, les deux racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$ ſont imaginaires. Ainſi les Branches infinies, que la déterminatrice AC ſembloit indiquer par ſa poſition ſont anéanties par ſon équation. La Courbe n'a donc que les deux Branches hyperboliques indiquées par la déterminatrice AB, & qui ont pour Aſymptote l'Axe AD des ordonnées. num. 4.

4°. Si $c = 0$, les deux racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$ ſont égales, ou plutot l'éq: $xxyy - 2abxy + aabb = 0$ de la déterminatrice AC n'a qu'une racine double $xy = ab$. Il n'y a donc, pour les Branches dont l'Axe des abſciſſes eſt l'Aſymptote-droite qu'une Hyperbole poſitive, dont les Branches HI, KL ſe jettent dans les angles oppoſés des coordonnées de même ſigne. Mais, comme la racine $xy = ab$ eſt multiple; la Série, dont $\frac{ab}{x}$ eſt le prémier terme, n'eſt pas encore réguliére, & il en faut chercher le ſecond terme, au moins. On voit ſans calcul, puiſque la racine $xy - ab = 0$ eſt double, puiſqu'elle ne diviſe pas le terme unique $-bbdy$ du ſecond ordre, & puiſqu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & ſa parallèle qui paſſe par le terme du ſecond ordre; on voit, dis- num. 3.

 je,

PL. XII. je, [§. 113], que le second terme de la Série sera demi-imaginaire, & qu'ainsi il n'y aura qu'une des deux Branches HI, ou KL, de l'Hyperbole qui serve d'Asymptote à la Courbe. Mais pour savoir si c'est HI, ou KL, qui fait cette fonction, il faut connoître le second terme de la Série. On substituera donc $abx^{-1} + u$ à y dans l'équation proposée $xxyy - 2abxy - bbdy + aabb = 0$, & on la transformera en $xxuu - ab^3dx^{-1} - bbdu = 0$. Celle-ci mise sur le Tr: an: n'a qu'une déterminatrice supérieure, qui donne $xxuu - ab^3dx^{-1} = 0$, ou $u = \pm a^{1:2} b^{3:2} d^{1:2} x^{-3:2} = \pm b\sqrt{\frac{abd}{x^3}}$. Ce terme demi-imaginaire, mais double à cause du signe $\pm$, fait voir que la Courbe ne s'étend que du côté qu'indique le signe de la grandeur abd. Si ce produit est positif, il n'y a que la Branche HI de l'Hyperbole qui soit Asymptote, mais elle est suivie de deux Branches mi, MI de la Courbe, dont l'une mi, désignée par la Série $y = \frac{ab}{x} - b\sqrt{\frac{abd}{x^3}}$ &c. se glisse entre l'Hyperbole HI & l'Axe des abscisses; & dont l'autre MI, indiquée par la Série $y = \frac{ab}{x} + b\sqrt{\frac{abd}{x^3}}$ &c. tombe, par raport à l'Axe des abscisses, au-delà de l'Hyperbole HI. Ces deux Branches mi, MI sont sûrement réelles puisque l'éq: $xxuu - ab^3dx^{-1} = 0$ de la seconde déterminatrice n'a point de racines multiples, & que par conséquent la Série devient régulière dès le second terme. Ainsi la Courbe a quatre Branches hyperboliques; deux, qui ont pour Asymptote l'Axe des ordonnées, l'accompagnent dans les angles des ordonnées positives; & deux, qui ont pour Asymptote l'Axe des abscisses, se jettent, le long de cet Axe, dans le seul angle des coordonnées positives. CH. VIII. §. 138.

39. CAS II.

CH.VIII. §. 139. 139. *CAS II.* Lorsqu'une déterminatrice est parallèle à une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, elle est supérieure quand le Triangle est couché sur cette Bande. Si c'est la Bande sans y, la déterminatrice donne l'équation de la Courbe pour y infinie [§. 96. 4°]. Mais tous les termes de cette équation étant sur une Bande parallèle à la Bande sans y, ils contiennent tous une même puissance d'y. On peut diviser l'équation de la déterminatrice par cette puissance, & on aura une équation en x & en constantes, qui a pour racines une ou plusieurs valeurs finies d'x. Ainsi des abscisses finies ont des ordonnées infinies ; & les Branches désignées par cette déterminatrice s'éloignent infiniment de l'Axe des abscisses en restant à une distance finie de celui des ordonnées. Les ordonnées infinies de ces abscisses finies sont des Asymptotes de la Courbe, qui jette le long de ces Asymptotes des Branches hyperboliques. PL. XII.

Par le même raisonnement, une déterminatrice parallèle à la Bande sans x désigne des Abscisses-asymptotes, dont les ordonnées sont les racines de l'équation que fournit cette déterminatrice.

Ces racines peuvent être imaginaires, réelles, ou nulles. Une racine imaginaire exprime une Asymptote imaginaire, qui n'existe point, non plus que les Branches infinies que la déterminatrice sembloit indiquer. Une racine réelle donne la position d'une Asymptote-droite réelle, qui peut pourtant n'avoir que des Branches imaginaires à cause des termes suivants de la Série. Une racine nulle marque une Asymptote-droite, qui, passant par l'Origine, est un des deux Axes. Elle a donc été déja indiquée par une déterminatrice, qui sans être parallèle aux Bandes extérieures du Triangle n'en coupe qu'une ou passe par la Pointe [§. *préc.*].

 Exem-

Pl. XII. *Exemple* 1. On propose l'éq : $xyy - ayy - 3axy + 2a^2x = 0$. Quand on l'a placée sur le Triang : anal : Ch. VIII. §. 139.

			A		
	o	*	o	o	
	B *		*	o	
			o	* *C*	
				o	

on voit qu'elle n'a que deux déterminatrices supérieures, toutes deux parallèles aux Bandes du Triangle.

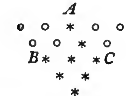
L'une *AB*, parallèle à la Bande sans y, indique une Asymptote-ordonnée. Son équation $xyy - ayy = 0$, divisée par yy, se réduit à $x - a = 0$: ce qui montre que cette Asymptote est l'ordonnée de l'abscisse $x = a$. On prendra donc une abscisse $AB = a$, & par son extrémité
Fig. 89. B on ménera l'ordonnée indéfinie BC, qui est l'Asymptote indiquée par la déterminatrice *AB*.

L'autre *AC*, qui est parallèle à la Bande sans x, désigne des Asymptotes-abscisses. Leur position se détermine par l'éq: $xyy - 3axy + 2a^2x = 0$, que fournit cette déterminatrice. Cette équation a chacun de ses termes divisible par x, & cette division la réduit à $yy - 3ay + 2a^2 = 0$, qui a deux racines réelles, $y - a = 0$, & $y - 2a = 0$. Elles marquent chacune une Asymptote, qui sont les abscisses DE, FG, des ordonnées $AD = a$ & $AF = 2a$.

Exemple 2. On propose l'éq : $xxyy - 2bx^2y - bbyy - 2aaxy + bbxx + 2b^3y + 2a^2bx + 2a^4 - b^4 = 0$. Mise sur le Tr : anal : elle a deux déterminatrices.

L'une *AB*, parallèle à la Bande sans y, indique par sa position des Ordonnées-asymptotes, & par son équation $xxyy - bbyy = 0$, ou, divisant par yy, $xx - bb = 0$, qui

CH. VIII. qui a deux racines réelles, $x = b$, $x = -b$, on voit que Pl. XII.
§. 139. ces Asymptotes sont les ordonnées des abscisses $AB = b$,
$AC = -b$. Fig. 90.



L'autre déterminatrice AC, étant parallèle à la Bande sans x, marque des Abscisses-asymptotes. Son équation $xxyy - 2bxxy + bbxx = 0$, divisée par xx, se réduit à $yy - 2by + bb = 0$, qui n'a qu'une seule racine, mais double, $y - b = 0$. Elle fait connoître que l'abscisse DE de l'ordonnée $AD = b$, est une Asymptote.

Exemple 3. Si dans cette même équation on change seulement en $+$ le signe $-$ du terme $bbyy$, l'équation que donne la déterminatrice AB, étant $xxyy + bbyy = 0$, ou $xx + bb = 0$, elle n'a que des racines imaginaires. Ainsi la Courbe perd les Ordonnées-asymptotes BF, CG, & ne conserve que l'Abscisse-asymptote DE, dont l'ordonnée est $AD = b$. Fig. 91.

140. Ainsi la seule inspection du Triangle analytique, & des déterminatrices parallèles à l'une ou à l'autre des Bandes extérieures, suffit pour établir le nombre & la position des Asymptotes abscisses ou ordonnées. C'est que les ordonnées ou les abscisses de ces Asymptotes sont données par le prémier terme de la Série descendante qui exprime y en x, ou x en y. Mais pour avoir la position ou l'espèce des Branches hyperboliques de la Courbe autour de ces Asymptotes, pour s'assurer même de leur existen-

PL. XII. existence, il faut chercher le second terme de la Série, & , en quelques occasions, des termes ultérieurs. Si le prémier terme de la Série est m ou n [m représentera l'abscisse d'une Asymptote-ordonnée, & n l'ordonnée d'une Asymptote-abscisse], on cherchera le second terme de la Série en substituant $m+z$ à x, ou $n+u$ à y [§. 102] & mettant la transformée sur le Triang: anal: Or cette transformée est précisément la même qu'on auroit en transportant l'Origine sur l'Asymptote [§. 25. IV°.], transposition qui réduit ce Cas-ci au Cas précédent [§. 138], où l'Asymptote étoit supposée passer par l'Origine. Ainsi cette opération se peut envisager, ou comme le transport de l'Origine sur l'Asymptote, ou comme la recherche du second terme de la Série. Appliquons-la aux Exemples précédents. CH. VIII. §. 140.

Exemple I. On a vû dans l'*Ex.* 1 du §. *préc.* que

Fig. 89. la Courbe représentée par l'éq: $xyy - ayy - 3axy + 2a^2x = 0$ avoit trois Asymptotes, sç. BC ordonnée de l'abscisse $AB = a$, & DE, FG abscisses des ordonnées $AD = a$ & $AF = 2a$. Transportons successivement l'Origine sur chacune de ces Asymptotes.

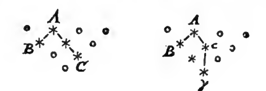
1. Pour la porter d'A en B sur l'Asymptote ordonnée BC, on substituera $a+z$ à x dans l'équation de la Courbe: ce qui la transformera en $zyy - 3aay - 3azy + 2a^3 + 2aaz = 0$. Cette transformée mise sur le Triangle analytique a deux déterminatrices Ab, AC.

```
      A                      A
 o   *   o   o          o   *   o   o
B  *   *   o              o | *   o
     o   *                  *   *
       o  C               b   *   C
```

En les comparant avec les déterminatrices AB, AC de

CH. VIII. §. 140. de l'équation proposée, on voit que dans l'une & dans l'autre, *AC* a la même position, parce que les Abscisses-asymptotes DE, FG qu'elle désigne, ont la même situation par raport à l'Origine, soit qu'on la laisse en A, soit qu'on la porte en B. Mais la déterminatrice *AB* de la proposée a tourné sur le centre *A*, & a passé en *Ab* dans la transformée, où elle n'est plus parallèle à la Bande sans *y*, parce que l'Asymptote BC, qu'elle désigne, est devenuë l'Axe des ordonnées, auquel elle étoit d'abord parallèle. Cette déterminatrice *Ab* donne pour l'équation de l'Hyperbole-asymptote, qui est aussi l'Asymptote-courbe, $zyy - 3aay = 0$, ou $zy = 3aa$, à l'Hyperbole ordinaire positive. Donc, les Branches infinies HC, hc de la Courbe, desquelles CBc est l'Asymptote, s'étendent à l'infini dans les angles bBC, ABc des coordonnées de même signe. PL. XII.

2. On portera l'origine de A en D sur l'Asymptote DE en substituant dans l'équation proposée $a + u$ à y. Par-là, on la transforme en $xuu - a^3 - 2aau - auu - axu = 0$, qui placée sur le Triangle analytique a trois



déterminatrices; *AB* qui est la même que *AB* de la proposée, & *Ac*, *cγ*, qui ont succédé à *AC*. *AB* est restée en place, parce que le transport de l'Origine de A en D n'a pas changé sa situation par raport à l'Asymptote BC qu'indique la déterminatrice *AB*. Mais *AC* est devenuë double *Ac*, *cγ*, parce que de deux Asymptotes-abscisses

Pl. XII. qu'elle indiquoit, l'une DE passe maintenant par l'Origine D, & est l'Axe des abscisses, l'autre FG lui est parallèle. Celle-ci est désignée par la déterminatrice *Ac* parallèle à la Bande sans x : celle-là par la déterminatrice $c\gamma$, qui passe par la Pointe, & fournit l'éq : $-axu - a^3 = 0$, ou $xu = -aa$ à l'Hyperbole ordinaire négative. Ainsi elle marque des Branches infinies IE, ie, qui s'étendent dans les angles ADE, FDe des coordonnées de signes contraires. Ch. VIII. §. 140.

3. Enfin l'Origine est transportée de A en F sur l'Abscisse-asymptote FG, en substituant $2a + u$ à y dans la proposée, ce qui donne la transformée $xuu - 4a^3 - 4a^2u - auu + axu = 0$ qu'on mettra sur le Triangle analytique.



Elle y conserve la déterminatrice *AB* qu'avoit la proposée & qui désigne l'Ordonnée-asymptote BC, mais la déterminatrice *AC* s'est brisée en deux $A\gamma$, γc, dont la prémiére, parallèle à la Bande sans x, marque l'Abscisse-asymptote DE, & dont la seconde, passant par la Pointe, montre que l'Axe des abscisses FG est aussi une Asymptote. L'équation $-4a^3 + axu = 0$, ou $xu = 4aa$ qu'elle donne, est à l'Hyperbole ordinaire positive. Ainsi elle indique des Branches KG, kg, qui s'étendent enfin dans les angles GFf, DFg des coordonnées de même signe.

En effet, la Courbe représentée par l'éq : $xyy - ayy - 3axy - 2a^2x = 0$, a six Branches infinies, disposées autour de trois Asymptotes Cc, Ee, Gg, de la maniére qu'on

CH. VIII. §. 140. qu'on le voit *Fig.* 89, ce dont on peut aisément s'assurer en considérant l'équation sous cette forme $x = \frac{ayy}{yy - 3ay - 2aa}$. PL. XII.

Exemple 2. Dans l'*Ex. II* du §. *préc.* on a vû que la Courbe dont la nature s'exprimoit par l'éq : $xxyy - 2bx^2y - bbyy - 2aaxy + bbxx + 2b^3y + 2aabx + 2a^4 - b^4 = 0$, avoit trois Asymptotes, Ff, ordonnée de l'abscisse AB $= b$; Gg, ordonnée de l'abscisse AC $= -b$; & DE, abscisse de l'ordonnée AD $= b$.

1. On transportera successivement l'Origine de A en B & en C, en substituant dans la proposée d'abord $z + b$, ensuite $z - b$, au lieu de x, ce qui s'exécute ainsi par le §. 28. Fig. 90.

L'équation ordonnée par y

$$\begin{array}{l}
(xx - bb)yy + (-2bx^2 - 2aax + 2b^3)y + bbxx + 2aabx + 2a^4 - b^4 \\
\quad 2 \quad\; 0 \qquad\quad 2 \qquad\; 1 \qquad 0 \qquad\quad 2 \qquad\; 1 \qquad 0 \qquad 0 \\
\hline
2xzyy + (-4bx - 2aa)zy + (2bbx + 2aab)z \\
\quad \tfrac{1}{2} \qquad\qquad \tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad\qquad \tfrac{1}{2} \qquad 0 \\
\hline
zzyy - 2bzzy + bbzz
\end{array}$$

$$x = b$$

$$\begin{array}{l}
* \quad - \quad 2aaby + 2aa(aa + bb) \\
+ 2bzyy - (2aa + 4bb)zy + 2b(aa + bb)z \\
+ zzyy - 2bzzy + bbzz
\end{array}$$

$$x = -b$$

$$\begin{array}{l}
* \quad + \quad 2aaby + 2aa(aa - bb) \\
- 2bzyy - (2aa - 4bb)zy + 2b(aa - bb)z \\
+ zzyy - 2bzzy + bbzz
\end{array}$$

Si on place ces deux transformées sur le Triangle analytique

 lytique, elles y occupent l'une & l'autre les mêmes Cases,
& ont trois déterminatrices supérieures.

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ o & o & * & o & o \\ & o\,b* & * & o & \\ & o & * & *C & \\ & \beta * & * & & \\ & & * & & \end{array}$$

AC, parallèle à la Bande sans x, est la même que la déterminatrice AC de la proposée, & désigne, comme elle, l'Abscisse-asymptote DE.

Mais AB de la proposée s'est doublée, & est, dans la transformée Ab & $b\beta$. La prémiére Ab, parallèle à la Bande sans y, désigne l'Ordonnée-asymptote Gg, si l'Origine est transportée en B, ce qui est le cas de la prémiére transformée: elle indique l'Ordonnée-asymptote Ff, l'Origine étant transportée en C, ce qui est le cas de la seconde transformée. La seconde déterminatrice $b\beta$, qui sans être parallèle à la Bande sans y coupe la Bande sans x, exprime une Asymptote qui passe par l'Origine, c'est Ff, l'Origine étant en B; & Gg, l'Origine étant en C. Cette déterminatrice donne, pour la prémiére transformée, l'éq: $-2aaby + 2bzyy = 0$, & pour la seconde $+2aaby - 2bzyy = 0$, qui toutes deux se réduisent à $zy = aa$, équation d'une Hyperbole ordinaire positive. Cela montre que les Branches de l'Hyperbole-asymptote, & [puisque dès le prémier terme la Série est réguliére] celles de la Courbe HF, hf; IG, ig, s'étendent enfin dans les angles des coordonnées de même signe.

2. Il faut présentement transporter l'Origine au point D, où l'Axe des ordonnées coupe l'abscisse-asymptote DE. On substituera donc $u + b$ à y.

L'équa-

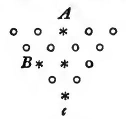
Ch. VIII. §. 140. L'équation ordonnée par x Pl. XII.

$$\begin{array}{llllllllll}
(yy-2by+bb)\,xx & +(-2aay & +2aab)\,x & -bbyy & +2b^3y & +2a^4-b^4 \\
2\quad 1\quad 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\quad 0 \\
\hline
+(2y-2b)\,uxx & -2aaux & & +(-2bby & +2b^3)\,u & \\
\tfrac{1}{2}\quad 0 & 0 & & \tfrac{1}{2} & 0 & \\
\hline
+uuxx & * & & -bbuu & &
\end{array}$$

$$\overbrace{\quad y=b \quad}$$

$$\begin{array}{ccc}
* & * & +2a^4. \\
* & -2a^2ux & * \\
+u^2x^2 & * & -bbuu
\end{array}$$

La transformée $uuxx - bbuu - 2aaux + 2a^4 = 0$, étant mise sur le Tr : anal : conserve la déterminatrice AB



qu'avoit la proposée, & qui désigne les Ordonnées-asymptotes Ff, Gg, qui ont la même position par raport à l'Origine D, que par raport à l'Origine A. Mais la déterminatrice AC de la proposée a changé de situation, & a pris dans la transformée la situation Ac, où passant par la Pointe, elle marque que l'Axe des abscisses DE est Asymptote. Mais son équation $uuxx - 2aaux + 2a^4 = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $ux = aa \pm aa\sqrt{-1}$, fait connoitre que cette prétenduë Asymptote DE n'est accompagnée d'aucune Branche infinie de la Courbe.

 On

PL. XII. On peut s'assûrer de la vérité de ces conclusions, par la construction de cette Courbe. En prenant pour son équation la transformée $uuxx - bbuu - 2aaux + 2a^4 = 0$, ce qui porte son Origine au point D, & lui donne pour Axes DA, DE; on aura $uuxx - 2aaux + a^4 = bbuu - a^4$, & tirant la racine quarrée $ux - aa = \pm\sqrt{(bbuu - a^4)}$, ou $x = \frac{aa}{u} \pm \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}$. On décrira donc sur les Axes perpendiculaires l'un à l'autre DA, DE, l'Hyperbole VRV, vrv, désignée par l'éq: $xu = aa$, ou $x = \frac{aa}{u}$, & on décrira du centre D, avec le raïon DA $= b$, le Cercle EaeA. Puis prenant une ordonnée quelconque $DQ = u$, on tirera l'abscisse MQM, qui rencontre l'Hyperbole en R, de sorte qu'on a $QR = \frac{aa}{u}$. Qu'on méne par le point R la droite Tt, parallèle à l'Axe DA, qui rencontre en T & t la circonférence EaeA, on aura donc $DS = QR = \frac{aa}{u}$, & $TS = St = \sqrt{(Dt^2 - DS^2)} = \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}$. Ainsi les abscisses QM $[\frac{aa}{u} + \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}]$, & QM $[\frac{aa}{u} - \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}]$ sont égales, l'une à DS + St, l'autre a DS — ST, c'est-à-dire, [en menant la Droite DO, qui coupe en deux également l'angle aDE, & donne toûjours SO = DS] QM sera égale à Ot = DS + St, & QM à — OT = DS — ST. On voit par cette construction, que les ordonnées FEf, Geg des abscisses $DE = b$, $De = -b$ sont Asymptotes, mais que DE, indiquée comme Asymptote par l'équation primitive, n'a point de Branches infinies CH. VIII. § 140.

qui

CH. VIII §. 140. qui l'accompagnent : parce que la Série $y = b + \frac{aa}{x}(1 \pm \sqrt{-1})$ &c. qui désigne ces Branches, est imaginaire. PL. XII.

Exemple 3. Le 3[e]. Ex. du §. *préc.* étoit celui d'une Courbe désignée par l'éq : $xxyy - 2bx^2y + bbyy - 2aaxy + bbxx + 2b^3y + 2aabx + 2a^4 - b^4 = 0$, qui n'avoit qu'une seule Asymptote, sçavoir l'abscisse DE de l'ordonnée $AD = b$. Pour connoître la nature des Branches infinies qui doivent accompagner cette Asymptote, il faut à y substituer $b + u$ dans la proposée. Fig. 91.

L'équation ordonnée par x.

$$\begin{array}{l}
(yy - by + bb)xx + (-2a^2y + 2a^2b)x + bbyy + 2b^3y + 2a^4 - b^4 \\
\quad 2 \quad\; 1 \quad\; 0 \qquad\qquad\qquad\; 1 \qquad\quad 0 \qquad\quad\;\; 2 \qquad\;\; 1 \qquad 0 \quad\;\; 0 \\
\hline
+ (2y - 2b)uxx + (-2a^2)ux \quad + (2bby + 2b^3)u \\
\quad\; \tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\quad\;\; \tfrac{1}{2} \qquad\quad 0 \\
\hline
+ uuxx \qquad\qquad\qquad\quad * \qquad\qquad\quad + bbuu
\end{array}$$

$$\overbrace{\qquad\qquad y = b \qquad\qquad}$$

$$\begin{array}{ccc}
* & * & + 2b^4 + 2a^4 \\
* & - 2a^2ux & + 4b^3u \\
+ uuxx & * & + bbuu
\end{array}$$

Cette transformée $uuxx + bbuu - 2a^2ux + 4b^3u + 2b^4 + 2a^4 = 0$, mise sur le Triangle analytique a deux déterminatrices, mais qui ne donnent, l'une & l'autre, que des racines imaginaires. *AB*, qui est la même que *AB*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
o & o & * & o & o \\
 & o & o & o & o \\
 & B * & * & o & \\
 & & * & o & \\
 & & * & & \\
 & & c & &
\end{array}$$

de

 de la proposée donne, comme elle, $xxuu + bbuu = 0$,
ou $xx + bb = 0$, dont les racines sont $x = \pm\sqrt{-bb}$.
Et Ac, qui a succedé à AC, donne $uuxx - 2a^2ux + 2b^4 + 2a^4 = 0$, dont les racines $ux = aa \pm \sqrt{(-2b^4 - a^4)}$ sont aussi imaginaires.

Ainsi cette Courbe n'a point d'Asymptotes, à parler exactement. En effet, si on résout son équation en regardant x comme l'inconnuë, on trouvera $x = \frac{aa \pm b\sqrt{(-uu - 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}}{-u}$. Ces deux valeurs d'$x$ sont imaginaires, lors qu'on prend u positive : car alors, tout ce qui est sous le signe radical est négatif, [nous supposons b positive]. Mais si on prend u négative, le terme $-4bu$ se change en $+4bu$; les valeurs d'x peuvent être réelles, & l'éq : $x = \frac{aa \pm b\sqrt{(-uu + 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}}{-u}$ se construira de cette maniére. Ayant décrit sur les Axes perpendiculaires DA, DE, & dans l'angle des coordonnées négatives, la demi-Hyperbole Oo, dont l'équation, en nommant AQ, $-u$, & QO, $-z$, est $uz = aa$; prenez $DA = -b = AC$: élevez au point A la perpendiculaire AB, & décrivez du centre C, avec un raïon $CF = \sqrt{(2bb - \frac{a^4}{bb})}$ le demi-cercle FHhf. Puis menant du point D une Droite quelconque DH, qui coupe en b la Droite AB, & en h, H la demi-circonférence, abaissez des points h, H les perpendiculaires hq, HQ, prolongées indéfiniment. Des points o, O, où elles rencontrent l'Hyperbole, vous prendrez sur ces perpendiculaires les parties om, o*m*, OM, O*M* égales à A*b*, & les points m, *m*, M, *M* seront à la Courbe proposée. Car, si on nomme DQ, u,

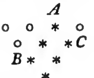
CH. VIII. §. 140. DQ, u, on aura $QO = -\frac{aa}{u}$, & $QH = \sqrt{fQ.QF} = \sqrt{(DQ - DC + Cf) \times (DC + CF - DQ)} = \sqrt{(u - 2b + \sqrt{(2bb - \frac{a^4}{bb})} \times (2b + \sqrt{(2bb - \frac{a^4}{bb})} - u)} = \sqrt{(-uu + 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}$. Donc les triangles semblables DQH, DAb, donnant DQ[u] : QH [$\sqrt{(-uu + 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}$] = DA [$b$] : A$b$, ou OM, OM [$\frac{b\sqrt{(-uu+4bu-2bb-\frac{a^4}{bb})}}{u}$]; on aura x [= QM ou QM = QO ± OM = $-\frac{aa}{u} \pm \frac{b\sqrt{(-uu + 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}}{u}$; ce qui multipliant par u, transposant, quarrant, & transposant derechef, donne l'éq : $xxuu + 2aaxu + a^4 + bbuu - 4b^3u + 2b^4 + a^4 = 0$, dans laquelle changeant $+u$ en $-u$, parce que AQ [u], que nous avons traitée comme positive, est réellement négative, on retrouve précisément l'équation proposée à construire. Pl. XII.

141. Il n'est pas inutile de remarquer que le Calcul nécessaire pour porter l'Origine sur l'Asymptote droite, ou pour avoir le second terme de la Série descendante, s'abrégera si l'on remarque les Cases par lesquelles doit passer la déterminatrice : car il suffit de calculer les termes qui remplissent ces Cases-là, & on peut s'éviter la peine de chercher les autres. Or ces termes se trouvent aisément quand on employe la maniére indiquée au §. 28, & dont

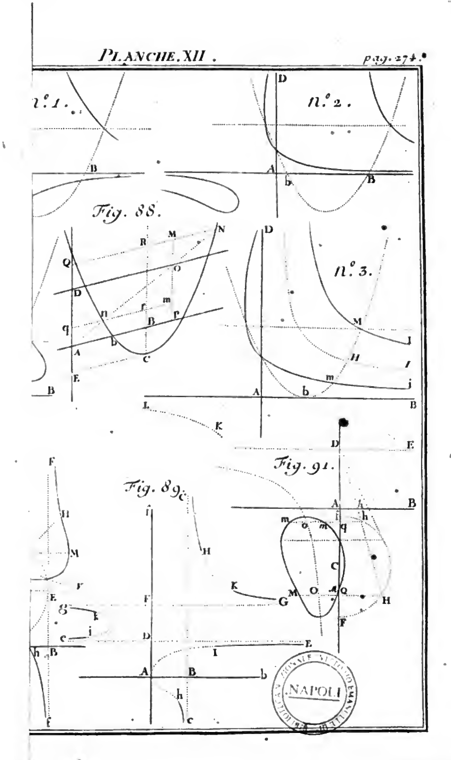
 nous

PL.XIII. nous avons fait usage dans les *Ex.* 2 & 3, du §. *préc.* CH.VIII.
Quand on substitue, par ex. $n+u$ pour y, l'équation étant §. 141.
ordonnée par x; la prémiére ligne donne les termes qui remplissent les Cases x^v, x^{v-1} &c. jusqu'à x^0, c'est-à-dire la Bande des puissances d'x. La seconde ligne donne les termes ux^v, ux^{v-1}, &c, ou la Bande u. De même la troisiéme ligne donne la Bande uu, & ainsi de suite. Puis donc qu'on cherche une déterminatrice supérieure, il suffira de calculer les termes qui sont les plus hauts dans chaque Bande, ou même seulement dans quelques-unes. Cela se pratique aisément en faisant la substitution. A mesure qu'on calcule chaque terme dans chaque ligne, on écrit un zéro, ou une étoile pour chaque terme qui se trouve nul, & on cesse de calculer dans une ligne, aussitôt qu'on parvient à un terme de cette ligne qui a quelque valeur. Mais cet abrégé se comprendra bien mieux en l'appliquant à quelque Exemple.

Exemple I. Soit proposée l'éq: $x^2y+axy-2axx-2aay-2aax+a^3=0$, qui mise sur le Tr: anal: a deux déterminatrices parallèles aux Bandes extérieures du Triangle.



L'une AC parallèle à la Bande sans x donne l'équation $x^2y-2ax^2=0$ ou $y=2a$, qui marque que l'abscisse de l'ordonnée $2a$ est Asymptote. Pour avoir l'équation de l'Hyperbole-Asymptote, il faut substituer $u+2a$ à y. On ordonnera donc l'équation par x, & substituant $2a$ à y dans


n.° 1.
n.° 2.
Fig. 88.
n.° 3.
Fig. 91.
Fig. 89.
NAPOLI

CH. VIII. §. 141. dans les termes successifs, on verra évanouïr les deux prémiers; ce qu'on marquera à côté par des zéro. Mais le troisiéme $-2aay+a^3$ se change en $-3a^3$, qu'on mettra aussi à côté. Puis on viendra au calcul de la seconde ligne, & comme le premier terme $(y-2a)xx$ y produit uxx qui n'est pas zéro; on le mettra à côté, & le Calcul est achevé. PL. XIII.

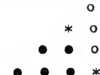
L'équation ordonnée par x $\qquad y=2a$

$$(y-2a)xx+(ay-2aa)x-2aay+a^3 \qquad 0 \quad 0 \quad -3a^3$$

$$\underline{\;1 \quad 0\;}$$

$$(1)\,uxx \qquad +uxx$$

Car la déterminatrice supérieure de la transformée donnera l'éq: $uxx-3a^3=0$, passant nécessairement par la Case uxx & par la Pointe, puisque celle-là est la plus haute Case de la seconde colomne, & celle-ci de la prémiére, en couchant le Triangle sur la Bande sans x. Le calcul a montré que les Cases x & xx sont vuides.



L'autre déterminatrice AB de la proposée est parallèle à la Bande sans y, & donne l'éq: $x^2y+axy-2aay=0$, ou $x^2+ax-2aa=0$, qui a deux racines $x=a$, ou $x=-2a$. Elles désignent les abscisses a & $-2a$ de deux Ordonnées-asymptotes. Pour avoir l'équation des Hyperboles-asymptotes, il faut substituer $z+a$, & $z-2a$ à x dans l'équation proposée. On l'ordonnera donc par y, & elle n'a que deux termes. Le prémier s'évanouit, soit qu'on substituë a, ou $-2a$, à x, puisque a & $-2a$

 sont

PL. XIII. sont les racines de l'équation faite en égalant ce terme à zéro. Mais l'une & l'autre substitution réduit le second terme à $-3a^3$. Il est inutile de chercher ce que produiroit ce second terme dans la seconde ligne, puisqu'il a une valeur dans la prémiére. Mais on calculera ce que donne le prémier terme, & on trouvera $(2x+a)zy$, que $x=a$ réduit à $+3azy$, & que $x=-2a$ réduit à $-3azy$. On s'arrêtera donc là, puisque la déterminatrice doit passer par la Pointe, & par la Case zy, & on a pour la prémiére transformée $+3azy-3a^3=0$, ou $zy=aa$; & pour la seconde $-3azy-3a^3=0$, ou $zy=-aa$. CH. VIII. §. 141.

L'équation ordonnée par y.

$$(xx+ax-2a^2)y-2ax^2-2a^2x+a^3=0$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\overline{+(2x+a)zy}$$

$$\overbrace{\quad 0 \qquad -3a^3}^{x=a} \qquad\qquad \overbrace{\quad 0 \qquad -3a^3}^{x=-2a}$$

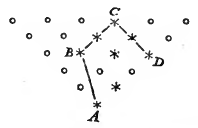
$$+3azy \qquad\qquad\qquad -3azy$$

Fig. 92. Ainsi la Courbe a trois Asymptotes; 1°. l'abscisse CBc de l'ordonnée $AB=2a$, qui est accompagnée de deux Branches infinies DC, dc dans les angles des ordonnées positives; elles sont indiquées par l'éq: $uxx=3a^3$ de leur Hyperbole-asymptote: 2°. l'ordonnée FEf de l'abscisse $AE=a$, suivie des Branches infinies GF, gf, qui se jettent dans les angles des coordonnées de meme signe, comme le montre l'éq: $zy=aa$ de l'Hyperbole-asymptote; & 3° enfin l'ordonnée IHi de l'abscisse $AH=-2a$, dont les Branches infinies LI, li s'étendent dans les angles des coordonnées de signes contraires, parce que l'éq: $zy=-aa$ de leur Asymptote-courbe est à une Hyperbole

CH. VIII. §. 141. bole ordinaire négative. Et cela convient entiérement avec ce qu'on peut déduire directement de l'équation proposée, présentée sous cette forme $y = \frac{2axx + 2aax - a^3}{xx + ax - 2aa}$ $= 2a \frac{xx + ax - \frac{1}{2}aa}{(x-a)(x+2a)}$. PL. XIII.

Exemple 2. On propose cette éq: $x^3y^2 - (a + b)x^2y^2 - 2cx^3y + abxy^2 + 2bcx^2y + c^2x^3 - a^2d^2x + a^2ff = 0$.

Placée sur le Triang: analyt: elle a trois déterminatrices supérieures, dont l'une *AB* partant de la Pointe, &



laissant toutes les étoiles du côté de la Bande sans y fait voir que l'Axe des ordonnées est une Asymptote accompagnée de deux branches hyperboliques qui se jettent dans les angles des abscisses négatives; leur Asymptote courbe étant l'Hyperbole qu'exprime l'éq: $+ abxy^2 + a^2ff = 0$, ou $xy^2 = -\frac{aaff}{b}$.

Mais il s'agit principalement ici des deux autres déterminatrices, qui sont parallèles aux Bandes. La prémiére *BC* parallèle à la Bande sans y, donne l'éq: $yy(x^3 - (a + b)xx + abx) = 0$, qui, [sans compter la racine $x = 0$ qui marque pour Asymptote l'Axe des ordonnées,

 déja

Pl. XII. déja indiqué par la déterminatrice AB] a ces deux racines $x=a$, $x=b$. La seconde CD, parallèle à la Bande sans x, donne l'éq: $x^3(yy-2cy+cc)=0$, qui n'a qu'une seule racine, mais double, $y=c$. Il y a donc deux Ordonnées-asymptotes, dont les abscisses sont a & b, & une Abscisse-asymptote, dont l'ordonnée est c. Pour avoir les Asymptotes-courbes, on doit substituer d'abord $z+a$, puis $z+b$, à x, & enfin $u+c$ à y. Ch. VIII. §. 141.

Les deux prémiéres substitutions demandent qu'on ordonne l'équation par y. Sous cette forme elle a trois termes, dont le prémier s'évanouït par la substitution de a & par celle de b à x, puisque a & b sont les racines de l'équation qui égale ce terme à zéro. Le second terme, par la substitution de a, est réduit à $-2aac(a-b)y$, & par la substitution de b il devient zéro. Il n'est donc pas nécessaire de savoir ce que la substitution de a fait du troisiéme, mais la substitution de b le change en $b^2c^2-a^2bd^2+a^3ff$. On marquera à côté ces grandeurs nulles ou réelles, & on passera à la seconde ligne. Par l'opération qui tire cette seconde ligne de la prémiére, son prémier terme est $(3xx-2(a+b)x+ab)zyy$, que la substitution de a réduit à $a(a-b)zy^2$, & celle de b à $b(a-b)zy^2$. Il n'est donc pas nécessaire de pousser plus loin le Calcul, car dans la prémiére transformée, la déterminatrice porte sur les Cases zy^2 & y, & dans la seconde sur la Case zy^2 & sur la Pointe.

L'équation ordonnée par y

$$(x^3-(a+b)x^2+abx)yy+(-2cx^3+2bcxx)y+c^2x^3-a^2d^2x+a^3f^2$$

$$\underline{\quad 3 \qquad\quad 2 \qquad\quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$+(3x^2-2(a+b)x+ab)zyy \qquad \&c$$

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{x=a} \qquad\qquad \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{x=b}$$

$$0 \quad -2a^2c(a-b)y \qquad\qquad 0.\ 0,\ +b^2c^2-a^2bd^2+a^3f^2$$

$$+a(a-b)zyy, \qquad\qquad +b(a-b)zy^2$$

Il

CH.VIII. §. 141. Il résulte que l'Asymptote-courbe de l'Asymptote-ordonnée de l'abscisse a, a pour son éq : $a(a-b)zyy - 2a^2c(a-b)y = o$, ou $zy = 2ac$, laquelle marque que les Branches infinies s'étendent enfin dans les angles des coordonnées de mêmes signes. Et que l'Asymptote-courbe de l'Asymptote ordonnée de l'abscisse b, est l'Hyperbole représentée par l'équat : $b(a-b)zy^2 + b^3c^2 - a^2bd^2 + a^2ff = o$, ou $zyy = \frac{a^2bd^2 - b^3c^2 - a^2ff}{b(a-b)}$. Ainsi, selon que cette fraction est positive ou négative, les Branches, qui accompagnent cette Asymptote, se jettent ou dans les angles des abscisses positives, ou dans ceux des négatives. PL.XIII.

Pour faire maintenant la substitution de $u+c$ à y, on ordonnera l'équation par x, & alors elle a quatre termes. Le prémier s'évanouït, quand au lieu de y on écrit c, & le second devient $-(a-b)c^2x^2$. C'est tout ce qu'il faut savoir de la prémiére ligne. Le prémier terme de la seconde, qui est $(2y-2c)ux^3$ disparoît aussi par la substitution de c à y. Il faut donc venir au prémier terme de la troisiéme. C'est uux^3, qui ne renferme point d'y. Il n'y a donc point de substitution à faire dans ce terme, qui, avec le second de la prémiére ligne, donne l'éq : $u^2x^3 - (a-b)c^2x^2 = o$, ou $u^2x = (a-b)cc$, qui marque que les Branches de l'Hyperbole-asymptote &, [puisque cette équation n'a point de racines multiples,] les Branches infinies de la Courbe se jettent dans les angles des abscisses positives, si $a > b$, ou dans ceux des abscisses négatives, si $a < b$.

L'équa-

Pl. XIII. L'équation ordonnée par x Ch. VIII. §. 141.

$$(yy-2cy+cc)x^3+(-(a+b)yy+2bcy)x^2+(abyy-aadd)x+a^3ff$$

$$\begin{array}{lll} 2 & 1 & 0 \\ \hline +(2y-2c)ux^3 & & \&c \\ \frac{1}{2} & 0 & \\ \hline +(1)u^2x^3 & & \&c \end{array}$$

$$y=c$$

$$\begin{array}{l} 0 -(a-b)c^2x^2,\ \&c. \\ 0 \quad \&c. \\ +u^2x^3,\quad \&c. \end{array}$$

Si a eſt $=b$, le terme x^2 de la prémiére ligne ſera zéro, & il faudra calculer le terme x. Par la ſubſtitution de c à y, il ſe change en $(abcc-aadd)x$, ou $aa(cc-dd)x$, puiſqu'on ſuppoſe $a=b$. Mais la déterminatrice qui va de la Caſe uux^3 à la Caſe x, paſſe par la Caſe ux^2. Il faut donc la calculer. Le terme qui la remplit eſt le ſecond de la ſeconde ligne, qu'on trouvera être $-2acux^2$.

L'équation ordonnée par x

$$(yy-2cy+cc)x^3+(-2ayy+2acy)x^2+aa(yy-dd)x+a^3ff$$

$$\begin{array}{lll} 2\ 1\ 0 & 2\ 1 & \\ \hline +(2y-2c)ux^3+(-4ay+2ac)ux^2 & & \&c. \\ \frac{1}{2}\ 0 & & \\ \hline +(1)u^2x^3 & \&c. & \end{array}$$

$$y=c$$

$$\begin{array}{l} 0 \quad 0 +aa(cc-dd)x\ \&c. \\ 0 -2acux^2\ \&c. \\ u^2x^3\ \&c. \end{array}$$

L'équation de l'Aſymptote courbe eſt donc $u^2x^3-2acux^2+aa(cc-dd)x=0$, ou $u^2x^2-2acux+aacc-aadd$

CH.VIII. §. 141. $-aadd=0$, qui a deux racines $ux=a(c+d)$ & $ux=a(c-d)$. Elles indiquent deux Hyperboles ordinaires, dont la prémiére étend ses branches dans les angles des coordonnées de même signe, & la seconde de même, si $c>d$; mais celle-ci les étend dans les angles des coordonnées de signes contraires, si $c<d$. PL. XIII.

Si $c=d$, le coëfficient $aa(cc-dd)$ du terme x est zéro. La déterminatrice qui passe par les Cases u^2x^3 & ux^2, donne alors simplement l'éq: $u^2x^3-2acux^2=0$, ou $ux=2ac$, qui n'indique que deux Branches infinies, une dans chacun des angles des coordonnées de même signe. Mais il part de la Case ux^2 une autre déterminatrice supérieure qui va à la Case de la Pointe a^3ff, & donne l'éq: $-2acux^2+a^3ff=0$, ou $ux^2=\frac{a^2ff}{2c}$, qui indique deux autres Branches infinies dans les angles des coordonnées de même signe.

L'équation ordonnée par x.

$$\begin{array}{l}(yy-2cy+cc)\,x^3+(-2ayy+2acy)\,x^2+aa(yy-cc)\,x+a^3ff \\ \quad 2 \quad 1 \quad 0 \qquad\qquad 2 \qquad 1 \\ \hline +(2y-2c)\,ux^3+(-4ay+2ac)\,ux^2 \qquad \&c. \\ \quad \tfrac{1}{2} \qquad 0 \\ \hline +(1)\,u^2x^3 \qquad \&c.\end{array}$$

$$\overbrace{\begin{array}{l}0,\ 0,\ 0,\ +a^3ff \\ 0,\ -2acux^2,\ \&c \\ +u^2x^3,\ \&c.\end{array}}^{y=c}$$

Si c est nulle, la Case ux^2 sera vuide, le coëfficient $-2ac$ étant zéro. L'équation de l'Asymptote-courbe sera simplement $u^2x^2-aadd=0$, qui se décomposant

PL. XIII. en ces deux $ux - ad = 0$, & $ux + ad = 0$, indique deux Branches hyperboliques qui se jettent, une dans chacun des quatre angles des coordonnées. CH. VIII. §. 141.

Et si c'est d qui est nulle, l'équation de l'Asymptote-courbe sera $uuxx - 2acux + aacc = 0$, qui n'a qu'une seule racine, mais double, $ux - ac = 0$, laquelle indique une Hyperbole qui étend ses Branches dans les angles opposés des coordonnées de même signe. Mais cette racine double fait que la Série $y = c + \frac{ac}{x}$ &c. n'est pas encore réguliére, & il faut, dans la transformée en u & x, substituer $\frac{ac}{x}$ à u. Il faut donc avoir cette transformée. Ainsi on achévera le Calcul commencé ci-dessus.

L'équation ordonnée par x

$$(yy - 2cy + cc)x^4 + (-2ayy + 2acy)x^2 + (aayy)x + a^3ff$$
$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & & 2 & 1 & & 2 & & 0 \end{matrix}$$

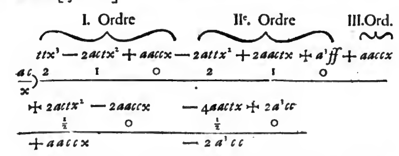
$$\overline{+(2y - 2c)ux^3 + (-4ay + 2ac)ux^2 + (2aay)ux}$$
$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & & \frac{1}{2} & 0 & & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\overline{+(1)u^2x^3 \quad - \quad 2au^2x^2 \quad + \quad aau^2x}$$

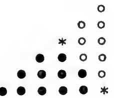
$$\overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & + aaccx + a^3ff \\ 0 - 2acux^2 + 2aacux, & & 0 \\ u^2x^3 - 2au^2x^2 + aau^2x, & & 0 \end{matrix}}^{y = c}$$

Dans cette transformée $u^2x^3 - 2au^2x^2 + aau^2x - 2acux^2 + 2aacux + aaccx + a^3ff = 0$, qui a trois ordres de termes, il faut substituer $\frac{ac}{x} + t$ à u. On peut faire cette substitution successivement dans les trois ordres, s'il est nécef-

CH. VIII. §. 141. nécessaire : mais il suffira de commencer par les deux premiers [§. 106]. PL. XIII.

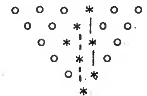


On a donc ttx^3 dans la Case de ce nom, o dans la Case tx^2 & dans la Case x, a^3ff dans la Case de la Pointe. Il est inutile de s'informer des autres, pleines ou vuides, parce que la déterminatrice passe par la Case t^2x^3, & par la Pointe.



Elle donne l'éq : $ttx^3 + a^3ff = 0$, ou $t = \pm\sqrt{-a^3ffx^{-3}} = \pm\frac{af}{x}\sqrt{-\frac{a}{x}}$, terme demi-imaginaire. La Série est donc $y = c + \frac{ac}{x} \pm \frac{af}{x}\sqrt{-\frac{a}{x}}$, &c. ce qui fait connoître que des deux Branches de l'Hyperbole $ux - ac = 0$, il n'y en a qu'une qui serve d'Asymptote à la Courbe, mais que cette Branche est accompagnée de deux Branches infinies.

PL. XIII. On pouvoit prévoir cette Conclusion par la seule inspection de la transformée $u^2x^3 - 2au^2x^2 + a^2u^2x - 2acux^2 + 2aacux + aacx + a^2ff = 0$, mise sur le Triangle analytique. Car la racine double $ux - ac = 0$ de l'équation faite en égalant à zéro les termes $u^2x^3 - 2acux^2$ CH. VIII. §. 141.



$+ aacx$ du prémier ordre, ne divise pas la somme $-2au^2x^2 + 2aacux + a^2ff$ des termes du second ordre. Donc [§. 113] puisqu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & sa parallèle qui passe par les termes du second ordre, & que la racine de l'équation fournie par la déterminatrice est double, le terme suivant de la Série sera demi-imaginaire. Donc, &c.

142. *Cas III.* Lorsque la déterminatrice supérieure coupe inégalement les deux Bandes extérieures du Triangle analytique, elle donne une ou plusieurs équations de cette forme $y = Ax^b$, ou $x = Ay^b$, l'exposant b étant un nombre différent de l'unité, [il seroit l'unité, si la déterminatrice retranchoit des portions égales des deux Bandes extérieures [§. 96. 2°.]]. Donc l'éq : $y = Ax^b$, ou $y^l = ax^k$, car c'est sous cette forme que la donne la déterminatrice, represente une Parabole, qui est l'Asymptote des Branches infinies de la Courbe, dont l'ordonnée s'exprime par la Série descendante qui a pour son premier terme Ax^b.

On

CH. VIII. §. 142. On a déja dit [§. 133] que la derniére direction de cette Parabole est l'Axe des ordonnées, quand $b > 1$, & celui des abscisses, quand $b < 1$. Or $b > 1$, quand la déterminatrice retranche une plus grande portion de la Bande sans y que de la Bande sans x; & $b < 1$, quand la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande sans y que de la Bande sans x [§. 96. 2°]. Ainsi la seule position de la déterminatrice fait connoître de quel côté tend la derniére direction de la Parabole-asymptote. PL. XIII.

Quand une seule déterminatrice fournit plusieurs équations telles que $y = Ax^{b}$, elles désignent tout autant de Paraboles-asymptotes, qui ont la même derniére direction. Et l'on juge par l'exposant b, & par le coëfficient A du terme Ax^{b}, dans quels angles s'étendent enfin les Branches de ces Paraboles [§. 128]. Les Branches de la Courbe se jettent dans les mêmes angles, ou du moins ne peuvent pas se jetter dans d'autres; car il est possible que les termes suivants de la Série rendent ces Branches imaginaires, ou en tout, ou en partie : ce qu'on n'a plus lieu de craindre lorsqu'on est parvenu aux termes réguliers.

Au reste, comme les déterminatrices supérieures, qui coupent les deux Bandes extérieures du Triangle, sont toûjours supérieures, soit qu'on le couche sur la Bande sans x, ou sur la Bande sans y; il est indifférent de chercher y en x, ou x en y. Mais si l'une de ces deux Séries donne l'exposant b rompu, & que l'autre le donne en nombre entier, le Calcul sera plus commode si l'on préfére ce dernier.

Exemple I. On propose l'éq : $xxyy - ay^3 - bx^3 = 0$. Mise sur le Tr : anal : elle a deux déterminatrices, qui coupant l'une & l'autre inégalement les Bandes extérieures

Pl. XIII. rieures indiquent des Branches paraboliques. *AB*, qui prolongée retranche une plus grande partie de la Bande Ch. VIII. §. 142.



sans y que de la Bande sans x, marque une Parabole-asymptote dont la derniére direction est l'Axe des ordonnées : & l'éq: $x^2y^2 - ay^3 = 0$, ou $y = \frac{x^2}{a}$, qu'elle fournit,
Fig. 93. est celle d'une Parabole ordinaire CAE, dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées positives. La Courbe jettera aussi des Branches dans les mêmes angles, parce que $y - \frac{x^2}{a} = 0$ n'est pas racine multiple de l'éq: $x^2y^2 - ay^3 = 0$ qu'a fourni la déterminatrice.

Cette Parabole-asymptote CAE est aussi l'Asymptote curviligne des Branches qui l'accompagnent. Car si on cherche le second terme de la Série en substituant $\frac{xx}{a} + u$ à y dans l'équation proposée, on la transformera en $-\frac{ux^4}{a} - 2uuxx - au^3 - bx^3 = 0$, qui étant mise sur le Tr: anal: couché sur la Bande sans x n'a qu'une déterminatri-

o
D * o
o o * *C*
o * o o
o o o o o
o o * o o o

ce

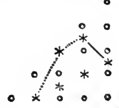
CH. VIII. §. 142. ce utile DC, qui donne l'éq : $-\frac{ux^4}{a} - bx^3 = 0$, ou PL. XIII.

$u = -abx^{-1}$. Dès le second terme, la Série $y = \frac{x^2}{a} - \frac{ab}{x}$ &c. a donc un expoſant négatif. Cet expoſant eſt impair, & ce terme eſt précedé du ſigne —. Ainſi l'Aſymptote-courbe eſt la Parabole CAE, & les Branches de la Courbe tombent en-deça de cette Aſymptote du côté des abſciſſes poſitives, & en-delà du côté des négatives [§. 134].

On tireroit précisément les mêmes choſes par raport aux Branches dont la derniére direction eſt l'Axe des abſciſſes, en réduiſant à $x = \frac{yy}{b}$ l'éq : $xxyy - bx^3 = 0$, que fournit la déterminatrice AC, & continuant la Série $\frac{yy}{b}$ + &c. qui donne x en y. Mais, pour varier le Calcul & nous exercer dans ces réductions, cherchons une ſeconde Série qui donne y en x. Le prémier terme, déduit de l'éq : $xxyy - bx^3 = 0$, eſt $y = \pm\sqrt{bx} = \pm b^{1:2}x^{1:2}$, qui déſigne la Parabole FAG, dont les Branches embraſſent, pour ainſi dire, l'Axe des abſciſſes qui eſt leur derniére direction, & s'étendent dans les angles des abſciſſes poſitives, puiſque x négative rend $\sqrt{bx}$ imaginaire. Cette Parabole-aſymptote eſt auſſi l'Aſymptote-courbe des Branches de la Courbe, qui ont cette derniére direction. Car en ſubſtituant $\pm\sqrt{bx} + u$ à y, on transforme l'équation en $\pm 2uxx\sqrt{bx} + uuxx = abx\sqrt{bx} \mp 3abux \mp 3auu\sqrt{bx} \mp au^3 = 0$, qui étant miſe ſur le Tr : anal : couché ſur la Bande ſans x a trois déterminatrices : mais la ſeule qui ſoit utile & qui donne un expoſant plus petit que $\frac{1}{2}$, c'eſt celle qui traverſant les Caſes

$ux^{2\frac{1}{2}}$,

PL.XIII. $ux^{2\frac{1}{2}}$, & $x^{\frac{1}{2}}$, donne l'éq: $\pm 2uxx\sqrt{bx} \mp abx\sqrt{bx} = 0$, CH.VIII. §. 142.



ou $u = + \frac{1}{2}abx^{-1}$. L'expoſant de ce ſecond terme fait voir, parce qu'il eſt négatif, que la Parabole FAG eſt l'Aſymptote-courbe; & parce qu'il eſt impair & précedé du ſigne +, que les Branches de la Courbe tombent au-deſſus de l'Aſymptote-courbe. Car le prémier terme de la Série $\pm\sqrt{bx}$ ne permet pas de ſuppoſer x négative.

Ainſi la Courbe a quatre Branches infinies diſpoſées comme on les voit dans la *Fig.* 93, tracée par points ſuivant ce Calcul. Soit $a = 4$, & $b = 1$, ou ſoit $xxyy - 4y^3 - x^3 = 0$ l'équation propoſée, & ſubſtituant yz à x, on la transformera en $y^4zz - 4y^3 - y^3z^3 = 0$, ou, diviſant par y^3, en $yzz - 4 - z^3 = 0$, ſoit $y = \frac{4}{zz} + z$.

Donc $x [= yz] = \frac{4}{z} + zz$. Ainſi ſuppoſant

$z =$ *inf.*, 4, 3, 2, $1\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\sqrt[3]{4}$, -2, -3, &c.
on aura $x =$ *inf.*, 17, $10\frac{1}{3}$, 6, $4\frac{11}{12}$, $2\sqrt{4}$, 5, $8\frac{1}{4}$, *inf.* $-7\frac{3}{4}$, -3, 0, 2, $7\frac{2}{3}$, &c.
& $y =$ *inf.*, $4\frac{1}{4}$, $3\frac{4}{9}$, 3, $3\frac{5}{18}$, $2\sqrt[3]{2}$, 5, $16\frac{1}{2}$, *inf.* $15\frac{1}{2}$, 3, 0, -1, $-2\frac{5}{9}$, &c.

Où l'on voit que les valeurs poſitives de z, donnant des x & des y poſitives, déterminent les points des Branches EIHF, qui ſont dans l'angle des coordonnées poſitives:

CH. VIII. §. 142. tives : qu'en particulier, celles qui sont prises entre l'infini & 2 donnent les points de la Branche FH dès l'infini jusqu'au point H, qui est le plus près de l'Axe AB des abscisses : que celles qui sont prises entre 2 & $\sqrt[3]{2}$ donnent les points de l'arc HI compris entre le point H & le point I le plus proche de l'Axe AD des ordonnées ; & que celles qui sont prises entre 2 & o, donnent les points de la Branche IE dès le point I à l'infini. Que les valeurs négatives de z, donnant x ou y négative, déterminent les points des Branches CA & AG, sçavoir ceux de la Branche CA, quand les valeurs de z sont prises entre o & $-\sqrt[3]{4}$, parce que dans cet intervalle elles donnent x négative & y positive ; & ceux de la Branche AG, quand ces valeurs sont prises dès $-\sqrt[3]{4}$ à l'infini négatif, parce qu'alors elles donnent x positive & y négative. PL. XIII.

Exemple II. Soit proposée l'éq : $x^6 - 3a^2x^4 - a^4y^2 + 3a^4x^2 - a^6 = 0$. Quand on la place sur le Tr : anal : on ne lui trouve qu'une seule déterminatrice supérieure *AB*, qui, coupant inégalement les deux Bandes extérieures, indique des Branches paraboliques dont la derniére direction est l'Axe des ordonnées, puisque la portion qu'elle retranche de la Bande sans y est plus grande que la portion qu'elle retranche de la Bande sans x.

```
o  o  o  o  o  o  *A
  o  o  o  o  o  o
    o  o  o  o  *
      o  o  o  o
       B*  o  *
          o  o
           *
```

Pl.XIII. Cette déterminatrice donne l'éq: $x^6 - a^4yy = 0$, ou Ch.VIII. §. 142.
$y = \pm \frac{x^3}{aa}$ pour celle de la Parabole-asymptote, qui est le Systême de deux Paraboles cubiques égales, l'une positive, l'autre négative, lesquelles étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées.

Les deux racines de l'éq: $x^6 - a^4yy = 0$ étant racines simples, les quatre Branches des Paraboles-asymptotes seront infailliblement suivies d'autant de Branches de la Courbe. Mais si l'on veut avoir l'Asymptote-curviligne, il faut calculer encore un terme de la Série, en substituant $\pm \frac{x^3}{aa} + u$ à y dans la proposée, ce qui la transforme en $-3aax^4 \mp 2aax^3u - a^4uu + 3a^4xx - a^6 = 0$. Celle-ci, étant mise sur le Tr: anal: couché sur la Bande sans x, a une déterminatrice utile CD, qui donne l'équation

```
                        o
                    o   o
                o   o   * C
            o   o D*    o
        o   o   o   o   *
    o   o   o   o   o   o
o   o   o   o   *   o   *
```

$-3aax^4 \mp 2aax^3u = 0$, ou $u = \mp \frac{3}{2}x$, où l'exposant d'x est encore positif. Il faut joindre ce terme au premier, & les éq: $y = +\frac{x^3}{aa} - \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{x^3}{aa} + \frac{3}{2}x$ sont celles des Asymptotes curvilignes, à moins que dans le terme suivant, x n'ait encore un exposant positif, ou zéro. On cherchera donc ce troisiéme terme, d'autant mieux que son signe & son exposant marquent de quel côté des Asymptotes tombent les Branches de la Courbe. Pour cet effet,

Ch. VIII. § 142. effet, on substituera $\mp\frac{3}{2}x + t$ à u dans la derniére équation, & on mettra la transformée $\mp 2aatx^3 \pm 3a^4tx - a^4tt + \frac{3}{4}a^4xx - a^6 = 0$ sur le Tr: anal: Sa déterminatrice EF donne $\mp 2aatx^3 + \frac{3}{4}a^4xx = 0$, soit $t = \pm\frac{3}{8}aax^{-1}$, où l'exposant d'$x$ est négatif. Pl. XIII,

```
                  o
                o o
              o o o
            o o E* o
          o o o o * F
        o o o o * o
      o o o o * o *
```

La Courbe a donc quatre Branches infinies, dont la position à l'infini est déterminée par celles des Asymptotes-curvilignes, que représentent les éq: $v = +\frac{x^3}{aa} - \frac{3}{2}x$, $v = -\frac{x^3}{aa} + \frac{3}{2}x$, & qui se construisent ainsi. Pour la premiére on décrira sur les Axes AB, AC une Parabole-cubique ADN, dont les abscisses [AP] x portent les ordonnées [PN] $\frac{x^3}{aa}$; & on ménera par l'Origine A la Droite AF tellement inclinée à l'Axe AB, que les abscisses AP soient les deux tiers des ordonnées PQ. Ensuite de chaque ordonnée PN [$\frac{x^3}{aa}$] de la Parabole on retranchera NM égale à PQ [$\frac{3}{2}x$], & la Courbe mbABM qui passe par tous les Points M est celle que désigne l'éq: $v = \frac{x^3}{aa} - \frac{3}{2}x$. Fig. 94.

Cette Courbe est elle-même une Parabole cubique, dont les abscisses z [AQ] sont prises sur la Droite AF &

 dont

Pl. XIII. dont les ordonnées u sont QM. Car puisque $AP = x$, & $PQ = \frac{1}{2}x$, AQ [z], qui est $= \sqrt{(AP^2 + PQ^2)}$ [on suppose l'angle APQ droit; mais quel qu'il soit, la raison de AQ à AP est donnée, & cela revient au même,] AQ, dis-je, sera $x\sqrt{(1 + \frac{9}{4})} = \frac{1}{2}x\sqrt{13}$, & QM [$u$] $=$ QP $+$ PM $=$ PN $= \frac{x^3}{aa}$. Donc $z = \frac{1}{2}x\sqrt{13}$, ou $x = \frac{2z}{\sqrt{13}}$, & $u = \frac{x^3}{aa} = \frac{8}{13\sqrt{13}} \times \frac{z^3}{aa}$. Or cette éq: $u = \frac{8}{13\sqrt{13}} \times \frac{z^3}{aa}$ est celle d'une Parabole cubique [§. 126]. Ch. VIII. §. 142.

Fig. 95. Ayant ainsi décrit la prémiére Parabole-asymptote ebABE, on décrira de même la seconde ebABE dont l'éq: $v = -\frac{x^3}{aa} + \frac{1}{2}x$, ayant des signes contraires à ceux de la prémiére, marque une situation opposée. Ainsi ces deux Paraboles se croisent non-seulement à l'Origine A, mais aussi aux points B, b, pris sur l'Axe des abscisses à une distance $AB = Ab = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ de l'Origine A. Car si l'on fait $v = 0$, l'équation de la prémiére Parabole donne $\frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x = 0$, & celle de la seconde $-\frac{x^3}{aa} + \frac{1}{2}x = 0$; équations, qui ne sont au fond que la même, & qui ont trois racines $x = 0$, $x = +a\sqrt{\frac{1}{2}} = AB$, $x = -a\sqrt{\frac{1}{2}} = Ab$.

Ces deux Paraboles cubiques ebABE, ebABE sont les Asymptotes curvilignes de la Courbe proposée. Elle rencontre l'Axe des abscisses en deux points G, g, extrémité des abscisses $AG = +a$, $Ag = -a$. Car faisant $y = 0$, l'équation proposée se réduit à $x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 = 0$, ou $(xx - aa)^3 = 0$, qui a deux racines réelles $x = a$, $x = -a$. De chacun de ces deux points G, g, partent deux Branches paraboliques GH, GH; gh, gh, qui s'aprochent toûjours plus des Parabo-

les

CH.VIII. §. 142. les BE, BE, be, be, que nous leur avons assignées pour Asymptotes. Car l'ordonnée PH [y] de la Courbe est égale à $\frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x + \frac{3aa}{8x}$ &c. & l'ordonnée PM [v] de la Parabole est égale à $\frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x$. Donc PH surpasse PM d'une quantité [HM] $\frac{3aa}{8x}$ &c. qui diminuë à mesure que x augmente, & s'anéantit quand x est infinie. Les Branches GH, BM de la Courbe & de la Parabole vont donc toûjours en s'aprochant, & coïncident enfin. PL.XIII.

Cela s'ajuste très-bien avec ce que nous montre la résolution de l'équation proposée. Elle se réduit à $yy = \frac{x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6}{aa} = \frac{(xx-aa)^3}{aa} = \frac{(x+a)^3 \times (x-a)^3}{aa}$, ou $y = \frac{\sqrt{((x+a)^3 \times (x-a)^3)}}{a}$. Si on prend x positive & moindre que a, la somme $x+a$ sera positive, & la différence $x-a$ négative, & il en sera de même de leurs cubes $(x+a)^3$, $(x-a)^3$. Donc leur produit sera négatif, & sa racine quarrée imaginaire. Ainsi les abscisses plus petites que a [AG] n'ont que des ordonnées imaginaires. Si on prend $x=a$, on a $y=0$, ce qui marque que la Courbe rencontre l'Axe des abscisses au point G. Mais quand $x>a$, $x+a$ & $x-a$ sont positives, & y est réelle & augmente à mesure que x augmente. Donc, dès le point G, les ordonnées, tant positives PH, que négatives P*H*, vont en croissant: ce qui forme les deux Branches infinies GH, G*H*. Et puisque la substitution de $-x$ à $+x$ ne change rien à l'équation de la Courbe, qui ne renferme que des puissances paires de x; il y aura aussi du côté des abscisses négatives deux Branches infinies gh, g*h* égales & semblables à GH, G*H*.

PL. XIII. *Exemple III.* 1. On propose l'éq : $aayy - 2ax^2y - 3x^4 - bx^3 = 0$. Sur le Tr : anal : elle n'a qu'une déterminatrice supérieure AB, dont la position indique des Branches paraboliques avec une derniére direction pa- CH. VIII. §. 142.

o o o o * A
o o * *
B* o o
o o
o

rallèle à l'Axe des ordonnées. L'équation $aayy - 2axxy - 3x^4 = 0$, qu'elle donne, a deux racines $ay - 3xx = 0$, & $ay + xx = 0$, soit $y = \frac{3xx}{a}$, & $y = -\frac{xx}{a}$; qui désignent deux Paraboles ordinaires, l'une positive dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées positives, l'autre négative qui jette ses Branches dans les angles des ordonnées négatives. Ce sont là les Paraboles-asymptotes, & puisque l'équation qu'a fourni la déterminatrice n'a point de racines multiples, il est sûr que la Courbe jette aussi quatre Branches paraboliques, une dans chacun des quatre angles des coordonnées.

Mais pour avoir les Asymptotes-courbes de ces Branches, on cherchera le second terme de ces deux Séries en substituant $Axx + u$ à y. Cela transforme l'équation proposée en $aauu + (2aaA - 2a)uxx + (aaAA - 2aA - 3)x^4 - bx^3 = 0$. Le terme $(aaAA - 2aA - 3)x^4$ s'évanouït, soit qu'on écrive $+\frac{3}{a}$ au lieu d'A pour la prémiére transformée, soit qu'on écrive $-\frac{1}{a}$ pour la seconde. Ainsi, pour l'une & l'autre, la transformée sera

$aauu +$

CH. VIII. §. 142. $aauu + (2aaA - 2a)uxx - bx^3 = 0$. Quand elle est mise sur le Triang: anal: couché sur la Bande sans x, sa déterminatrice utile CD donne l'éq: $(2aaA - 2a)uxx - bx^3 = 0$, ou $u = \frac{bx}{2aaA - 2a}$, c'est-à-dire $u = + \frac{bx}{4a}$ PL. XIII.

				o
			o	$*C$
		oD	$*$	o
	o	o	o	o
o	o	$*$	o	o

pour la prémiére Série, & $u = -\frac{bx}{4a}$ pour la seconde.

Comme dans ce second terme l'exposant x n'est pas encore négatif, il faudra chercher le troisiéme, en substituant $Bx + t$ à u, dans la prémiére transformée $aauu + (2aaA - 2a)uxx - bx^3 = 0$, ce qui la changera en $aaBBxx + 2aaBtx + aatt + (2aaA - 2a)txx + (2aaAB - 2aB - b)x^3 = 0$. Ce dernier terme doit manquer, puisque la Case x^3 à laquelle se terminoit la déterminatrice doit rester vuide [§. 107], & on trouvera en effet qu'il est nul, soit qu'on substituë $+\frac{3}{a}$ à A & $+\frac{b}{4a}$ à B, ce qui est leur valeur dans la prémiére Série; soit qu'on écrive $-\frac{1}{a}$ pour A & $-\frac{b}{4a}$ pour B, ce qui apartient à la seconde Série. Mettant donc la seconde transformée $aaBBxx + 2aaBtx + aatt + (2aaA - 2a)txx = 0$ sur le Tr: anal: sa déterminatrice utile EF donnera $aaBBxx + (2aaA - 2a)txx = 0$, ou $t = -\frac{aaBB}{2aaA - 2a}$; c'est-à-dire

Pl. XIII. à-dire $t = -\frac{bb}{64a}$ pour la prémiére Série ; & $t = +\frac{bb}{64a}$ Ch. VIII. §. 141. pour la seconde.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & o \\ & & & o & o \\ & & oE* & & *F \\ & o & o & * & o \\ o & o & * & o & o \end{array}$$

Ainsi les équations des Asymptotes-courbes sont $v = \frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$ & $v = -\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$; car le terme suivant ne peut avoir qu'un exposant négatif. Il est pourtant bon de le calculer pour connoître la position des Branches de la Courbe autour de leurs Asymptotes. Pour cet effet on substituera dans la derniére équation $C + s$ au lieu de t [C vaut $-\frac{bb}{64a}$, pour la prémiére Série, & $+\frac{bb}{64a}$ pour la seconde] ; ce qui la transformera en $(aaBB + 2aaAC - 2aC)xx + 2aaBCx + 2aaBsx + aaCC + 2a^2Cs + aass + (2aaA - 2a)sxx = 0$, où le prémier terme doit disparoître, puisque la déterminatrice aboutissoit à la Case xx. Les autres, mis sur le Triang : analyt : ont une déterminatrice utile, qui donne l'équat : $+2aaBCx + (2aaA - 2a)sxx = 0$, ou $s = -\frac{2aaBC}{2aaA - 2a}x^{-1}$ $=$ [pour la prémiére Série] $+\frac{b^3}{512ax}$ & [pour la seconde] $-\frac{b^3}{512ax}$.

Les

CH. VIII. §. 142. Les éq: $v = \frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$, & $v = -\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$ PL. XIII.
des Asymptotes-curvilignes se peuvent construire ainsi. Pour la prémiére, qu'on décrive sur les Axes AP, AE, Fig. 96.
la Parabole QAq, dont les abscisses AP, Ap étant x, les ordonnées PQ, pq sont $\frac{3xx}{a}$: & qu'on méne par l'Origine A la Droite AT, dont les ordonnées PT, pt sont $\frac{bx}{4a}$. Ainsi joignant les ordonnées de la Droite à celles de la Parabole, c'est-à-dire, prenant QR, qr, toûjours égales à PT, pt, & dans la même direction, on aura la Courbe RAr, dont les ordonnées seront $\frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a}$. Et diminuant toutes ces ordonnées d'une grandeur constante $RS = rs = AE = \frac{bb}{64a}$, ou, ce qui est la même chose, faisant descendre la Courbe RAr en SEs, d'une hauteur $AE = \frac{bb}{64a}$, on aura la prémiére Asymptote-courbe, dont les ordonnées sont $\frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$.

Cette Asymptote n'est qu'une Parabole ordinaire, dont l'Axe des ordonnées est EA, & celui des abscisses EV parallèle à AT; c'est-à-dire, que prenant EV pour une abscisse, que nous nommerons z, VS sera l'ordonnée, que nous apellerons u. Car EV est égale a AT, qui est à AP en raison donnée, puisque les angles du Triangle PAT sont donnés. Soit $f:a$ la raison de AT [z] à AP [x]. Donc $x = \frac{az}{f}$. D'ailleurs VS [u] = TR [puisque

PL. XIII. TV = AE = RS] = PQ [puisque QR = PT] = $\frac{3xx}{a} = \frac{3azz}{ff}$ [en mettant pour x sa valeur $\frac{az}{f}$]. L'équation entre les coordonnées EV [z] & VS [u] est donc $u = \frac{3azz}{ff}$, qui est celle d'une Parabole ordinaire [§. 123]. Ch. VIII. §. 142.

Fig. 97. Qu'on transporte cette Asymptote en SES, en prenant AE $= \frac{bb}{64a}$, AF $= \frac{1}{16}b$, menant la Droite EFV, & décrivant sur l'Axe EV des abscisses & sur l'Axe EA des ordonnées, avec un Paramétre $\frac{EF^2}{3AF}$ [$\frac{ff}{3a}$], la Parabole SES, dont l'équation, rélativement aux Axes EV, EA, sera $u = \frac{3azz}{ff}$, mais rélativement aux Axes AF, Ae, $v = \frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$. Qu'on transporte aussi sur les mêmes Axes, l'autre Asymptote-courbe se$s$, en prenant l'ordonnée positive Ae $= \frac{bb}{64a}$, l'abscisse AF $= \frac{1}{16}b$; tirant la Droite eFv, & décrivant sur les Axes ev, eA, avec un Paramétre $\frac{eF^2}{AF}$ [$\frac{ff}{a}$], une Parabole se$s$, dont l'équation rélativement aux Axes ev, eA sera $u = -\frac{azz}{ff}$. Mais, rélativement aux Axes AF, Ae, elle sera $v = -\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$. Car $f : a =$ eF : AF = ev [z] : AP [x]. Donc $z = \frac{fx}{a}$, & cette valeur substituée dans l'éq: $u = -\frac{azz}{ff}$, la

CH. VIII. §. 142. la change en $u = -\frac{xx}{a}$. De plus, AF$[\frac{1}{16}b]$: Ae$[\frac{bb}{64a}]$ PL. XIII.
$= FP[x - \frac{1}{16}b]$: Pv$[\frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}]$. Donc vs$[-u]$
$=$Ps$[-v]$ — Pv$[\frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}]$. Mais $u = -\frac{xx}{a}$, ou
$-u = \frac{xx}{a}$. Donc $\frac{xx}{a} = -v - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$, ou $v =$
$-\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$.

Ainsi nous avons les Asymptotes-courbes SES, ses, de la Courbe proposée. Le quatriéme terme $+\frac{b^3}{512ax}$ de la prémiére, & $-\frac{b^3}{512ax}$ de la seconde Série fait voir que du côté des abscisses positives, les Branches de l'Asymptote tombent entre celles de la Courbe & l'Axe des abscisses, & que du côté des abscisses négatives, ce sont les Branches de la Courbe qui tombent entre l'Axe & les Branches de l'Asymptote.

On voit par-là que la Courbe représentée par l'éq: $aayy - 2axxy - 3x^4 - bx^3 = 0$ a quatre Branches paraboliques, & on juge assez précisément de leur position. Cela convient parfaitement avec le calcul des abscisses & des ordonnées de cette Courbe, qui peut se faire en diverses maniéres, par ex. en supposant $y = \frac{xxz}{aa}$; ce qui transforme l'équation en $\frac{x^4zz}{aa} - \frac{2x^4z}{a} - 3x^4 - bx^3 = 0$, ou $x = \frac{aab}{zz - 2az - 3aa} = \frac{aab}{(z-3a)\times(z+a)}$. Où l'on voit, que prenant pour z deux valeurs différentes qui

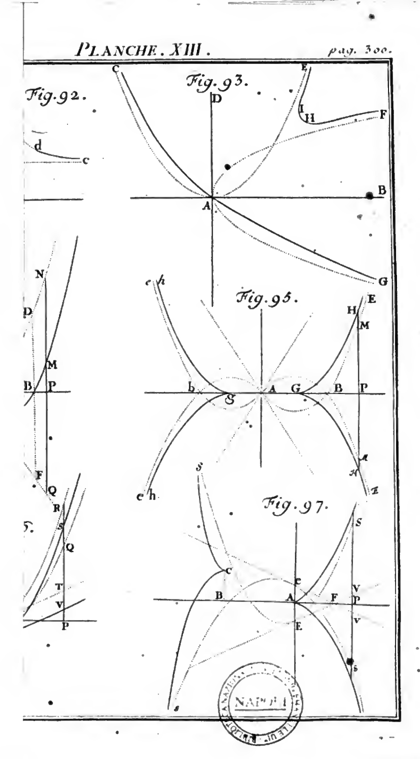
PL. XIII. qui fassent ensemble la somme $2a$, comme b & $2a - b$, elles donneront une même valeur d'x. La prémiére donne $bb - 2ab - 3aa$ pour le dénominateur de la fraction égale à x, & la seconde donne $4aa - 4ab + bb - 4aa + 2ab - 3aa = bb - 2ab - 3aa$. On pourra donc coupler deux à deux ces valeurs de z, qui donnent une même abscisse x, avec différentes ordonnées $\frac{bxx}{aa}$ & $\frac{(2a - b)xx}{aa}$. Il est encore aisé de voir que si ces deux valeurs de z sont positives, elles ne peuvent donner pour x une valeur qui aproche plus de zéro, que quand elles sont égales chacune à a, ce qui donne $x = \frac{aab}{-2a.2a} = -\frac{1}{4}b$, & $y = [\frac{xxz}{aa} =] \frac{bb}{16a}$. Mais cela deviendra plus sensible en fixant les valeurs de a, & de b. Soient, par exemple, $a = 1$ & $b = 12$, & faisant CH. VIII. §. 142.

$$z = \begin{cases} 1 \quad \frac{1}{2}, \quad 0, -\frac{1}{2}, -1, -2, -3, -5, \&c. \\ \quad\;\; 1\frac{1}{2}, \quad 2, \quad 2\frac{1}{2}, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 7, \&c. \end{cases}$$

on aura $x = -3, -3\frac{1}{5}, -4, -6\frac{6}{7}, inf.\ 2\frac{2}{5}, 1, \frac{3}{8}, \&c.$

$$\& \ y = \begin{cases} -9 \quad 5\frac{3}{25}, \quad 0, -23\frac{25}{49}, -inf. -11\frac{13}{25}, -3, -\frac{45}{64}, \&c. \\ \quad\;\; 15\frac{9}{25}, \quad 32, \ 117\frac{27}{49}, inf.\ 23\frac{1}{25}, \quad 5, \quad \frac{63}{64}, \&c. \end{cases}$$

Il paroît donc que la Courbe a quatre Branches, dont deux AS, As partent de l'Origine A, & les deux autres CS, Cs du point C, qui a pour abscisse $AB = -\frac{1}{4}b$, & pour ordonnée $BC = \frac{bb}{16a}$. Les points de la Branche AS sont donnés par les valeurs de z, qui sont au-dessus de 3 ; ceux de la Branche As par les valeurs de z, qui sont


Fig. 92.
d
c
Fig. 93.
C
D
E
I
H
F
B
A
G
Fig. 95.
h
H
E
M
N
D
M
B
P
b
A
G
B
P
F
Q
R
S
Q
T
V
P
e h
Fig. 97.
s
S
C
e
B
A
F
V
P
E
v
s

CH. VIII §. 142. font au-deffous de -1; ceux de la Branche CS par les valeurs de z, qui font entre 3 & 1, & ceux de la Branche Cs par les valeurs de z prifes entre 1 & -1. PL. XIII.

2. Si dans l'équation propofée on change feulement le figne du terme $-3x^4$; alors, quoique l'équation rempliffe les mêmes Cafes fur le Tr: anal:, la Courbe qu'elle repréfente eft entiérement différente. Car l'éq: $aayy - 2ax^2y + 3x^4 = 0$, que fournit l'unique déterminatrice fupérieure, n'a que des racines imaginaires $ay - (1 \pm \sqrt{-2})xx = 0$. Donc la Courbe n'a point de Branches infinies.

En effet, fi l'on transforme fon équation, comme la précédente, par la fubftitution de $\frac{xxz}{aa}$ au lieu d'y, on aura $x = \frac{aab}{zz - 2az + 3aa} = \frac{12}{zz - 2z + 3}$ [en prenant toûjours $a = 1$ & $b = 12$], où l'on voit qu'il n'y a aucune valeur de z, qui donne x ou y infinie. Et le calcul cy-joint fait voir que la Courbe eft une efpèce d'Ovale, dont les points de l'arc AED font déterminez par les valeurs de z prifes au-deffus de 1, ceux de l'arc DB par les valeurs de z prifes entre 1 & 0, & ceux de l'arc BFA par les valeurs négatives de z. PL. XIV. Fig. 98.

$z =$	1,	$\frac{1}{2}$,	0,	-1,	-2,	-3,	&c.
		$1\frac{1}{2}$,	2,	3,	4,	5,	&c.
$x =$	6,	$5\frac{1}{3}$,	4,	2,	$1\frac{1}{11}$,	$\frac{2}{3}$,	&c.
$y =$	36,	$14\frac{2}{9}$,	0,	-4,	$-2\frac{45}{121}$,	$-1\frac{1}{3}$,	&c.
		$42\frac{2}{3}$,	32,	12,	$4\frac{92}{121}$,	$2\frac{2}{9}$,	&c.

3. Mais fi au lieu de $+3x^4$, ou $-3x^4$, on avoit eû $+x^4$, l'équation de la déterminatrice feroit $aayy - 2axxy + x^4 = 0$, qui n'a qu'une feule racine, mais double,

$ay -$

PL. XIV. Fig. 99. $ay - xx = o$. Il n'y a donc qu'une Parabole-asymptote SA*S* décrite sur les mêmes Axes que ceux de la Courbe, avec une derniére direction parallèle aux ordonnées. Mais cette racine double fait voir [§. 113] que le terme suivant est demi-imaginaire, puisqu'entre la déterminatrice & sa parallèle qui passe par le terme bx^3 du second Ordre, il n'y a qu'un intervalle. La Courbe n'aura donc que deux Branches infinies, toutes deux d'un même côté de l'Axe des ordonnées. Mais pour le voir plus clairement, qu'on substituë $\frac{xx}{a} + u$ à y dans la proposée, & elle se réduira à $aauu - bx^3 = o$, qui, sans être mise sur le Tr: an: donne ces deux racines $u = + \frac{x}{a}\sqrt{bx}$, & $u = - \frac{x}{a}\sqrt{bx}$, lesquelles terminent la Série. Ainsi l'équation de la Courbe est $y = \frac{xx}{a} \pm \frac{x}{a}\sqrt{bx}$, dont le terme $\frac{x}{a}\sqrt{bx}$ fait voir que les ordonnées des abscisses négatives sont imaginaires, & que l'Asymptote-courbe consiste dans la seule Branche AS de la Parabole SA*S*, qui est accompagnée de deux Branches infinies de la Courbe. CH. VIII. §. 141.

Car si on décrit sur les mêmes Axes que la Parabole SA*S*, la Parabole TA*T* dont les ordonnées sont $\pm \frac{x}{a}\sqrt{bx}$; on verra que les ordonnées PM, P*M*; pm, p*m*, de la Courbe cherchée, sont égales à la somme *ST*, *st*; & à la différence ST, st des ordonnées de ces deux Paraboles. La derniére n'ayant point d'ordonnées du côté des abscisses négatives, la Courbe sera aussi sans ordonnées de ce côté-là, & n'aura que deux Branches AmDM, A*m*B*M* qui s'aprochent toûjours plus de la Branche AS, qui est leur Parabole-asymptote.

4. Si,

Ch. VIII. §. 142. 4. Si, dans ce même cas, au lieu du terme $-bx^3$ l'équation proposée avoit eû $-b^2x^2$, il y auroit eû deux intervalles entre la déterminatrice AB & sa parallèle CD, Pl. XIV.

$$\begin{array}{ccccc} o & o & o & o & *A \\ & o & o & * & o \\ & B* & o & *C & \\ & D o & o & & \\ & & o & & \end{array}$$

de façon que le second terme de la Série ne sera plus demi-imaginaire, mais imaginaire ou réel [§. 113]. En substituant $\frac{xx}{a} + u$ à y dans la proposée $aayy - 2axxy + x^4 - bbxx = 0$, on la transforme en $aauu - bbxx = 0$, dont les racines sont $au \mp bx = 0$ ou $u = \pm \frac{bx}{a}$. La proposée est donc réductible en ces deux, $y = \frac{xx}{a} + \frac{bx}{a}$ & $y = \frac{xx}{a} - \frac{bx}{a}$. Aussi la Courbe est-elle composée de deux autres, qui sont de simples Paraboles, qu'on peut construire ainsi. Qu'on donne à l'abscisse Aa [a] les ordonnées aB [b] & ab [$-b$]; qu'on méne les Droites AQB, Aqb, & que les prenant pour Axes d'abscisses, sur ces Axes & sur l'Axe des ordonnées AC, on décrive deux Paraboles, avec un Paramétre $\frac{AB^2}{Aa} = \frac{Ab^2}{Aa} = \frac{ff}{a}$, en nommant AB, ou Ab, f. Ainsi l'équation de ces Paraboles, rélativement aux coordonnées AQ, ou Aq, [z], & QM, ou qm, [u], est $u = \frac{azz}{ff}$. Mais relativement aux coordonnées AP [x] & PM, ou Pm, [y], leur équation Fig. 100.

PL. XIV. tion sera $y = \frac{xx}{a} \pm \frac{bx}{a}$. Car Aa[$a$] : AB, ou Ab, [$f$] CH. VIII. §. 141.

$=$ AP[x] : AQ, ou Aq, [z]. Donc $z = \frac{fx}{a}$, & $u =$

$[\frac{azz}{ff} =] \frac{xx}{a}$. De plus, Aa[$a$] : aB, ou ab[$\pm b$] $=$

AP[x] : PQ, ou Pq, [$\pm \frac{bx}{a}$]. Ainsi PM, ou Pm, [y] $=$

PQ + QM[$+ \frac{bx}{a} + \frac{xx}{a}$] ou $-$Pq + qm[$- \frac{bx}{a} + \frac{xx}{a}$].

Exemple IV. 1. L'équation proposée est $x^6 + 2bx^3y^2 + 2abx^4 + bby^4 - 2ab^2xy^2 + a^2b^2x^2 = 0$. Sur le Triang : anal : elle n'a qu'une déterminatrice supérieure *AB*, qui par sa position fait espérer des Branches paraboliques, dont la derniére direction est l'Axe des ordonnées. L'éq : $x^6 + 2bx^3y^2 + bby^4 = 0$ que donne la déter-

```
o  o  o  o  o  o  *A
  o  o  o  *  o  o
   B*  o  o  o  *
      o  *  o  o
        o  o  *
          o  o
            o
```

minatrice *AB* ne dément point cette espérance : sa racine double $x^3 + by^2 = 0$, ou ses racines doubles $y = \pm x\sqrt{-\frac{x}{b}}$, indiquant une Parabole *semi-cubique* [c'est le nom que lui donnent les Géométres] qui étend deux Branches dans les angles des abscisses négatives. Mais, comme ces racines sont doubles, il faut, avant que prononcer sur les Branches infinies de la Courbe, chercher le second terme

CH. VIII. §. 142. terme de la Série, en substituant $\pm x\sqrt{-\frac{b}{x}}$ au lieu d'y dans l'équation proposée. En voici le calcul, par la méthode du §. 106. PL. XIV.

	I. Ordre			IIᵉ. Ordre		III. Ord.
	x^6	$+ 2bx^3y^2$	$+ bby^4$	$+ 2abx^4$	$- 2abbxy^2$	$+ a^2b^2x^2$,
	0	2	4	0	2	0
$\pm x\sqrt{-\frac{x}{b}}$)		$\pm 4bx^4y\sqrt{-\frac{x}{b}}$	$\pm 4bxy^3\sqrt{-\frac{x}{b}}$		$\mp 4abbxxy\sqrt{-\frac{x}{b}}$	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	
		$-2x^6$	$-6bx^3y^2$		$+2abx^4$	
		0	$\frac{2}{3}$		0	
			$\mp 4bx^4y\sqrt{-\frac{x}{b}}$			
			$\frac{1}{4}$			
			$+x^6$			

La transformée $-4bx^3u^2 \pm 4bxu^3\sqrt{-\frac{x}{b}} + bbu^4 + 4abx^4 \mp 4ab^2x^2u\sqrt{-\frac{x}{b}} - 2abbxu^2 + a^2b^2x^2 = 0$, étant mise sur le Tr: anal: couché sur la Bande sans x, n'a qu'une déterminatrice utile CD, qui donne $-4bx^3u^2 + 4abx^4$

```
                        o
                     o  o
                  o  o  * C
             o D *   o  o
                     *
          o  o   o   o  *
             *
       o  o  o   *   o  o
    o  o  *  o   o   o  o
```

 $= 0$

PL. XIV. $=0$, ou $u=\pm\sqrt{ax}$. Ces deux prémiers termes de la Série $y=\pm x\sqrt{-\frac{x}{b}}\pm\sqrt{ax}$ font voir que la Courbe n'a que des Branches imaginaires. Car le prémier terme exclud toutes les Branches qui pourroient avoir des abscisses positives, & le second toutes celles qui pourroient avoir des abscisses négatives. On s'assurera en effet que la Courbe est imaginaire, en résolvant son équation. Car on trouvera $by=\pm\sqrt{(abx-x^3\pm\sqrt{-4abx^5})}$, que la grandeur radicale $\sqrt{-4abx^5}$ rend essentiellement imaginaire, si, comme on le suppose, a & b sont positives. CH. VIII. §. 142.

2. Si l'une de ces deux grandeurs, b par exemple, étoit négative, l'équation seroit $x^6-2bx^3y^2-2abx^4+bby^4-2ab^2xy^2+a^2b\,x^2=0$. Le prémier terme de la Série seroit $\pm x\sqrt{\frac{x}{b}}$. Et le second $\pm\sqrt{ax}$ seroit le dernier terme. Car si dans la transformée $+4bu^2x^3\pm4bbu^3x\sqrt{\frac{x}{b}}+bbu^4-4abx^4\mp4abbux^2\sqrt{\frac{x}{b}}-2abbuux+aabbxx=0$, on substituë $\pm\sqrt{ax}+t$ à u, on aura $\pm8btx^3\sqrt{ax}+4bttx^3\pm8bbtx^2\sqrt{\frac{x}{b}}+12bbttxx\sqrt{\frac{a}{b}}+4abbttx\pm4bbt^3\sqrt{ax}+bbt^4\pm4bbt^3x\sqrt{\frac{x}{b}}=0$. Or non-seulement on peut prendre $t=0$, puisque cette équation est divisible par t, & regarder la Série $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{b}}\pm\sqrt{ax}$ comme terminée; mais encore on le doit. Car si on met cette équation sur le Tr: anal: on ne lui trouvera que deux déterminatrices supérieures EF, FG, qui donnent l'une $bbt^4\pm4bbt^3x\sqrt{\frac{x}{b}}+4bttx^3=0$, ou $t=\mp2x\sqrt{\frac{x}{b}}$, l'autre $+4bttx^3\pm8btx^3\sqrt{ax}=0$, ou $t=\mp2\sqrt{ax}$. Mais la

Ch. VIII. §. 142. | Pl. XIV.

```
                        o
                     o  o
                  o  o G o
                     *
            o F  *   o  o
                     *
         o  o    *   o  o
            *
      o  o  o    *   o  o
            *
   o  o  *  o    o   o  o
         E
```

la Série $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}} \pm \sqrt{ax}$ ne change point, encore qu'on lui ajoûte l'une ou l'autre de ces deux quantités $\mp 2x\sqrt{\frac{x}{b}}$, ou $\mp 2\sqrt{ax}$. Donc cette Série est complette, & elle est l'équation de la Courbe.

Ainsi sa Construction est facile. Car si on décrit sur les axes AB, AE la Parabole semi-cubique SAs, dont les ordonnées sont $\pm x\sqrt{\frac{x}{b}}$, & la Parabole ordinaire TAt, dont les ordonnées sont $\pm\sqrt{ax}$, & qu'à chaque abscisse AP $[x]$ on donne les ordonnées PM $[+x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax}]$, P*M* $[-x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax}]$ égales à la somme St, ou Ts, & les ordonnées Pm $[+x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax}]$, P*m* $[-x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax}]$ égales à la différence ST, ou ts, des ordonnées de ces Paraboles, on aura la Courbe MDABm*m*BAd*M* que représente l'équation proposée $x^6 - 2bx^3yy - 2abx^4 + bby^4 - 2abbxy^2 + aabbxx = 0$. Fig. 101.

Mais si l'on fait attention à ce que les racines, $y - x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax} = 0$ qui représente la Branche ADM, & $y +$

PL. XIII. $y + x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax} = o$ qui exprime la Branche A d M, multipliées l'une par l'autre, font l'équation rationelle $yy - \frac{x^3}{b} - 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = o$; & qu'aussi les deux racines, $y - x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax} = o$ qui désigne la Branche ABm, & $y + x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax} = o$ qui marque la Branche ABm, multipliées l'une par l'autre, donnent l'équation rationelle $yy - \frac{x^3}{b} + 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = o$: on conclurra que MAM est une Courbe, dont $yy - \frac{x^3}{b} - 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = o$ est l'équation, & m BAB m une autre Courbe, qui a pour équation $yy - \frac{x^3}{b} + 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = o$, & que le produit $y^4 - \frac{2x^3yy}{b} + \frac{x^6}{bb} - \frac{2ax^4}{b} - 2axy^2 + a^2x^2 = o$ de ces deux équations, ou l'équation proposée $bby^4 - 2bx^3yy + x^6 - 2abx^4 - 2ab^2xyy + aabbx^2 = o$ représente le Systême de ces deux Courbes mAM, mBABM. CH. VIII. §. 142.

143. *CAS IV.* Enfin, lorsqu'une déterminatrice supérieure coupe également les deux Bandes extérieures du Triangle analytique & fait avec elles un triangle isoscele, elle est appliquée sur le plus haut Rang de l'équation. Les racines qu'elle peut donner sont ou $y = o$, ou $x = o$, ou $y = Ax$, soit $x = \frac{y}{A}$. On a parlé dans les §§. *précéd.* des Branches que désignent les racines $y = o$, $x = o$; il s'agit présentement de celles qu'indiquent les racines $y = Ax$. Leur derniére direction est oblique aux coordonnées,

CH. VIII. §. 143. données, & parallèle à la Droite repréſentée par cette éq: $y = Ax$. Et autant de racines de cette forme qu'a l'équation faite en égalant à zéro le plus haut Rang, autant y a-t-il de derniéres directions obliques; quoiqu'il ſe puiſſe très-bien faire que toutes ces Branches infinies, ou du moins quelques-unes, ſoient imaginaires. PL. XIV.

Pour s'aſſurer de l'exiſtence, de la nature, & de la poſition de ces Branches, dont l'équation du plus haut Rang a fait connoitre la derniére direction, il ſe préſente deux moyens *.

Le prémier conſiſte à transformer l'équation en ſorte que l'Axe des ordonnées conſervant ſa poſition, celui des abſciſſes ſoit parallèle à la derniére direction des Branches, qui eſt connuë. Alors l'équation eſt réduite à quelcun des trois Cas, qui ont été détaillés dans les §§. *préc.* & par les Remarques qui y ont été faites, on jugera de la nature de ces Branches infinies.

La maniére de faire cette transformation a été indiquée au §. 25. III°. Soit AB l'Axe des abſciſſes, AD celui des ordonnées, AC, ou Ac, la Droite parallèle à la derniére direction de quelques Branches infinies, repréſentée par l'éq: $y = Ax$, de ſorte que l'Abſciſſe AB [$= 1$] ait l'ordonnée BC ou Bc [$= A$] poſitive ou négative ſelon que le marque le ſigne d'A. Soient encore AP [x] & PM [y] les coordonnées dont la rélation eſt exprimée par l'équation propoſée. On la transforme en une autre qui exprime le raport des coordonnées AQ, ou Aq [z] & QM, ou qM [u], en ſubſtituant dans la propoſée pz pour x, & $qz + u$ pour y, où pz eſt AP, qz eſt PQ, ou Pq, & u eſt QM ou qM. Ainſi les nombres $1, p, q$, déſignent le raport des côtés QA, AP, PQ du triangle APQ, ou qA, AP, Pq du triangle APQ. Mais le Fig. 102.

* M. DE GUA, *Uſage de l'Anal.* pag. 160.

PL. XIV. le triang: APQ, ou APq est semblable à ABC, ou ABc. CH. VIII.
Donc le raport 1, p, q des côtés QA ou qA, AP, PQ §. 143.
ou Pq, est le même que celui des côtés CA ou cA, que nous nommerons E, AB qui est 1, & BC ou Bc qui est A. Ainsi $p = \frac{1}{E}$, & $q = \frac{A}{E}$. Après la transformation, on écrira donc $\frac{1}{E}$ pour p, & $\frac{A}{E}$ pour q; ou, ce qui sera plus simple, on laissera p pour marquer la fraction $\frac{1}{E}$, & au lieu de q on écrira $Ap [= A \times \frac{1}{E} = \frac{A}{E}]$.

La valeur de cette lettre $E [= \frac{1}{p}]$ dépend de la grandeur de l'angle DAb, ou ABC, que font entr'elles les coordonnées: & comme cet angle est donné, aussi bien que AB [1], & BC ou Bc [A]; AC ou Ac [E] est aussi donnée. Si G représente le Sinus du complement de cet angle ABC, ou ABc, le Sinus total étant 1, E sera $\sqrt{(1 \pm 2GA + AA)}$, où le signe + a lieu quand l'angle ABC est obtus, & le signe —, quand il est aigu. Car si on abaisse AI perpendiculairement sur CBc, l'angle BAI sera le complement de ABI ou ABC. Donc AB [1] étant le Sinus total, BI sera le Sinus G. Mais [EUCL. II. 12 & 13] $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2CBI$, & $Ac^2 = AB^2 + Bc^2 + 2cBI$, c'est-à-dire $EE = 1 + AA \pm 2GA$. Quand les angles ABC, ABc sont droits, alors $G = 0$, & $EE = 1 + AA$, ou $E = \sqrt{(1 + AA)}$.

L'autre moyen de connoître la nature & la position des Branches infinies d'une Courbe, dont la derniére direction est connuë par le prémier terme Ax, d'une Série qui donne y en x, c'est de chercher le second terme de cette Série, en substituant $Ax + u$ à y dans l'équation proposée. Ce moyen ne différe presque point du précédent. Dans

CH. VIII. §. 143. Dans l'une & dans l'autre transformée, u représente QM, ou qM, portion de l'ordonnée, comprise entre la Courbe & la Droite AC, ou Ac, parallèle à la derniére direction. Mais au lieu que la transformée précédente donnoit le raport de QM, ou qM, [u] à AQ, ou Aq, [z]; celle-ci donne le raport de QM, ou qM, [u] à AP [x]. Ce n'est donc pas proprement l'équation d'une Courbe, puisque QM, ou qM, n'est pas l'ordonnée de l'abscisse AP. Cependant ce terme u [QM ou qM] de la Série étant connu, il fait juger de la nature des Branches dont cette Série exprime l'ordonnée. Car si l'exposant d'x dans ce second terme est positif les Branches sont paraboliques & leur derniére direction est parallèle à AC ou Ac [§. 133]. S'il est négatif, les Branches sont hyperboliques, & leur Asymptote droite est AC ou Ac [§. 131]. S'il est zéro, les Branches sont encore hyperboliques; mais leur Asymptote droite est parallèle à AC ou Ac [§. 131]. Et pour avoir la situation des Branches par raport à cette Asymptote, il faut chercher encore un terme de la Série, dont l'exposant soit négatif. PL. XIV.

Exemple I. On propose l'éq: $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$. Sans la mettre sur le Tr: anal: on voit que son plus haut Rang égalé à zéro donne l'éq: $x^4 - x^2y^2 = 0$, qui a d'abord une racine double $x = 0$, par laquelle divisant deux fois l'équation, on a $x^2 - y^2 = 0$, qui se réduit à ces deux équations simples $y - x = 0$, & $y + x = 0$. Celles-ci comparées avec la formule $y - Ax = 0$, donnent $A = 1$, & $A = -1$. Ainsi donnant à l'abscisse AB [1] les ordonnées BC $= +1$, & Bc $= -1$, les Droites AC, Ac, & l'Axe des ordonnées AD sont les derniéres directions des Branches infinies que peut avoir la Courbe. Celles dont la derniére direction est AD se trouvent sans autre Calcul par la déterminatrice de l'équation mise sur Fig. 103.

le

PL. XIV. le Tr: anal:, qui passant par la Pointe & par la Case x^2y^2, donne l'éq: $-x^2y^2+a^4=0$. Car, puisqu'elle se résout en ces deux $xy+aa=0$, & $xy-aa=0$, CH. VIII. §. 143.

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \circ & * & \circ & * \\ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & \circ & \circ & \circ \\ & & & \circ & \circ \\ & & & & * \end{array}$$

on voit qu'elle indique pour l'Asymptote-courbe de ces Branches deux Hyperboles ordinaires, l'une positive, l'autre négative ; lesquelles par conséquent étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées. Et comme cette équation n'a point de racines multiples, on est assuré que la Courbe jette aussi une Branche dans chacun de ces quatre angles.

Quant aux Branches dont les derniéres directions sont AC & Ac, on en cherchera la nature, en prenant les abscisses sur ces Droites AC, Ac. Il faut donc substituer pz à x & $qz+u$ à y, dans l'équation proposée. Selon le §. 30, le calcul s'en fait ainsi,

$$\begin{array}{c} (p^4-ppqq)z^4 \quad +a^4 \\ 0 \qquad\quad 2 \qquad\quad 0 \\ \hline -2pppquz^3 \\ \frac{1}{2} \\ \hline -ppuuzz \end{array}$$

Après quoi, dans la transformée $(p^4-ppqq)z^4-2ppquz^3-ppuuzz+a^4=0$, on substituera Ap, c'est-à-dire $\pm p$ [puisque $A=\pm 1$] au lieu de q, & elle se convertit en $\mp 2p^3uz^3-ppuuzz+a^4=0$, où le terme z^4 a disparu, selon la Remarque du §. 107.

Cette

CH. VIII. §. 143. Cette équation exprime la nature de la Courbe rélativement aux axes AD, AC, si l'on donne au prémier terme le signe —, & rélativement aux axes AD, Ac, si l'on lui donne le signe +, parce que pour la Droite AC, A est $= + 1$, & $p = q$; & pour la Droite Ac, A est $= - 1$, & $p = - q$. Si on suppose que l'angle ABC est droit, alors AC & Ac sont chacune égale à $\sqrt{2} = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{(1+AA)}$, & $p = \frac{1}{E} = \frac{1}{AC \text{ ou } Ac} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; valeur qui substituée dans l'éq: $\mp 2p^3uz^3 - p^2u^2z^2 + a^4 = o$, la transforme en $\mp \frac{uz^3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}u^2z^2 + a^4 = o$. PL. XIV.

Il est aisé maintenant de connoitre par cette équation ce que sont les Branches infinies qui ont leurs derniéres directions parallèles à AC, Ac. Pour juger des prémiéres, on mettra sur le Tr: an: l'éq: $-2p^3uz^3 - p^2u^2z^2 + a^4 = o$, & on lui trouvera trois déterminatrices. L'une



qui passe par la Pointe & par la Case $uuzz$, exprime les Branches dont on a déja parlé, qui ont pour Asymptote l'Axe des ordonnées. L'autre qui passe aussi par la Pointe & par la Case uz^3 exprime des Branches hyperboliques qui ont pour Asymptote AC prise pour Axe des abscisses. L'éq: $-2p^3uz^3 + a^4 = o$, ou $u = \frac{a^4}{2p^3z^3}$, qu'elle fournit, indique deux Branches dans les angles DAC, dAK des coordonnées de même signe. Et comme elle n'a point de racines multiples, les Branches de la

PL. XIV. Courbe suivent celles de l'Asymptote-courbe dans ces CH. VIII. mêmes angles. §. 143.

La troisiéme déterminatrice traverse le plus haut rang & donne l'éq : $-2p^3uz^3 - p^2u^2z^2 = 0$, qui divisée par $p^2uz^2 = 0$ [dont les racines $u = 0$, & $z = 0$ marquent les Branches infinies qui ont leurs derniéres directions paralléles à l'Axe des abscisses AC, & à celui des ordonnées AD] se réduit à $u = -2pz$. Elle exprime donc des Branches infinies dont la derniére direction se détermine en donnant à l'abscisse 1 une ordonnée $-2p$; ou, ce qui est la même chose, en donnant à l'abscisse $\frac{1}{p}$ [$= E =$ AC] une ordonnée -2 [$=$ Cc], & menant la Droite Ac. Ces Branches sont donc justement celles qu'indiquoit la seconde racine $y + x = 0$, du prémier rang de la proposée, & qu'il s'agit maintenant d'examiner.

L'équation de la Courbe relative aux Axes AD, Ac, étoit $+2p^3uz^3 - p^2u^2z^2 + a^4 = 0$. Si on la met sur le Tr: anal : elle y occupera les mêmes Cases que la précédente, & y aura les mêmes déterminatrices. Celle qui traverse le plus haut rang désigne les Branches dont la derniére direction est paralléle à AC. Celle qui passe par la Pointe & par la Case u^2z^2, indique les Branches dont l'Asymptote est l'axe AD des ordonnées. Et celle qui passe aussi par la Pointe & par la Case uz^3, marque des Branches hyperboliques, dont l'Asymptote droite est l'Axe des abscisses Ac. Pour l'Asymptote-courbe elle donne l'éq : $2p^3uz^3 + a^4 = 0$, ou $u = -\frac{a^4}{2p^3z^3}$, qui désigne deux Branches infinies qui se jettent dans les angles dAc, DAk des coordonnées de signes contraires.

La Courbe représentée par l'éq : $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$, a donc huit Branches hyperboliques, dont quatre ont pour Asymptote l'axe DAd des ordonnées, & les quatre autres les

CH. VIII. les Droites AC, Ac qui coupent en deux également les PL. XIV.
§. 143. quatre angles des coordonnées.

On trouvera la même chose par la Méthode des Séries. Des deux déterminatrices qu'a l'équation proposée sur le Triang: analyt: celle qui passe par la Pointe & par la Case x^2y^2 est supérieure quand le Triangle est couché sur la Bande sans y. Elle est donc propre à une Série qui donne x en y, & pour le prémier terme de cette Série, elle fournit l'éq: $-x^2y^2 + a^4 = 0$, ou $x = \pm \frac{aa}{y}$. Il est inutile d'aller plus loin; & l'on voit dans ce seul prémier terme quatre Branches qui accompagnent l'Axe des ordonnées, en se jettant dans les quatre angles des coordonnées. Les racines de l'éq: $-x^2y^2 + a^4 = 0$ étant simples, les termes suivants n'auront point de racines imaginaires, qui détruisent l'indication de ce prémier terme.

L'autre déterminatrice donnoit $x^4 - x^2y^2 = 0$, ou $y = \pm x$, qui représente les deux Droites AC, Ac. En substituant $\pm x + u$ à y, l'équation se transforme en $-x^2u^2 \mp 2x^3u + a^4 = 0$, qu'on placera sur le Triang: analyt: couché sur la Bande sans x; & l'on trouvera une déterminatrice utile, *AB*, qui donnera l'éq: $\mp 2ux^3 + a^4 = 0$, ou $u = \pm \frac{a^4}{2x^3}$. Et dès lors la Série est réguliére. Ses

```
                o
           A *  o
             *  o  o
          o  o  o  o
       o  o  o  o  * B
```

deux prémiers termes $\pm x \pm \frac{a^4}{2x^3}$ dénotent des Branches

PL. XIV. hyperboliques qui tombent au-delà de leurs Asymptotes CH. VIII. droites AC, Ac. §. 143.

Cela est conforme à ce qu'on a trouvé par l'autre Méthode, & à ce qu'on peut lire dans l'équation de la Courbe. D'abord, comme elle ne renferme que des puissances paires de x & de y, l'origine A est un Centre général [§. 75], & il suffit d'examiner la portion de la Courbe renfermée dans l'angle DAB des coordonnées positives. On réduira l'éq: $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$, à cette forme $yy = xx + \frac{a^4}{xx}$, ou $y = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$, expression qui fait voir que chaque abscisse x a son ordonnée y. Si on prend x infinie, xx sera infinie: Si on prend x infiniment petite, $\frac{a^4}{xx}$ sera infinie. Donc, & à l'abscisse infinie, & à l'abscisse infiniment petite, répond une ordonnée infinie. Puisque x infiniment petite donne y infinie, l'axe des ordonnées AD est une Asymptote de la Courbe. Et puisque $\sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$ diffère d'autant moins de $x [= \sqrt{xx}]$ que $\frac{a^2}{xx}$ est plus petite, ou que x est plus grande, PM $[= y = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}]$ diffère d'autant moins de PQ $[= AP = x]$ que x est plus grande, c'est-à-dire, que la Branche de Courbe aproche d'autant plus de la Droite AC qu'elle s'éloigne plus de l'Origine. Cette Branche est donc hyperbolique, & AC est son Asymptote droite. Et il en est de même dans les trois autres angles des coordonnées.

On verra très distinctement le cours de cette Courbe, en la décrivant par points au moyen de l'Hyperbole ordi-
Fig. 104. naire Ll*l* décrite entre les Asymptotes AB, AD. Car si de chaque point L, l, *l* de cette Hyperbole, on abaisse sur

CH. VIII. §. 143. fur AB, les perpendiculaires LK, lk, lk, & qu'on les prolonge en I, i, i, de forte que les Droites KI, ki, ki foient égales aux diftances AL, Al, Al des points L, l, l, à l'origine A; les points I, i, i feront à la Courbe dont l'équation eft $x^4 - xxyy + a^4 = 0$. L'abfciffe AK étant x, l'ordonnée KL de l'Hyperbole eft $\frac{aa}{x}$, & celle de la Courbe KI, ou AL, eft $\sqrt{(AK^2 + KL^2)} = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$. Donc $y = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$, ou $x^4 - xxyy + a^4 = 0$. Dans cette Conftruction, il eft aifé de voir que la très-petite abfciffe Ak, ayant dans l'Hyperbole une très-grande ordonnée kl, l'ordonnée ki [$=$ Al] de la Courbe eft encore un peu plus grande, puifqu'elle eft l'hypothenufe du triangle rectangle Akl, dont kl eft un côté. Ainfi AD eft l'Afymptote & de l'Hyperbole & de la Courbe. Et la très-grande abfciffe AK, ayant dans l'Hyperbole une très-petite ordonnée KL, aura dans la Courbe une ordonnée KI [$=$ AL hypothénufe du triangle rectangle AKL] un peu plus grande que AK, ou KE, qui eft égale à AK, puifque AE coupe en deux également l'angle DAB. Donc AE eft une autre Afymptote de la Courbe I i i. La Courbe complette a donc quatre portions, qui font huit Branches infinies autour de trois Afymptotes droites. PL. XIV.

Exemple II. L'équation d'une Courbe étant $4y^3 - 6xy^2 + 2x^3 + 2ay^2 + 4ax^2 - b^3 = 0$, celle de fon plus haut Rang eft $4y^3 - 6xy^2 + 2x^3 = 0$, qui fe réfout en ces deux-ci $yy - 2xy + xx = 0$, & $4y + 2x = 0$. La prémiére eft une racine double $y - x = 0$, & la feconde une racine fimple $y + \frac{1}{2}x = 0$. Les derniéres directions que défignent ces racines fe tracent en donnant à

PL. XIV. Fig. 105. à l'abscisse AB $=1$, les ordonnées BD $=1$, & BC $=-\frac{1}{2}$, & menant les Droites AD, AC. CH. VIII. §. 143.

Pour connoitre la nature de ces Branches, on substituera pz à x & $qz+u$ à y. La transformée est

$$\begin{array}{l} (4q^3 - 6pq^2 + 2p^3)z^3 + (2aq^2 + 4ap^2)z^2 - b^3 \\ \quad 3 \qquad\quad 2 \qquad\quad 0 \qquad\qquad\quad 2 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \\ \hline + (12q^2 - 12pq)uz^2 \quad + (4aq)uz \\ \qquad \tfrac{3}{2} \qquad\quad \tfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{2} \\ \hline + (12q - 6p)u^2z \qquad + (2a)uu \\ \qquad \tfrac{1}{3} \qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad 0 \\ \hline + (4)u^3 \end{array}$$

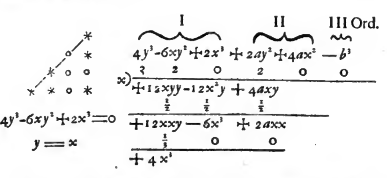
où il faut substituer $+q$ pour p, pour avoir l'équation de la Courbe relativement aux Axes AE, AD, puisque $q = Ap$, & que $y - x = 0$ comparé avec $y - Ax = 0$ donne $A = +1$. Cette substitution réduit la transformée à $6pu^2z + 4u^3 + 6ap^2z^2 + 4apuz + 2auu - b^3 = 0$, qu'on mettra sur le Tr: an: où sa déterminatrice utile AB

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ * & * & \circ & \circ & \\ & * & * & *B & \\ & & \circ & \circ & \\ & & & * & \end{array}$$

donne $6pu^2z + 6ap^2z^2 = 0$, ou $u = \pm\sqrt{-apz}$, qui est l'équation d'une Parabole HAh dont la derniére direction, parallèle à l'Axe des z, c'est-à-dire, à la droite AD, tend du côté négatif Ad. Et comme cette équation n'a point de racines multiples, il n'y a pas lieu de douter que les Branches de cette Parabole ne soient accompagnées des Branches de la Courbe.

Mais

CH. VIII. §. 143. Mais la Méthode des Séries rend cette Conclusion peut-être encore plus sensible. En voici tout le Calcul par la Méthode abregée du §. 106. PL. XIV.



Prémiére Transform. $4y^3 + 6xyy + 2ayy + 4axy + 6axx - b^3 = 0$

I II III IV Ord.

$6xy^2 + 6ax^2 + 4y^3 + 4axy + 2ay^2 + b^3$

2 0 3 1 2 0

$\pm\sqrt{-ax})$ $\pm 12xy\sqrt{-ax} \pm 12yy\sqrt{-ax} \pm 4ax\sqrt{-ax} \pm 4ay\sqrt{-ax}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

$6xy^2 + 6ax^2 = 0$ $\quad - 6axx \quad - 12axy \quad - 2aax$

$y = \pm\sqrt{-ax}$

0 $\frac{1}{3}$ 0

$\mp 4ax\sqrt{-ax}$

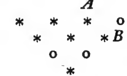
Seconde Transf. $6xy^2 \pm 12xy\sqrt{-ax} + 4y^3 \pm 12yy\sqrt{-ax} - 8axy + 2ay^2 \pm 4ay\sqrt{-ax} - 2aax + b^3 = 0$, qui étant mise sur le Triang: anal: donne l'éq: $\pm 12xy\sqrt{-ax} - 2a^2x = 0$, ou $y = \pm\frac{aa}{6\sqrt{-ax}}$. Ainsi les trois pré-

miers

Pl. XIV. miers termes de la Série ſont $x \pm \sqrt{-ax} \pm \frac{aa}{6\sqrt{-ax}}$ &c. Les deux prémiers re- Ch. VIII. §. 143.

préſentent les ordonnées de la Parabole HAh, & le troiſiéme fait voir que les Branches de la Courbe embraſſent celles de la Parabole, qui eſt leur Aſymptote-courbe.

Pour connoître les Branches dont la derniére direction eſt AC, on ſubſtituera dans la transformée $(4q^3 - 6pq^2 + 2p^3)z^3 + (12q^2 - 12pq)uzz + (12q - 6p)uuz + 4u^3 + (2aq^2 + 4ap^2)zz + 4aquz + 2auu - b^3 = 0$, calculée ci-deſſus, $-\frac{1}{2}p$ au lieu de q, puiſque $q = Ap$, & que $A = -\frac{1}{2}$, comme il paroît en comparant l'éq: $y - \frac{1}{2}x = 0$ avec l'éq: $y - Ax = 0$. Par là cette transformée eſt réduite à $9ppuzz - 12puuz + 4u^3 + 4\frac{1}{2}appzz - 2apuz + 2auu - b^3 = 0$, qu'on mettra ſur le Tr: anal: où elle a une déterminatrice AB parallèle à la Bande ſans



z, qui donne l'éq: $9ppuzz + 4\frac{1}{2}appzz = 0$, ou $u = -\frac{1}{2}a$. Elle déſigne donc [§. 139] des Branches hyperboliques dont l'Aſymptote-droite eſt l'abſciſſe FEf, de l'ordonnée AE $= -\frac{1}{2}a$.

Pour ſavoir la poſition de ces Branches autour de leur Aſymptote, on portera l'Origine d'A en E, en ſubſtituant $-\frac{1}{2}a + t$ à u.

L'équa-

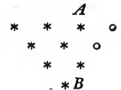
CH. VIII. §. 143. L'équation ordonnée par z PL. XIV.

$$
\begin{array}{l}
(9ppu + 4\tfrac{1}{2}app)zz + (-12puu - 2apu)z + 4u^3 + 2auu - b^3 \\
\quad 1 \qquad 0 \qquad\qquad 2 \qquad 1 \qquad\quad 3 \quad 2 \quad 0 \\
\hline
+(9pp)tzz \quad + (-24pu - 2ap)tz + (12uu + 4au)t \\
\quad 0 \qquad\qquad \tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad\qquad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \\
\hline
\qquad\qquad -12pttz \qquad\qquad + (12u + 2a)tt \\
\qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{3} \qquad 0 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4t^3
\end{array}
$$

$$u = -\tfrac{1}{2}a$$

$$
\begin{array}{l}
0 \quad -2a^2pz \quad -b^3 \\
+9p^2tz^2 + 10aptz + aat \\
\qquad -12pttz - 4att \\
\qquad\qquad +4t^3
\end{array}
$$

Cette Transformée mise sur le Triang: anal: a une déterminatrice utile AB qui donne $9pptz^2 - 2a^2pz = 0$, ou



$t = \frac{2aa}{9pz}$: ce qui marque que les deux Branches hyperboliques accompagnent leur Asymptote FEf dans les angles AEF, gEf des coordonnées de même signe.

On tire la même chose de la Méthode des Séries. Le prémier terme étant $-\tfrac{1}{2}x$, on calculera le second, &c. par l'abregé du §. 106.

Pl. XIV. Ch. VIII. §. 143.

I II III Ord.

$$4y^3-6xy^2+2x^3+2ay^2+4ax^2-b^3$$

$$4y^3-6xy^2+2x^3=0$$

$$y=-\tfrac{1}{2}x$$

$$-\tfrac{1}{2}x)\; -6xyy+6xxy-2axy \quad +3xxy-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{2}axx \quad -\tfrac{1}{2}x^3$$

Prémiére Transformée $4y^3-12xyy+9xxy+2ay^2-2axy+4\tfrac{1}{2}axx-b^3=0$.

I II III Ordre.

$$9xxy+4\tfrac{1}{2}axx-12xyy-2axy+4y^3+2ay^2-b^3$$

$$9xxy+4\tfrac{1}{2}axx=0$$

$$y=-\tfrac{1}{2}a$$

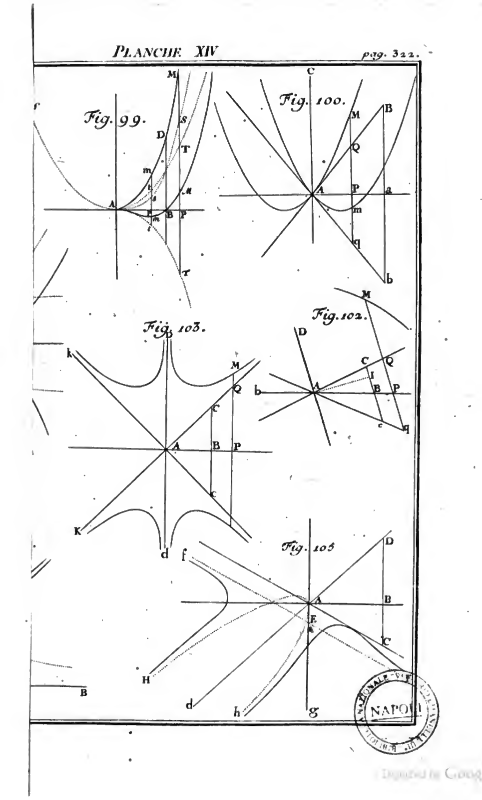
$$-\tfrac{1}{2}a)\; -4\tfrac{1}{2}axx+12axy+aax-6ayy-2aay \quad -3aax+3aay+\tfrac{1}{2}a^3 \quad -\tfrac{1}{2}a^3$$

Seconde Transformée, $9xxy-12xyy+10axy-2aax+4y^3-4ayy+aay-b^3=0$.

$$9xxy-2aax=0.$$

$$y=\frac{2aa}{9x}$$

La Série commence donc par ces trois termes $-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}a+\frac{2aa}{9x}$; dont les deux prémiers expriment l'ordonnée de l'Asymptote droite FEf, & le troisiéme marque que les Branches de la Courbe tombent, du côté négatif aussi bien


Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 105
NAPOLI

CH. VIII. §. 143. bien que du côté poſitif, entre l'Aſymptote droite & l'Axe des abſciſſes. PL. XV.

Exemple III. Soit $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$, l'équation d'une Courbe ; & $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 = 0$ ſera celle de ſon plus haut Rang, qui a deux racines doubles $y - x = 0$, & $y + x = 0$. En les comparant avec la formule $y - Ax = 0$, on a $A = + 1$, & $A = - 1$, ou $A = \pm 1$, & par conſéquent $q [= Ap] = \pm p$. Donc ici, comme dans l'*Ex. I*, on aura les dernières directions AC des Branches infinies, en donnant à l'abſciſſe AB $= 1$ les ordonnées BC $= + 1$, & Bc $= - 1$, & menant les Droites AC, Ac. Fig. 106. num. 1.

On tranſportera l'Axe des abſciſſes ſur ces Droites, en ſubſtituant pz à x & $qz + u$ à y.

$$(\underset{4}{q^4} - \underset{2}{2p^2q^2} + \underset{0}{p^4})z^4 + (\underset{2}{2apq^2} - \underset{1}{5ap^3})z^3$$

$$+ (\underset{\frac{3}{2}}{4q^3} - \underset{\frac{1}{2}}{4p^2q})uz^3 \quad + (\underset{\frac{1}{2}}{4apq})uz^2$$

$$+ (\underset{\frac{2}{3}}{6q^2} - \underset{0}{2p^2})u^2z^2 \quad + (\underset{0}{2ap})u^2z$$

$$+ (\underset{\frac{1}{4}}{4q})u^3z$$

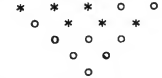
$$+ (1)u^4$$

Et mettant $\pm p$ pour q dans la transformée, elle ſera $4p^2u^2z^2 \pm 4pu^3z + u^4 - 3ap^3z^3 \pm 4ap^2uz^2 + 2apu^2z = 0$, où les ſignes ſupérieurs ſont pour l'Axe AC, & les inférieurs pour l'Axe Ac.

Cette équation miſe ſur le Tr : anal : a deux déterminatrices. Celle qui traverſe le plus haut Rang déſigne la

 dernié-

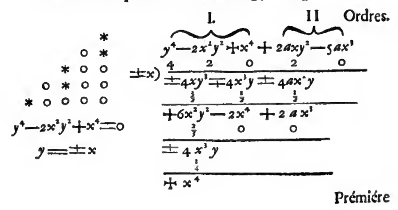
PL. XV. dernière direction des Branches infinies qui n'est parallèle, ni aux abscisses, ni aux ordonnées. CH. VIII. §. 143.



L'autre, qui passe par les Cases u^2z^2 & z^3, donne l'éq: $4p^2u^2z^2 - 3ap^3z^3 = 0$, ou $u^2 = \frac{3}{4}apz$, qui est à la Parabole ordinaire décrite, avec un Paramétre $= \frac{3}{4}ap$, sur les Axes AD, AC, ou AD, Ac, dans la situation à peu près où l'on voit les Paraboles EAe, FAf, qui sont les Paraboles-asymptotes de la Courbe cherchée. Et puisque la racine de l'éq: $4p^2u^2z^2 - 3ap^3z^3 = 0$ n'est pas multiple, chaque Branche AE, Ae, AF, Af de ces Paraboles est Asymptote d'une Branche de Courbe.

On trouvera la même chose par la Méthode des Séries. On a déja le prémier terme $\pm x$ des deux Séries descendantes qui donnent la valeur d'y en x: mais on cherchera encore le second, troisiéme & quatriéme terme, puisqu'il faut aller jusques-là pour avoir un exposant négatif.

Voici tout le procédé du Calcul [§. 106].



Prémiére

CH. VIII. Prémiére Transformée $y^4 \pm 4xy^3 + 4x^2y^2 + 2axy^2 \pm 4ax^2y - 3ax^3 = 0$. PL. XV.
§. 143.

o
. o *
* * o
* * o o
* o o o o

$$4x^2y^2 - 3ax^3 = 0$$
$$y = \pm\sqrt{\tfrac{3}{4}ax}$$

I, II, III Ordres.

$$\overbrace{4x^2y^2 - 3ax^3}^{I} \pm \overbrace{4xy^3 \pm 4ax^2y}^{II} + \overbrace{y^4 + 2axy^2}^{III}$$
$$\pm\sqrt{\tfrac{3}{4}ax})\quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2$$
$$\pm 8x^2y\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + 12xyy\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + 4ax^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} \pm 4y^3\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} \pm 4axy\sqrt{\tfrac{3}{4}ax}$$
$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{2} \quad 0 \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$
$$+3ax^3 \quad \pm 9ax^2y \quad + \tfrac{9}{2}axyy + \tfrac{3}{2}a^2x^2$$
$$0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad 0$$
$$+3ax^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} \quad \pm 3axy\sqrt{\tfrac{3}{4}ax}$$
$$0 \quad \tfrac{1}{4}$$
$$+\tfrac{9}{16}aaxx$$

Seconde Transf. $4x^2y^2 \pm 8x^2y\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} \pm 4xy^3 + 12xy^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} \pm 13ax^2y + 7ax^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + y^4 \pm 4y^3\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + \tfrac{13}{2}axy^2 \pm 7axy\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + \tfrac{33}{16}a^2x^2 = 0$.

o
o o
* *
* * * *
* * * o o
* * * o o o
* o o o o

$$\pm 8x^2y\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + 7ax^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} = 0$$
$$y = \mp\tfrac{7}{8}a$$

$$\overbrace{\mp 8x^2y\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} + 7ax^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax}}^{I} + \overbrace{4x^2y^2 \pm 13ax^2y + \tfrac{33}{16}ax^2}^{II} \; \&c.$$
$$\pm\tfrac{7}{8}a)\quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$
$$-7ax^2\sqrt{\tfrac{3}{4}ax} \quad \mp 7ax^2y - \tfrac{91}{8}a^2x^2$$
$$0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0$$
$$+\tfrac{49}{16}a^2x^2$$

Troisié-

PL. XV. Troisiéme Transformée $\pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 4x^2y^2 \pm 6ax^2y - \frac{100}{16}a^2x^2$ &c. CH. VIII. §. 143.

On voit que dans cette troisiéme opération, qui doit être la derniére, puisqu'elle donnera à x un exposant négatif, l'on a supprimé une bonne partie du Calcul, qui ne seroit pas nécessaire. Car la déterminatrice, partant de la Case $x^{2+1:2}y$, portera sur la Case x^2, à moins qu'elle ne soit vuide. Il ne s'agit donc que de savoir si cette Case est pleine, & quel est le terme qui y loge. Or pour cela il suffit de calculer le second ordre, & on trouve que la Case x^2 contient le terme $-\frac{100}{16}a^2x^2$. On aura donc $\pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} - \frac{100}{16}a^2x^2 = 0$, ou $y = \pm \frac{100aa}{64\sqrt{3ax}}$, pour le quatriéme terme de la Série.

Les trois prémiers $\pm x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} \mp \frac{7}{8}a$, expriment l'ordonnée d'une Asymptote-courbe, qui se construit ainsi. Fig. 106. num. 2. Par les extrémités de l'abscisse $AI = \frac{7}{8}a$, & des ordonnées AG, Ag, de même grandeur, qu'on méne les Droites GIH, gIh. Qu'on décrive, avec un Paramétre égal à $\frac{3}{4}a \times \frac{AI}{GI} = \frac{21aa}{32GI}$, une Parabole ordinaire OGN, sur les Axes GA, GH, avec une derniére direction parallèle à GH. Qu'on décrive aussi, avec un Paramétre égal à $-\frac{21aa}{32gI}$, une Parabole ogn, sur les Axes gA, gh, sa derniére direction étant parallèle à gh. Je dis que ces deux Paraboles sont celles que représentent les éq: $v = x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} - \frac{7}{8}a$, & $v = -x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} + \frac{7}{8}a$. Car si on nomme GH, z, & HO, ou HN, u, l'équation de la Parabole OGN, rélativement aux coordonnées GH, & HO ou HN, est $uu = \frac{21aaz}{32GI}$. Mais, nommant AP, x, & PO

CH.VIII. § 143. PO ou PN, v, on aura AP [x] : GH [z] $=$ AI [$\frac{7}{8}a$] : GI. Donc $z = \frac{x.GI}{\frac{7}{8}a}$; ce qui étant substitué dans l'éq: PL. XV.

$uu = \frac{21aaz}{32GI}$, la transforme en $uu = \frac{3}{4}ax$, ou $u = \pm\sqrt{\frac{3}{4}ax}$. De plus PO, ou PN, [$v$] $=$ PH [ou PI, soit AP $-$ AI, c'est-à-dire $x - \frac{7}{8}a$] $+$ HO, ou $-$ HN [$\pm\sqrt{\frac{3}{4}ax}$]. Donc l'équation de la Parabole OGN, rélativement aux coordonnées AP, & PO ou PN, est $v = x \pm \sqrt{\frac{3}{4}ax} - \frac{7}{8}a$. Et de même $v = -x \pm \sqrt{\frac{3}{4}ax} + \frac{7}{8}a$ est l'équation de la Parabole ogn rélativement aux coordonnées AP & Po ou Pn.

Les Paraboles OGN, ogn sont donc les Asymptotes-curvilignes de la Courbe proposée : & le quatriéme terme de la Série, $\pm\frac{100aa}{64\sqrt{3ax}}$, fait voir que les Branches de la Courbe tombent, par raport à l'Axe des abscisses, au-delà des Branches GO, go, & en-deçà des Branches GN, gn, comme on le voit dans la *Fig.* 106. *n°.* 2, qui représente le cours de cette Ligne.

Exemple IV. Par le seul changement d'un signe, l'équation de l'Exemple précédent est changée en celle-ci, $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^4 = 0$ †. Et l'équation du prémier rang $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 = 0$ a quatre racines, deux imaginaires $+x\sqrt{(1-\sqrt{2})}$, $-x\sqrt{(1-\sqrt{2})}$, & deux réelles $+x\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, $-x\sqrt{(1+\sqrt{2})}$. Comme elles nous menacent d'un Calcul assez long, nous n'appliquerons à cet Exemple que la Méthode des Séries, & nous employerons la lettre A pour désigner le nombre irrationel $\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$. Il s'agit donc de substituer $Ax + u$ à y dans la proposée.

$u^4 -$

† *Mem. de l'Acad.* 1731. pag. 30.

PL. XV. CH. VIII. §. 143.

$$\overbrace{u^4 - 2x^2u^2 - x^4}^{\text{I}} \quad + \overbrace{2axu^2 - 5ax^3}^{\text{II}} \quad \text{Ordres.}$$

	4	2	0	2	0
$Ax)$	$+4Axu^3$	$-4Ax^3u$		$+4Aax^2u$	
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
	$+6A^2x^2u^2$	$-2A^2x^4$		$+2A^2ax^3$	
	$\frac{2}{3}$	0		0	
	$+4A^3x^3u$				
	$\frac{1}{4}$				
	$+A^4x^4$				

La transformée eſt donc $u^4 + 4Axu^3 + (6AA-2)x^2u^2 + (4A^3 - 4A)x^3u + (A^4 - 2A^2 - 1)x^4 + 2axu^2 + 4Aax^2u + (2A^2 - 5)ax^3 = 0$, où l'on peut d'abord remarquer que le terme $(A^4 - 2A^2 - 1)x^4$ eſt nul, puiſque la déterminatrice aboutiſſoit à la Caſe x^4. Mais le terme contigu $(4A^3 - 4A)x^3u$ ne manque pas, puiſque la racine $y - Ax = 0$ eſt racine ſimple de l'équation $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 = 0$ que fournit cette déterminatrice. Ainſi mettant la transformée ſur le Tr: anal: couché ſur la Bande ſans x, on lui trouvera une déterminatrice parallèle à cette Bande, qui donne l'éq: $(4A^3 - 4A)x^3u + (2A^2 - 5)ax^3 = 0$, ou $u = -\frac{2AA-5}{4A^3-4A}a =$ [en mettant $\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$ pour A] $\pm\frac{3-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}.\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a = \pm\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$.

Ces deux prémiers termes de la Série $\pm x\sqrt{(1+\sqrt{2})} \pm \frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$, montrent que la Courbe a quatre

Branches

Ch. VIII. §. 143. Branches hyperboliques, & ils déterminent la position de leurs Asymptotes-droites. Le prémier terme fait voir que si on donne à l'abscisse $AB = 1$, les ordonnées $BC = +\sqrt{(1+\sqrt{2})}$ & $Bc = -\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, & qu'on méne les Droites AC, Ac, elles seront parallèles à la derniére direction des Branches infinies, & par conséquent à leur Asymptote. Et le second terme aprend que si l'on prend les ordonnées $AE = +\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$, & $Ae = -\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$ & qu'on méne les Droites EF, ef parallèles à AC, Ac, elles seront les Asymptotes cherchées. On peut aussi, & cela est plus simple, prendre l'abscisse négative $AG = \frac{7\sqrt{2}-10}{8}a$, & mener par le point G, les Droites GF, gf parallèles à AC, Ac. Car il est aisé de voir que les Droites EF, ef, se croisent au point G, éloigné de l'Origine A de la distance $\frac{7\sqrt{2}-10}{8}a$. Pl. XV. Fig. 107.

Si l'on veut aller plus loin & chercher la position de ces Branches hyperboliques autour de leurs Asymptotes droites, il faut calculer encore un terme de la Série. Soit $\mp\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$ nommé B. Il faut donc substituer $B + t$ à u dans la transformée, ou du moins dans les deux prémiers ordres de ses termes. Car en considérant cette équation sur le Triang: anal: on voit qu'il manquera dans

```
            o
          *  *
       *  *  o
    *  *  o  o
 *  o  o  o  o
```

la seconde transformée le terme x^3, & qu'ainsi la détermi-

PL. XV. natrice partant de la Case x^3y, portera sur la Case x^2, si elle est pleine. Il s'agit donc de voir si elle l'est, & quel terme la remplit. CH. VIII. §. 143.

I II Ordres.

$$\overbrace{(4A^3-4A)tx^3+(2A^2-5)ax^3}+\overbrace{(6AA-2)t^2x^2+4Aatx^2}\ \&c.$$

$$\begin{array}{llll} 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

$$B) \overline{+(4A^3-4A)Bx^3 \qquad +2(6AA-2)Btx^2+4ABax^2}$$

$$\begin{array}{lll} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$\overline{+(6AA-2)BBx^2}$$

On voit par ce Calcul, que la Case tx^3 loge le terme $(4A^3-4A)tx^3$, & la Case x^2 le terme $((6AA-2)BB+4ABa)x^2$. La déterminatrice, qui passe par ces deux Cases, donnera donc $t=-\frac{(6AA-2)BB+4ABa}{4A^3-4A}x^{-1}$

$=$ [puisque $B=\pm\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a=\pm\frac{3\sqrt{2}-4}{8A}a$]

$-\frac{(6AA-2)(3\sqrt{2}-4)^2a^2:64AA+4(3\sqrt{2}-4)aa:8}{(4AA-4)A}x^{-1}$

$=-\frac{(6\sqrt{2}+4)(34-24\sqrt{2})+\frac{1}{2}\sqrt{2}-2}{\pm 4\sqrt{2}\times\sqrt{(1+\sqrt{2})}}aax^{-1}=$

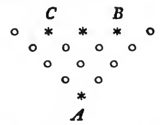
$\mp\frac{-154+109\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4\sqrt{2}.\sqrt{(1+\sqrt{2})}}aax^{-1}=\mp\frac{-154\sqrt{2}+219}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}aax^{-1}$.

Cette fraction étant positive, le signe $\mp$ qui la précéde montre que la Courbe tombe, de part & d'autre, entre l'Axe des abscisses AB & les Asymptotes droites EF, ef. Car si l'on nomme cette fraction C, la Série sera pour les Branches de l'Asymptote EF, $y=Ax+B-\frac{Caa}{x}$ &c.

& pour

CH. VIII. §. 143. & pour les Branches de l'Asymptote ef, $y = -Ax - B + \frac{Caa}{x}$, &c. PL. XV.

Exemple V. L'éq: $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - a^4 = 0$, mise sur le Triang: analyt: a trois déterminatrices AB,



AC, BC. Celles qui passent par la Pointe A indiquent des Branches qui ont les Axes pour Asymptotes. Elles sont aussi indiquées par les racines $y = 0$, $x = 0$, de l'équation du plus haut Rang. Les équations que donnent ces déterminatrices, $x^3y - a^4 = 0$, ou $y = \frac{a^4}{x^3}$, & $xy^3 - a^4 = 0$, ou $x = \frac{a^4}{y^3}$, font voir que les Branches infinies qu'elles désignent se jettent dans les angles des coordonnées de même signe, le long de l'un & de l'autre Axe.

La déterminatrice BC qui traverse le plus haut Rang, donne l'éq: $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = 0$, qui a, outre les racines $x = 0$, $y = 0$, dont on vient de parler, une racine double $y - x = 0$, qui nous aprend que la Courbe a encore des Branches infinies, dont la derniére direction AD coupe en deux également les angles BAC, bAc des coordonnées. Mais pour connoitre la nature de ces Branches, on cherchera encore un terme de la Série en Fig. 108.

 substi-

PL. XV. substituant $u + x$ à y dans l'équation proposée, ce qui la transforme en $xu^3 + x^2u^2 - a^4 = 0$, qui étant mise sur le Triang: anal: a une déterminatrice utile DE, qui don- CH. VIII. §. 143.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & o \\ & & & o & o \\ & & E* & o & o \\ & * & o & o & o \\ * & o & o & o & *D \end{array}$$

ne $x^2u^2 - a^4 = 0$, ou $u = \pm \frac{a^2}{x}$. Ce second terme de la Série $y = x \pm \frac{a^2}{x}$ *&c.* marque deux Branches qui accompagnent de part & d'autre les deux parties AD, Ad, de la Droite DAd, qui est la derniére direction & l'Asymptote droite de ces Branches.

Ainsi la Courbe a huit Branches hyperboliques autour de trois Asymptotes BAb, CAc, DAd, qui se croisent au Point A, semblable en cela à la Courbe de l'*Exemple I.* En effet, c'est la même Courbe dans une position différente. Car si l'on prend AD pour l'Axe des ordonnées, & la perpendiculaire AE pour celui des abscisses, on aura [à cause des angles demi-droits QAS, QMR] AP [x] = PS — AS = QR [$\frac{u}{\sqrt{2}}$] — AS [$\frac{z}{\sqrt{2}}$], & PM [y] = PR + RM = QS [$\frac{z}{\sqrt{2}}$] + RM [$\frac{u}{\sqrt{2}}$]. Et ces valeurs de x & de y, substituées dans l'équation de la Courbe $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - a^4 = 0$, la transforment en $uuzz - z^4 - a^4 = 0$, ou $z^4 - uuzz + a^4 = 0$, qui est l'équation de la Courbe examinée dans l'*Exemple I.*

Exem-

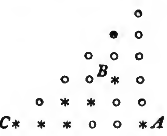
CH. VIII. §. 143. *Exemple VI.* Soit enfin l'éq: $y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + x^5 - 2ay^4 - 4axy^3 + 4ax^3y + 2ax^4 + aay^3 - aaxy^2 - aax^2y + aax^3 - aab^3 = 0$. Cet Exemple est assez composé, & par là propre à faire connoitre comment il faut s'y prendre pour éviter tout le Calcul superflu. PL. XV.

Le plus haut Rang, sur lequel est appliquée la seule déterminatrice supérieure qu'ait l'équation proposée, est précisément la cinquiéme puissance $y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + y^5$ de $y + x$. Ce Rang égalé à zéro n'a donc qu'une seule racine, mais quintuple, $y + x = 0$, ou $y = -x$; ce qui marque que la derniére direction des Branches infinies de la Courbe est parallèle à la Droite BAC qui coupe en deux également l'angle des coordonnées de différents signes. Cette même équation marque que le prémier terme de la Série descendante qui donne y en x, est $-x$. Pour avoir le second, on substituera $-x + u$ à y. Fig. 109. num. 1.

Ord.	I.	II	III	IV.
	$y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + x^5$	$-2ay^4 - 4axy^3 + 4ax^3y + 2ax^4$	$+a^2y^3 + a^2xy^2 - a^2x^2y + a^2x^3$	$-a^2b^3$
	5. 4. 3. 2. 1. 0	4. 3. 1. 0	3. 2. 1. 0	0
$-x)$	$-5xy^4 - 20x^2y^3 - 30x^3y^2 - 20x^4y - 5x^5$	$+8axy^3 + 12ax^2y^2 - 4ax^4$	$-3a^2xy^2 + 2a^2x^2y + a^2x^3$	
	$\frac{4}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0	$\frac{3}{2}$ $\frac{2}{2}$ 0	$\frac{2}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0	
	$+10x^2y^3 + 30x^3y^2 + 30x^4y + 10x^5$	$-12ax^2y^2 - 12ax^3y$	$+3a^2x^2y - a^2x^3$	
	$\frac{3}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0	
	$-10x^3y^2 - 20x^4y - 10x^5$	$+8ax^3y + 4ax^4$	$-a^2x^3$	
	$\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0	$\frac{1}{4}$ 0	0	
	$+5x^4y - 5x^5$	$-2ax^4$		
	$\frac{1}{5}$ 0	0		
	$-x^5$			

 Et

PL. XV. Et la prémiére transformée sera $y^5 - 2ay^4 + 4axy^3 + a^2y^3 - 4a^2xy^2 + 4a^2x^2y - a^2b^3 = 0$. En la mettant sur le Tr: analyt: couché sur la Bande sans x, on lui trouve deux déterminatrices supérieures AB, BC. CH. VIII. §. 143.



L'une AB, qui porte sur les plus hautes Cases des deux prémiéres colomnes, donne $4a^2x^2y - a^2b^3 = 0$, ou $y = \frac{b^3}{4x^2}$. Il n'est pas besoin de continuer plus loin la Série $y = -x + \frac{b^3}{x^2}$ &c. parce que dès le second terme elle est réguliére. Elle indique deux Branches hyperboliques, qui accompagnent, dans les angles des ordonnées positives, leur Asymptote droite B A C.

L'autre déterminatrice BC donne $y^5 + 4axy^3 + 4a^2x^2y = 0$, ou, divisant par y, $y^4 + 4axy^2 + 4a^2x^2 = 0$, dont la racine quarrée $yy + 2ax = 0$, se résout en ces deux-ci, $y = +\sqrt{-2ax}$, $y = -\sqrt{-2ax}$, qui sont imaginaires, quand on prend x positive. Et comme l'une & l'autre est racine double de l'éq: $y^4 + 4axy^2 + 4a^2x^2 = 0$, on ne doit encore rien affirmer des termes suivans; mais on continuera le Calcul en substituant $\pm\sqrt{-2ax} + y$ à y dans la prémiére transformée.

$y^5 -$

Ord.	I			II		III	IV
	y^5	$+ 4axy^3$	$+ 4a^2x^2y$	$- 2ay^4$	$- 4a^2xy^2$	$+ a^2y^3$	$- a^2b^3$
	5.	3.	1	4.	2	3	o
$\pm\sqrt{-2ax})$							
	$\pm 5y^4\sqrt{-2ax}$	$\pm 12axy^2\sqrt{-2ax}$	$\pm 4a^2x^2\sqrt{-2ax}$	$\mp 8ay^3\sqrt{-2ax}$	$\mp 8a^2xy\sqrt{-2ax}$	$\pm 3a^2y^2\sqrt{-2ax}$	
	$\frac{4}{2}$	$\frac{2}{2}$	o	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	
	$- 20axy^3$	$- 24a^2x^2y$		$+ 24a^2xy^2$	$+ 8a^3x^2$	$- 6a^3xy$	
	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	o	$\frac{1}{3}$	
	$\mp 20axy^2\sqrt{-2ax}$	$\mp 8a^2x^2\sqrt{-2ax}$		$\pm 16a^2xy\sqrt{-2ax}$		$\mp 2a^3x\sqrt{-2ax}$	
	$\frac{2}{4}$	o		$\frac{1}{4}$		o	
	$+ 20a^2x^2y$			$- 8a^3x^2$			
	$\frac{1}{5}$			o			
	$\pm 4a^2x^2\sqrt{-2ax}$						

Ainſi la ſeconde Transformée eſt $y^5 \pm 5y^4\sqrt{-2ax} - 16axy^3 \mp 8axy^2\sqrt{-2ax} - 2ay^4 \mp 8ay^3\sqrt{-2ax} + 20a^2xy^2 \pm 8a^2xy\sqrt{-2ax} + a^2y^3 \pm 3a^2y^2\sqrt{-2ax} - 6a^3xy \pm 2a^3x\sqrt{-2ax} - a^2b^3 = 0$. Sur le Triang: anal: elle n'a qu'une déterminatrice utile, ſavoir celle qui eſt horizontale, & qui donne $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} \pm 8a^2xy\sqrt{-2ax} \mp 2a^3x\sqrt{-2ax} = 0$, ou, diviſant par $\mp 8ax\sqrt{-2ax}$, $yy - ay + \frac{1}{4}aa = 0$ qui a une ſeule racine, mais double, $y - \frac{1}{2}a = 0$.

```
                  o
               o  o
            o  o  o
         o  o  o  o
            *  *  *
      o  *  *  *  o
      *  *  *
   *  *  *  o  o  *
```

Elle

PL. XV. Elle marque que $+\frac{1}{2}a$ est un troisiéme terme commun aux deux Séries, qui commencent par $-x \pm\sqrt{-2ax}$. Mais cette racine $y-\frac{1}{2}a=0$ étant double, elle oblige à calculer encore le terme suivant, d'autant mieux que, dans celui-ci, l'exposant d'x n'est pas encore négatif. Et comme il y a lieu de présumer qu'il suffira de trouver encore un seul terme, on cherchera à s'épargner du calcul en substituant $\frac{1}{2}a+y$ à y, seulement dans les termes des deux prémiers ordres. CH. VIII. § 143.

$$\overbrace{\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} \pm 8a^2xy\sqrt{-2ax} \mp 2a^2x\sqrt{-2ax}}^{\text{I}} \overbrace{-16axy^3 + 20a^2xy^2 - 6a^3xy}^{\text{II}}, \&c. \quad \text{Ordre.}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$\frac{1}{2}a)$

$$\mp 8aaxy\sqrt{-2ax} \pm 4a^3x\sqrt{-2ax} \qquad -24aaxy^2 + 20a^3xy - 3a^4x$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

$$\pm 2a\,x\sqrt{-2ax} \qquad -12a\,xy + 5a^4x$$

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

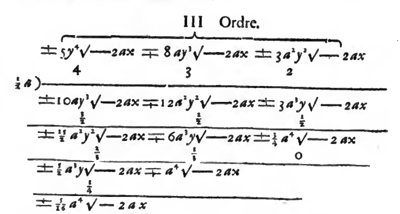
$$-2a^4x$$

Le prémier ordre se réduit au seul terme $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax}$, & le second à $-16axy^3 - 4a^2xy^2 + 2a^3xy$. Et ces termes étant mis sur le Triang: analyt: on voit que la dé-

```
                o
              o   o
            o   o   o
          o   o   o   o
              A*
        o   *   *   *B o
      ●   ●   ●   ●   ●   ●
```

terminatrice AB passe par les Cases $x^{3:2}yy$ & xy, & qu'étant

CH.VIII. §. 143. tant continuée elle traverse la Case $x^{1:2}$. Il faut donc examiner si cette Case est pleine ou vuide. Ce sont les termes du troisiéme ordre qui doivent la remplir. On substituera donc $\frac{1}{2}a + y$ à y dans les termes du troisiéme ordre de la seconde transformée. PL.XV.



Ils se réduisent à $\pm 5y^4\sqrt{-2ax} \pm 2ay^3\sqrt{-2ax} \mp \frac{3}{2}a^2y^2\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} \pm \frac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax}$. Ce dernier terme, ayant sa place dans la Case $x^{1:2}$, se trouve sur la déterminatrice, qui donnera l'équation $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} + 2a^3xy \pm \frac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} = 0$, ou, divisant par $\mp 8ax\sqrt{-2ax}$, $yy \mp \frac{2a^2}{8\sqrt{-2ax}}y - \frac{a^3}{128x} = 0$, dont la racine quarrée est $y \mp \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} = 0$. Les deux Séries, que nous suivons, ont donc pour leur quatriéme terme, l'une $+\frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}$, l'autre $-\frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}$.

Quoique dans ce terme l'exposant d'x soit négatif; cependant, comme il est racine double de l'équation qui le donne,

PL. XV. donne, il eſt néceſſaire de continuer le Calcul, en ſubſti- CH. VIII. §. 143.
tuant $\pm \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} + y$ à y dans la troiſiéme transformée. Mais pour cela il faut l'avoir complette; & jusqu'ici nous n'avons que les termes qui ont réſulté de ceux des trois prémiers ordres. Il faut donc achever la transformation en ſubſtituant $\frac{1}{2}a + y$ à y dans le quatriéme ordre:

IV Ordre.

$$\begin{array}{l} + \overbrace{y^5 \quad - 2ay^4 \quad + a^2y^3 \quad - a^2b^3} \\ \quad\; 5 \qquad\quad 4 \qquad\quad 3 \qquad\quad 0 \\ \hline \frac{1}{2}a) \\ + \frac{5}{2}ay^4 - 4a^2y^3 + \frac{3}{2}a^3y^2 \\ \quad \frac{4}{2} \qquad\quad \frac{3}{2} \qquad\quad \frac{2}{2} \\ \hline + \frac{5}{2}a^2y^3 - 3a^3y^2 + \frac{3}{4}a^4y \\ \quad \frac{3}{3} \qquad\quad \frac{2}{3} \qquad\quad \frac{1}{3} \\ \hline + \frac{5}{4}a^3y^2 - a^4y + \frac{1}{8}a^5 \\ \quad \frac{2}{4} \qquad\quad \frac{1}{4} \qquad\quad 0 \\ \hline + \frac{5}{16}a^4y - \frac{1}{8}a^5 \\ \quad \frac{1}{5} \qquad\quad 0 \\ \hline + \frac{1}{32}a^5 \end{array}$$

Et il en réſulte $y^5 + \frac{1}{2}ay^4 - \frac{1}{2}a^2y^3 - \frac{1}{4}a^3y^2 + \frac{1}{16}a^4y + \frac{1}{32}a^5 - a^2b^3$.

Réuniſſant les réſultats de ces différents ordres, la troiſiéme transformée complette eſt $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} - 16axy^3 - 4a^2xy^2 + 2a^3xy \pm 5y^4\sqrt{-2ax} \pm 2ay^3\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{2}a^2y^2\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} \pm \frac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} + y^5 + \frac{1}{2}ay^4 - \frac{1}{2}a^2y^3 - \frac{1}{4}a^3y^2 + \frac{1}{16}a^4y + \frac{1}{32}a^5 - a^2b^3 = 0$. Cette transformée miſe ſur le Triang: anal: a, rélativement à la déterminatrice CD qui paſſoit par les Caſes $x^{3\cdot 2}yy$, xy, &

CH. VIII. §. 143. & $x^{1:2}$ & qui a donné l'éq: $y = \pm \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}$, sept ordres de termes. PL. XV.

```
                          o
                     o    o
                o    o    o
           o    o    o    o
               C*
      o    *    *    *    o
      *    *    *    *    *D
 *    *    *    *    *    *
```

Il est probable qu'il ne sera pas besoin d'aller au-delà du terme que nous cherchons; c'est le cinquiéme de la Série. Ainsi nous commencerons par substituer $\pm \frac{aa}{8\sqrt{-2ax}} + y$ à y dans les deux prémiers Ordres.

$$\begin{array}{l}
\overbrace{\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} + 2a^3xy \pm \tfrac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax}}^{\text{I}} \quad \overbrace{-4a^2xy^2 \mp \tfrac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} + \tfrac{1}{32}a^5}^{\text{II}} - a^2b^3 \ \&c. \quad \text{Ordre.} \\
\qquad 2 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0 \qquad 0 \\
\pm\frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}) \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\quad -2a^3xy \qquad \mp \tfrac{1}{8}a^4\sqrt{-2ax} \qquad\qquad \pm \tfrac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} - \tfrac{1}{16}a^5 \\
\qquad \tfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{2} \\
\hline
\pm \tfrac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{32}a^5
\end{array}$$

Les termes du prémier ordre se réduisent à $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax}$, & ceux du second à $-4a^2xy^2 - a^2b^3$. Donc la déterminatrice passera par la Case $x^{1:2}y^2$, & par la Pointe, & donnera l'éq: $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} - a^2b^3 = 0$, ou $y^2 = \mp \frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}$. Le signe $-$ a lieu pour la prémiére, & le

PL. XV. le signe $+$ pour la seconde des deux Séries que nous cal- CH. VIII. §. 143.
culons. Donc pour la prémiére $y = \pm\sqrt{-\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$,
& pour la seconde $y = \pm\sqrt{\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$, grandeur imaginaire. Car si on prend x positive, $\sqrt{-2ax}$ est imaginaire, & si on prend x négative, $\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}$ est négative, & sa racine est imaginaire. Ainsi la seconde de nos deux Séries a son cinquiéme terme imaginaire, & elle-même l'est entiérement. Mais la prémiére, qui ne l'est qu'à demi, se fourche en deux $y = -x + \sqrt{-2ax} + \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} + \sqrt{-\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$ &c. & $y = -x + \sqrt{-2ax} + \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} - \sqrt{-\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$ &c.

Ces deux Séries, avec la prémiére $y = -x + \frac{b^3}{4xx}$ &c. font voir que la Courbe a quatre Branches infinies, dont Fig. 109. num. 1. deux DB, EC sont hyperboliques, & ont pour Asymptote la Droite BAC dont l'ordonnée est le prémier terme $-x$ de la prémiére Série. Les deux autres EF, HG sont paraboliques, & ont pour Asymptote-curviligne la Courbe IKL, à l'abscisse x de laquelle répond l'ordonnée que représentent ces quatre termes, $-x + \sqrt{-2ax} + \frac{1}{2}a + \frac{aa}{8\sqrt{-2ax}}$.

On verra plus clairement la position des Branches de cette Courbe, en la raportant à deux autres Axes, dont l'un est l'Asymptote droite CAB & l'autre sa perpendiculaire AN. Alors le point M de la Courbe, au lieu des coordonnées AP [x] & PM [y], aura les coordonnées AQ [z] & QM [u], dont les raports s'expriment par les équat:

CH. VIII. §. 143. équat : $x = \frac{z - u}{\sqrt{2}}$, & $y = \frac{z + u}{\sqrt{2}}$; valeurs qui substituées dans l'éq : $y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + x^5 - 2ay^4 - 4axy^3 + 4ax^3y + 2ax^4 + aay^3 - aaxy^2 - aax^2y + aax^3 - aab^3 = 0$, ou $(y+x)^5 - 2a(y-x)(y+x)^3 + aa(y+x)(y-x)^2 - a^2b^3 = 0$, la changent en $(\frac{2z}{\sqrt{2}})^5 - 2a(\frac{2u}{\sqrt{2}})(\frac{2z}{\sqrt{2}})^3 + aa(\frac{2z}{\sqrt{2}})(\frac{2u}{\sqrt{2}})^2 - a^2b^3 = 0$, ou $4z^5\sqrt{2} - 8azu^3 + 2aazuu\sqrt{2} - a^2b^3 = 0$, ou encore, faisant $\frac{a}{\sqrt{2}} = c$ & $\frac{b}{\sqrt{2}} = d$, en $z^5 - 2cz^3u + cczuu - ccd^3 = 0$. Cette équation se réduit à $z^4 - 2czzu + ccuu = \frac{ccd^3}{z}$ ou $zz - cu = \pm cd\sqrt{\frac{d}{z}}$, soit $u = \frac{zz}{c} \mp d\sqrt{\frac{d}{z}}$, qui se construit ainsi. PL. XV.

Sur les Axes AB, AC on décrira la Parabole DAd, dont le Paramétre est c, de sorte que l'abscisse AP [z] a l'ordonnée $PO = \frac{zz}{c}$. On décrira aussi l'Hyperbole CNB, cnB, dont l'ordonnée PN, ou Pn, est $\pm d\sqrt{\frac{d}{z}}$. Alors donnant à chaque abscisse AP deux ordonnées PM, Pm égales, l'une à la somme On, l'autre à la différence ON des ordonnées de l'Hyperbole & de la Parabole, on aura la Courbe cherchée CMDmc. Car son ordonnée [u] est égale à $\frac{zz}{c} \pm d\sqrt{\frac{d}{z}}$, & par conséquent son équation est $z^5 - 2cz^3u + cczuu - ccd^3 = 0$. Mais en la raportant aux Axes EAe, FAf, qui coupent également les quatre angles que font entr'eux les Axes CAc, BAb, son équation sera justement celle qui a été proposée dans cet Fig. 167. num. 2.

 Exemple.

PL.XV. *Exemple.* Dans cette conſtruction il eſt aiſé de reconnoitre que la Courbe a des Branches hyperboliques MC, mc, dont CAc eſt l'Aſymptote, & des Branches paraboliques MD, mD, dont l'Aſymptote eſt la Branche AOD de la Parabole dAD: On le reconnoit, dis-je, aiſément, en conſidérant que près de l'Origine, les ordonnées de l'Hyperbole CNBnc l'emportent de beaucoup ſur les ordonnées de la Parabole dAD, & que loin de l'Origine, c'eſt tout le contraire. CH.VIII. §. 143.

144. Nous finirons ce Chapitre par quelques conſidérations générales ſur les Branches infinies des Courbes & ſur les Aſymptotes droites.

I. Les Branches infinies d'une Courbe ſont toûjours en nombre pair *.

L'ordonnée d'une Branche infinie de Courbe s'exprime par une Série deſcendante $Ax^h + Bx^i + Cx^k$ *&c.* qui eſt ou entiérement imaginaire, ou demi-imaginaire, ou réelle [§. 95]. Lorſqu'elle eſt entiérement imaginaire, la Branche, dont cette Série devroit marquer l'ordonnée, eſt imaginaire. Cette Série eſt réelle, lorſque tous les expoſants h, i, k, *&c.* ſont des nombres entiers, poſitifs ou négatifs, ou des nombres rompus dont le dénominateur eſt un nombre impair. Alors la grandeur qu'exprime cette Série eſt réelle, ſoit qu'on prenne x poſitive, ſoit qu'on la prenne négative. Ainſi cette Série repréſente deux Branches infinies, une du côté des abſciſſes poſitives, une du côté des négatives.

Enfin, la Série eſt demi-imaginaire lorſqu'un, ou pluſieurs, des expoſants h, i, k, *&c.* eſt une fraction d'un dénominateur pair, & d'un numerateur impair. Dans ce

* Stirling, *Lin. tert. Ord.* Newton. Prop. I. Cor. 3. Mr. De Gua, *Uſage de l'Anal.* pag. 47.

CH. VIII. §. 144. ce cas, la Série n'eſt réelle que quand on prend x poſitive, ou quand on la prend négative. La Branche indiquée par cette Série ne s'étend que du côté des abſciſſes poſitives, ou du côté des négatives. Mais en échange, lors qu'on donne à x le ſigne qui rend réels les termes demi-imaginaires, ces termes ont deux valeurs, une poſitive & une négative, parce qu'une racine paire a également le ſigne $+$ & le ſigne $-$. Ainſi la Série eſt double, & exprime deux ordonnées. Il y a donc deux Branches infinies qui répondent à cette Série, & qui ſont ſituées, non pas de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais toutes deux d'un même côté. Donc, dans tous les Cas, le nombre des Branches d'une Courbe eſt un nombre pair. PL. XV.

145. II. Toute Ligne algébrique d'un Ordre impair a, au moins, deux Branches infinies *.

Parce que dans toute équation d'un Ordre impair, l'une ou l'autre des coordonnées a ſon plus haut expoſant impair. Prenons que ce ſoit l'ordonnée. Donc en la regardant comme l'inconnuë, quelque valeur qu'on prenne pour l'abſciſſe, l'ordonnée aura toûjours une valeur réelle, puiſqu'une équation d'un dégré impair ne peut avoir toutes ſes racines imaginaires. Ainſi toutes les abſciſſes, tant poſitives que négatives à l'infini, ont au moins une ordonnée réelle. La Courbe a donc au moins deux Branches infinies, une d'un côté, l'autre de l'autre, de l'Axe des ordonnées.

146. III. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans le double de l'expoſant de ſon Ordre.

Car

* STIRLING, *Lin. tert. Ord.* Newt. Pr. VI. Cor. 5.
Mr. NICOLE, *Mem. de l'Ac.* 1729. p. 198.

PL.XV. Car en prenant les ordonnées de façon que leur Axe ne soit parallèle à la derniére direction d'aucune des Branches infinies de la Courbe, toutes ces Branches s'éloigneront à l'infini de cet Axe. Donc leurs ordonnées seront représentées par des Séries descendantes, qui donnent la valeur d'y en x. Or l'équation ne peut fournir plus de pareilles Séries qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance d'y : parce que ces Séries sont les racines de l'équation, où l'on regarde y comme l'inconnuë, & qu'une équation ne peut avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans le plus haut exposant de son inconnuë. Et l'exposant de la variable y ne peut jamais surpasser l'exposant de l'Ordre de la Courbe. Donc on ne sauroit avoir plus de Séries qui donnent y en x, qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de l'Ordre de la Courbe. Mais chaque pareille Série ne peut indiquer, au plus, que deux Branches infinies, & pour cela il faut qu'elle soit réelle. Donc, une Courbe ne peut avoir, au plus, que deux fois autant de Branches infinies qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'Ordre de cette Courbe. CH.VIII. §. 146.

147. IV. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Asymptotes droites qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son Ordre *.

Cette Proposition se prouve par le même raisonnement que la précédente. Si l'on prend les ordonnées de sorte qu'elles ne soient parallèles à aucune Asymptote, l'ordonnée de chaque Branche hyperbolique sera représentée par une Série telle que $Ax + B + Cx^{-k}$ &c. dont les deux prémiers termes $Ax + B$ expriment l'ordonnée de l'Asymptote [§. 131]. A sera zéro, si l'Asymptote est parallèle aux

* STIRLING, Prop. VI. Cor. 7.

Ch.VIII. aux abſciſſes; *B* ſera zéro, ſi elle paſſe par l'Origine; ainſi Pl. XV.
§. 147. *A* & *B* ſeront zéro, ſi l'Aſymptote eſt l'Axe des abſciſſes. Il ne ſauroit y avoir plus d'Aſymptotes droites qu'il n'y a de pareilles Séries. Et l'équation de la Courbe n'en ſauroit donner plus qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de la Courbe. Donc le nombre des Aſymptotes droites ne peut ſurpaſſer les nombres des unités contenuës dans cet expoſant.

148. V. Lorſque la Courbe a autant d'Aſymptotes droites que l'expoſant de ſon Ordre a d'unités, toutes ſes Branches infinies ſont hyperboliques. Car les ordonnées étant priſes de ſorte qu'elles ne ſoient parallèles à aucune Aſymptote, toutes les Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'y en x, c'eſt-à-dire, toutes celles qui peuvent exprimer l'ordonnée d'une Branche infinie de la Courbe, commencent par trois termes tels que $Ax+B+Cx^{-k}$ &c. [où *A* & *B* peuvent être zéro]. Elles repréſentent donc des Branches hyperboliques [§. 131], & la Courbe n'en a point d'autres.

En effet, puiſque chaque Aſymptote droite a deux Branches hyperboliques, & qu'une Courbe ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans le double de l'expoſant de ſon Ordre; ſi elle a autant d'Aſymptotes droites qu'il y a d'unités dans cet expoſant, toutes ſes Branches infinies ſeront hyperboliques.

149. VI. Dans le même Cas, c'eſt-à-dire, quand une Courbe algébrique a autant d'Aſymptotes droites qu'une Courbe de ſon Ordre en peut avoir; toute Droite qui coupe toutes ces Aſymptotes, & qui rencontre la Courbe en autant de points, eſt coupée de façon que la ſomme des parties interceptées entre la Courbe & les Aſymptotes

PL. XV. eſt égale à la ſomme des parties interceptées entre les Asymptotes & la Courbe [§. 65] *. CH. VIII. §. 149.

Car ſi l'on prend cette Droite & ſes parallèles pour les ordonnées ; puiſqu'elle coupe la Courbe en autant de points qu'il y a d'Aſymptotes, c'eſt-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de la Courbe, l'équation ſera telle que le plus haut expoſant d'y ſera égal à l'expoſant de l'Ordre. Soit v cet expoſant, $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ les deux prémiers termes de l'équation, & $y = A'x + B' + C'x^{-k}$ &c. $y = A''x + B'' + C''x^{-k}$ &c. $y = A'''x + B''' + C'''x^{-k}$ &c &c. les Séries deſcendantes, qui donnent y en x, tirées de cette équation. Ainſi $y - A'x - B' - C'x^{-k}$ &c. $= 0$, $y - A''x - B'' - C''x^{-k}$ &c $= 0$, $y - A'''x - B''' - C'''x^{-k}$ &c $= 0$ ſont les racines de l'éq: $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ &c $= 0$, & cette équation n'eſt autre choſe que le produit de ces racines, dont le nombre eſt ſuppoſé v. Le prémier terme de ce produit eſt y^v, & le ſecond eſt $-(A'x + B' + C'x^{-k}$ &c $+ A''x + B'' + C''x^{-k}$ &c $+ A'''x + B''' + C'''x^{-k}$ &c$)y^{v-1} = -((A' + A'' + A'''$ &c$)x + (B' + B'' + B'''$ &c$) + (C' + C'' + C'''$ &c$)x^{-k}$ &c$)y^{v-1}$, lequel comparé avec $(ax + b)y^{v-1}$, auquel il doit être égal, donne $A' + A'' + A'''$ &c $= a$, $B' + B'' + B'''$ &c $= b$, $C' + C'' + C'''$ &c $= 0$, & tout le reſte pareillement égal à zéro. De même, ſi on multiplie les unes par les autres toutes les équations des Aſymptotes droites

* NEWTON, *Enum. lin. tert. Ord.* II. 2. STIRLING, *Lin. tert. Ord. Newt.* Prop. X. Cor. 4.

CH.VIII. §. 149. tes $y - A'x - B' = 0$, $y - A''x - B'' = 0$, $y - A'''x$ PL. XV. $- B''' = 0$, *&c.* ce produit exprimera le Systême de toutes ces Droites. Or ce produit a pour son prémier terme y^v, & pour le second $-(A'x + B' + A''x + B'' + A'''x + B''' \; \&c)\, y^{v-1}$, ou $-((A' + A'' + A''' \; \&c)\, x + (B' + B'' + B''' \; \&c))\, y^{v-1} = -(ax + b)\, y^{v-1}$. L'équation qui représente le Systême des Asymptotes a donc les deux mémes prémiers termes que l'équation de la Courbe. Donc [§. 65] une ordonnée qui coupe toutes les Asymptotes & la Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant de son ordre, est coupée de façon que la somme des parties interceptées entre la Courbe & les Asymptotes, est égale à la somme des parties interceptées entre les Asymptotes & la Courbe.

150. VII. Le nombre des points, où une Courbe algébrique peut rencontrer son Asymptote droite, est inférieur, au moins, de deux unités à l'exposant de l'Ordre de cette Courbe *.

Car en prenant les ordonnées parallèles à une Asymptote, elle sera désignée par une déterminatrice paralléle à la Bande sans y [§. 137]. Ainsi, dans cette équation ordonnée par y, il manque au moins le prémier terme, celui où y auroit un exposant égal à l'exposant de l'Ordre de la Courbe. Par conséquent, aucune ordonnée [parallèle à l'Asymptote] ne peut rencontrer la Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'exposant de son Ordre [§. 41]. Mais en particulier, l'Ordonnée-asymptote la rencontre, au moins, une fois de moins. Car le nombre de points où une ordonnée rencontre une Courbe est égal au nombre des racines réelles de l'égalité qui

 résulte

* STIRLING, Prop. IV.

PL. XV. résulte quand à x on substitue la valeur de l'abscisse de CH. VIII. cette ordonnée. Mais l'abscisse de l'Ordonnée-asymptote §. 150. se détermine en égalant à zéro la bande entiére sur laquelle est appliquée la déterminatrice qui marque cette Asymptote [§. 139]. Donc cette valeur substituée à x fait disparoitre cette bande, & fait évanouir le terme, qui est le prémier de l'équation ordonnée par y. Ainsi dans l'Egalité, dont les racines déterminent les points où l'Asymptote rencontre la Courbe, l'exposant de la plus haute puissance d'y est inférieur à l'exposant de l'Ordre de la Courbe, de deux unités, au moins. Le nombre de ses racines, & par conséquent le nombre des points où la Courbe peut rencontrer l'Asymptote, est inférieur de deux unités, au moins, à l'exposant de l'Ordre de cette Courbe.

Soit, par ex. $ly^{v} + (ax+b)y^{v-1} + (cx^2+dx+e)y^{v-2}$ &c $= 0$, l'équation d'une Courbe de l'ordre v. Si elle a quelque Asymptote paralléle aux ordonnées y, il faut que le terme ly^{v}, au moins, disparoisse, l étant égale à zéro, & l'abscisse x dont l'ordonnée est Asymptote, se déterminera par l'éq: $ax+b=0$, ou $x=-\frac{b}{a}$. On aura les ordonnées de cette abscisse, en substituant, dans l'équation de la Courbe, $-\frac{b}{a}$ au lieu d'x, ce qui fera évanouir le terme $(ax+b)y^{v-1}$, qui par l'absence du terme ly^{v} est devenu le prémier; & par l'évanouissement de ce terme, $\frac{cbb-2dba+eaa}{aa}y^{v-2}$ se trouve le prémier. Donc, pour cette abscisse $-\frac{b}{a}$, l'équation ne sera que du dégré $v-2$. Elle ne peut donc avoir plus de

Ch. VIII. §. 150. de $v-2$ racines; la Courbe ne peut couper son Asymptote en plus de $v-2$ points. Pl. XV.

Ainsi une Courbe du second Ordre ne peut pas rencontrer son Asymptote. Une Courbe du troisiéme Ordre ne peut rencontrer son Asymptote qu'en un point: Une du quatriéme Ordre qu'en deux, & ainsi de suite.

151. VIII. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Asymptotes droites parallèles à ses ordonnées qu'il ne manque de termes initiaux à son équation ordonnée par y.

Car s'il ne manque à l'éq: $ly^v + (ax+b)y^{v-1} + (cx^2+dx+e)y^{v-2}$ &c $=0$, que le premier terme ly^v; la déterminatrice parallèle à la Bande sans y, qui indique [§. 139] les abscisses des Ordonnées-asymptotes, traversant la bande y^{v-1}, donnera l'éq: $ax+b=0$, qui n'a qu'une seule racine. Il n'y a donc, en ce cas, qu'une seule Asymptote parallèle aux ordonnées. Mais s'il manque à l'équation de la Courbe ses deux prémiers termes, $ly^v + (ax+b)y^{v-1}$, la déterminatrice traversera la bande y^{v-2}, & donnera l'éq: $cx^2+dx+e=0$, qui ne peut avoir que deux racines, & ne peut indiquer que deux Ordonnées-asymptotes. S'il manque à l'équation de la Courbe ses trois prémiers termes, la déterminatrice traversera la bande y^{v-3}, & donnera une équation du troisiéme dégré qui ne peut avoir que trois racines, qui sont trois abscisses d'Ordonnées-asymptotes. On voit que ce raisonnement s'applique de la même maniére à quelque nombre qu'il manque de termes initiaux.

Mais il arrivera souvent que le nombre des Asymptotes-ordonnées sera moindre que le nombre des termes initiaux qui manquent à l'équation. 1°. à cause des coëffi-

 cients

PL. XV. cients a, c, &c. qui peuvent manquer, ce qui déprime les CH. VIII. les équations $ax + b = 0$, $cxx + dx + e = 0$, & les réduit à des dégrés inférieurs. Si, par ex. l, a, b, & c sont §. 151. zéros, la déterminatrice, traversant la bande y^{v-2}, pourroit donner une équation du second dégré : mais à cause de $c = 0$, cette équation se réduit à une du prémier $dx + e = 0$, qui n'indique qu'une seule Asymptote-ordonnée. 2°. à cause des racines imaginaires qui ne donnent que des Asymptotes imaginaires. 3°. à cause des racines égales, qui ne marquent chacune qu'une seule Asymptote, quoiqu'elles tiennent lieu de plusieurs racines.

152. IX. Une Courbe algébrique ne peut avoir autant d'Asymptotes droites parallèles qu'il y a d'unités dans l'exposant de son Ordre *.

Car prenant les ordonnées y parallèles à ces Asymptotes, il manquera [§. *préc.*] autant de termes initiaux à l'équation ordonnée par y qu'il y a d'Asymptotes parallèles aux ordonnées. S'il y avoit autant de ces Asymptotes que d'unités dans l'exposant v de l'ordre de la Courbe, il manqueroit à cette équation ses v prémiers termes. Mais le nombre de tous ses termes est $v + 1$. Il ne lui resteroit donc que le dernier terme, qui ne renferme plus d'y. L'équation n'auroit de variables que x, & ne représenteroit pas une Courbe, mais quelques Droites parallèles [§. 40. II. 3].

L'équation devant représenter une Courbe, elle aura au moins deux termes, comme $(\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots + \zeta) y + (\lambda x^{v} + \mu x^{v-1} \ldots + \rho) = 0$. Alors les abscisses des Ordonnées-asymptotes sont les racines de l'éq: $\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2}$

* STIRLING, *Ibid.* Cor. 5 & 6.

Ch. VIII. §. 152. $+\beta x^{v-2} \ldots\ldots + \zeta = 0$, que donne la déterminatrice qui traverse la bande y. Ces racines sont au nombre de $v-1$, & peuvent, si elles sont toutes réelles, désigner $v-1$ Ordonnées-asymptotes, c'est-à-dire, une de moins que le nombre des unités de l'exposant v de l'Ordre de la Courbe. Pl. XV.

Ainsi une Courbe du second Ordre ne peut avoir d'Asymptotes parallèles: car c'est n'en avoir point que de n'en avoir qu'une. Une Courbe du troisiéme Ordre ne peut avoir que deux Asymptotes parallèles: Une du quatriéme Ordre que trois, &c.

153. X. Quand une Courbe a autant d'Asymptotes droites parallèles, qu'il y a d'unités dans l'exposant de son ordre, moins une, elle ne peut les couper.

Car dans son éq: $(\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots + \zeta) y + (\lambda x^{v} + \mu x^{v-1} \ldots\ldots + \rho) = 0$, y ne monte qu'au prémier dégré. Ainsi aucune ordonnée ne peut couper la Courbe en plus d'un point [§. 41]. Et quand cette ordonnée est une Asymptote, la valeur d'y, qui est $-\frac{\lambda x^{v} + \mu x^{v-1} + \ldots + \rho}{\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots\ldots + \zeta}$ devient infinie, son dénominateur étant zéro, puisqu'on suppose x égale à une des racines de l'éq: $\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots\ldots + \zeta = 0$. L'Asymptote ne rencontre donc la Courbe qu'à l'infini, c'est-à-dire, jamais.

CHAPI-

CHAPITRE IX.

Divisions générales des Lignes des cinq prémiers Ordres.

PL.XV. 154. LES Propositions établies dans le Chap. précédent servent de Régles pour former les Divisions des Lignes courbes de chaque Ordre. Leur fondement naturel est le nombre, l'espèce & la position des Branches infinies de ces Courbes. §. 154.

Pour commencer par le second Ordre, puisque le prémier ne renferme que la Ligne Droite [§. 40], son équation générale est $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ [§. 32]. Placée sur le Triangle analytique, son plus haut Rang, qui décide de la derniére direction de ses Branches infinies [§. 136], égalé à zéro, donne l'éq : $dyy + exy + fxx = 0$. Puisqu'elle est du second dégré, elle peut avoir ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles inégales, ou une seule racine double. Ce qui fait trois Cas.

Cas I. Le prémier est celui où les deux racines sont imaginaires, & il a lieu quand e est plus petit que $2\sqrt{df}$. Alors il n'y a point de Branches infinies [§. 136].

On rendra plus simple l'équation de la Courbe, 1°. en faisant disparoître la bande y, qui est le second terme de cette équation ordonnée par y, $dyy + (ex + b)y + fxx + cx + a = 0$. On supposera donc $y = u - \frac{ex + b}{2d}$, & on aura $4dduu + (4df - ee)\,xx + (4cd - 2be)\,x +$ $4ad -$

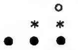
CH. IX. §. 154. $4ad - bb = 0$: 2°. en faisant évanouir le second terme PL. XV. de cette transformée ordonnée par x, en supposant $x = z - \frac{2cd - be}{4df - ee}$; ce qui change l'équation en $uu + \frac{4df - ee}{4dd}zz + \frac{(4df - ee)a - dcc + ebc - fbb}{4ddf - dee} = 0$, qui n'a plus que trois termes.

Puisque $e < 2\sqrt{df}$ le coëfficient $\frac{4df - ee}{4dd}$ du terme zz est nécessairement positif. Si le troisiéme terme $\frac{(4df - ee)a - dcc + ebc - fbb}{4ddf - dee}$ est aussi positif ou zéro, c'est-à-dire, si $a >$ ou $= \frac{dcc - ebc + fbb}{4df - ee}$, la Courbe est imaginaire, puisqu'il n'est pas possible que deux ou trois termes positifs soient égaux ensemble à zéro.

Mais si ce troisiéme terme est négatif, la Courbe représentée par l'équat: $uu + \frac{4df - ee}{4dd}zz = \frac{dcc - ebc + fbb - (4df - ee)a}{(4df - ee)d}$ est l'Ovale que les Géométres apellent *Ellipse*. L'Ellipse devient un *Cercle*, lorsque les coordonnées u & z sont perpendiculaires l'une à l'autre, & que $4df - ee = 4dd$; ce qui réduit l'équation à $uu + zz = \frac{dcc - ebc + fbb - 4add}{4d^3}$.

Cas II. Lorsque e est plus grand que $2\sqrt{df}$, l'éq: $dyy + exy + fxx = 0$ a deux racines réelles inégales, que nous supposerons $y - Ax = 0$, & $y - A'x = 0$. Elles indiquent deux derniéres directions pour les Branches infinies de la Courbe. En substituant $Ax + u$ à y dans l'équation proposée, on la transforme en une autre à

PL. XV. qui manque nécessairement le terme xx [§. 107]. La Ch. IX déterminatrice passera donc par les Cases ux & x, si §. 154.



celle-ci se trouve pleine, & donnera une équation telle que $u = B$. Il faut donc substituer $B + t$ à u, & on aura une seconde transformée, où les Cases xx & x sont surement vuides [§. 107] : mais celle de la Pointe ne sauroit l'être. Car, alors, cette transformée, n'ayant



point de termes sur la Bande x seroit divisible par t. La prémiére transformée seroit donc divisible par $u - B = t$, & la proposée par $y - Ax - B = u - B = t$. Elle seroit donc réductible à deux équations de cette forme $y - Ax - B = 0$, $y - A'x - B' = 0$, & représenteroit deux Droites. Donc, si elle exprime une Courbe, la Pointe renfermera un terme de la seconde transformée. Et la déterminatrice passant par cette Case & par la Case tx, donnera $t = Cx^{-1}$. Ainsi la Série est réguliére, & ses trois prémiers termes $Ax + B + Cx^{-1}$ marquent deux Branches hyperboliques [§. 131], dont l'Asymptote droite a pour équation $v = Ax + B$.

L'autre racine $y - A'x = 0$ donnera pareillement une Série, dont les trois prémiers termes $A'x + B' + C'x^{-1}$, marquent deux autres Branches hyperboliques, dont l'Asymptote droite s'exprime par l'éq: $v' = A'x + B'$.

Ainsi la Courbe a deux Asymptotes droites & quatre Branches hyperboliques qui s'étendent dans les angles asymptotiques opposés.

Que

Ch. IX. §. 154. Que si le terme x manquoit dans la prémiére transformée, la déterminatrice, qui part de la Case ux, au lieu de porter sur la Case x, auroit passé par la Pointe, & auroit donné, pour le second terme de la Série, $u = Bx^{-1}$. Dans une des Séries $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. $y = A'x + B' + C'x^{-1}$ &c, ou même dans toutes les deux, le second terme B, ou B', auroit manqué : ce qui marqueroit que l'une des Asymptotes droites, ou toutes les deux, passent par l'Origine; sans indiquer d'ailleurs aucun autre changement. Pl. XV.

On peut exécuter, tout d'un coup, les deux transformations indiquées ci-dessus, en portant l'Origine au point où les deux Asymptotes se croisent, & prenant les abscisses sur l'une & les ordonnées sur l'autre. Cette transformation vuidera les Cases yy, xx, y & x, de sorte que l'équation réduite au terme uz & au terme constant, aura cette forme $Puz - Q = 0$, ou $uz = \frac{Q}{P}$, sous laquelle on reconnoit l'*Hyperbole simple* [§. 118]. Voici tout le Calcul.

En substituant [§. 24] $m + pz + ru$ à x, & $n + qz + su$ à y, dans l'équation générale $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$, on la transformera en celle-ci

$$\begin{aligned}&(dss + ers + frr)uu + (2dqs + eqr + eps + 2fpr)uz + (dqq + epq + fpp)zz\\ &+ (bs + cr + 2dns + enr + ems + 2fmr)u + (bq + cp + 2dnq + enp + emq + 2fmp)z\\ &+ (a + bn + cm + dnn + emn + fmm)\\ &= 0\end{aligned}$$

On déterminera la raison de r à s, par l'éq : $dss + ers + frr = 0$, ce qui fait disparoitre le terme uu, & donne aux ordonnées une position parallèle à une des Asymptotes. On déterminera la raison de p à q par l'éq : $dqq + epq + fpp = 0$: ce qui fait disparoitre le terme zz, &

 donne

PL. XV. donne aux abſciſſes une poſition parallèle à une Aſymptote. Mais il faut prendre garde qu'on ne faſſe pas les abſciſſes parallèles aux ordonnées, [ce qui ſeroit abſurde], en faiſant les unes & les autres parallèles à la même Aſymptote, c'eſt-à-dire, en faiſant la raiſon $p:q$ égale à la raiſon $r:s$. L'éq : $dss+ers+frr=0$, ou $dqq+epq+fpp=0$, ayant deux racines inégales [puiſque $dyy+exy+fxx=0$, qui a, par ſuppoſition, deux racines inégales, ſe change en $dss+ers+frr=0$, ſi l'on écrit s pour y & r pour x, & en $dqq+epq+fpp=0$, en mettant q pour y & p pour x] ; on déterminera la raiſon $r:s$ par l'une de ſes racines, & la raiſon $p:q$ par l'autre, en prenant $\frac{s}{r}=\frac{-e+\sqrt{(ee-4df)}}{2d}$, & $\frac{q}{p}=\frac{-e-\sqrt{(ee-4df)}}{2d}$, ou réciproquement. Enſuite on déterminera m & n par ces deux éq : $bs+cr+2dns+enr+ems+2fmr=0$, & $bq+cp+2dnq+enp+emp+2fmq=0$, qui font évanouïr les termes u & z, & portent l'Origine ſur les deux Aſymptotes, c'eſt-à-dire, ſur le Point où elles ſe croiſent, lequel eſt un Centre général [§. 76]. Ces équations donnent $m=\frac{-be+2cd}{ee-4df}$, & $n=\frac{-ce+2bf}{ee-4df}$. Et l'équation de la Courbe ſe réduit à $(2dqs+eps+eqr+2fpr)uz+(a+bn+cm+dnn+emn+fmm)=0$, ou [mettant pour s, r, q, p, m & n, leurs valeurs] à $-4d(ee-4df)uz+a(ee-4df)^2+(dcc-ebc+fbb)(ee-4df)=0$, ſoit $uz=\frac{a(ee-4df)+dcc-ebc+fbb}{4d}$, qui eſt à l'*Hyperbole* ordinaire [§. 118]. CH. IX. §. 154.

Cas III.

Ch. IX. §. 154. *Cas III.* Enfin lorſque $e = 2\sqrt{df}$, l'éq : $dyy + exy + fxx = 0$ n'a qu'une ſeule racine, mais double, $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} = 0$, qui indique une ſeule derniére direction pour les Branches infinies de la Courbe [§. 136]. Qu'on ſubſtituë $-x\sqrt{\frac{f}{d}} + u$ à y dans la propoſée, & elle ſera transformée en une équation, où il manquera les termes xx & xy [§. 107]. Pl. XV.

$$\begin{array}{ccc} & & \circ \\ & \circ & \bullet \\ * & \bullet & \bullet \end{array}$$

S'il manquoit auſſi le terme x, la transformée n'auroit aucun terme où parût la lettre x, & elle ſe réduiroit à une équation telle que $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$ qui peut avoir, ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une ſeule racine réelle double. Si les deux racines u, u' ſont imaginaires, y [$= -x\sqrt{\frac{f}{d}} + u$ ou $+ u'$] eſt auſſi imaginaire, & l'équation n'exprime que des Lignes imaginaires. Si u, u' ſont réelles & inégales, la propoſée ſe réduit à ces deux équations ſimples $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} - u = 0$, $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} - u' = 0$. Ainſi elle exprime deux Droites parallèles [§. 40]. Si u & u' ſont égales, l'équation propoſée eſt le quarré de $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} - u = 0$, & ne déſigne qu'une ſeule Droite [§. 40].

Mais ſi dans la transformée le terme x ne manque pas, on verra, en la mettant ſur le Triangle analytique,

 que

PL.XV. que la déterminatrice passera par les Cases uu & x, & CH.IX qu'elle donnera une équation telle que $u = \pm \sqrt{Bx}$. On §. 154. aura donc la valeur d'y en x par deux Séries descendantes $-x\sqrt{\frac{f}{d}} + \sqrt{Bx}$ &c. $-x\sqrt{\frac{f}{d}} - \sqrt{Bx}$ &c. qui indiquent deux Branches paraboliques, de part & d'autre de l'Axe des abscisses, & du côté positif ou négatif, selon que B est une grandeur positive ou négative [§. 133].

Si dans l'équation transformée générale du *Cas* préced. on fait $dqq + epq + fpp = 0$, ce qui fait disparoitre le terme zz, & rend les abscisses parallèles à la derniére direction des Branches infinies [§. 135], on aura $\frac{q}{p} = -\frac{e}{2d}$. Car $e = 2\sqrt{df}$, ou $f = \frac{ee}{4d}$, transforme l'éq: $dqq + epq + fpp = 0$, en $dqq + epq + \frac{eepp}{4d} = 0$, soit $ddqq + depq + \frac{1}{4}eepp = 0$, dont la racine quarrée $dq + \frac{1}{2}ep = 0$ donne $\frac{q}{p} = -\frac{e}{2d}$. On verra disparoitre en même tems le terme uz, dont le coëfficient $2dqs + eqr + eps + 2fpr$ se réduit à $-2des - eer + 2des + 4dfr$, c'est-à-dire, à rien, ee étant égal à $4df$. Qu'on porte maintenant l'Origine sur la Courbe, en donnant à m & n des valeurs qui fassent disparoitre le terme constant $a + bn + cm + dnn + emn + fmm$: ce qui peut se faire en une infinité de maniéres: car on trouve $n = \frac{b - em \pm \sqrt{(bb - 4ad + (2be - 4cd)m)}}{2d}$; de sorte que prenant pour m une valeur quelconque plus grande que $\frac{4ad - bb}{2be - 4cd}$, afin que n ne soit pas imaginaire, n sera déterminée. Qu'on détermine ensuite la raison de s à r par l'éq: $bs + cr + 2dns + enr + ems + 2fmr = 0$, qui

CH. IX. §. 154. qui fait disparoitre le terme u & donne $\frac{s}{r} = -\frac{c + em + 2fm}{b + em + 2dn}$. Alors l'équation est réduite aux termes uu & z, & sous cette forme $(dss + esr + frr)\,uu + (bq + cp + 2dnq + enp + emq + 2fmp)\,z = 0$, qui [en mettant $4df$ pour ee, $-c$ pour q, $2d$ pour p, $-c - en - 2fm$ pour s, & $b + em + 2dn$ pour r] se réduit à $(dcc - ebc + fbb)\,uu - (be - 2cd)\,z = 0$, soit $uu = \frac{be - 2cd}{dcc - ebc + fbb}\,z$, où l'on reconnoit la *Parabole* simple [§. 123]. PL. XV.

Et ce sont là toutes les Lignes du second Ordre.

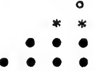
155. L'ÉQUATION générale des Lignes du troisiéme Ordre est $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ixxy + lx^3 = 0$, dont le troisiéme & plus haut rang égalé à zéro donne l'équation cubique $gy^3 + hxyy + ixxy + lx^3 = 0$, qui a au moins une racine réelle *.

Cas I. Soit cette racine $y - Ax = 0$, & supposons d'abord que les deux autres sont imaginaires. Alors les Branches infinies de la Courbe n'ont qu'une seule derniére direction parallèle à la Droite que représente l'équation $y = Ax$ [§. 135]. Et si l'on substituë $Ax + u$ à y dans la proposée, on aura une transformée à laquelle il manquera le terme x^3 [§. 107].

1. S'il ne lui manque pas le terme x^2, la déterminatrice passant par les Cases ux^2 & x^2, donnera une équation telle que $u = B$. L'exposant d'x n'étant pas négatif dans ce terme u, il faut substituer $B + t$ à u, & on aura une seconde

* Voyez NEWTON, *Enumer. linear. tert. Ordinis.* STIRLING, *Lineæ tert. Ord.* Newton. NICOLE, *Mem. de l'Ac.* 1729. p. 198.

PL. XV. feconde transformée à qui manquent les termes x^3 & x^2. CH. IX. §. 155.



Dans cette transformée, ou le terme x fubfifte, ou il manque. S'il fubfifte, la déterminatrice paffe par les Cafes tx^2 & x, & donne $t = Cx^{-1}$. S'il manque, la déterminatrice paffe par la Cafe tx^2 & par la Pointe, & donne $t = Dx^{-2}$. Dans l'un & l'autre Cas, la Série eft régu-



liére. L'un & l'autre indique une Afymptote droite dont l'équation eft $v = Ax + B$. Mais les Branches hyperboliques de la Courbe qui donne la Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ *&c.* fe jettent dans les Angles afymptotiques oppofés ([1]). Et celles de la Courbe qui fournit la Série $y = Ax + B + Dx^{-2}$ *&c.* s'étendent d'un même côté de l'Afymptote, mais de part & d'autre de l'Axe des ordonnées ([2]).

On ne peut pas fuppofer un troifiéme Cas, où la Pointe

([1]) Dans l'*Enumération* qu'a donnée Mr. NEWTON *des Lignes du 3e. Ordre*, il défigne celles-ci par le nom d'*Hyperboles défectives fans diamétre*. Il les détaille au N°. 5, & en compte *fix efpéces*. La diftinction de ces efpéces eft fondée fur d'autres proprietés que celles des Branches infinies.

([2]) Ce font les *Hyperboles défectives avec diamétre*, dont Mr. NEWTON compte *fept efpéces* au N°. 6.

Ch. IX. §. 155. Pointe reſteroit vuide ; car l'équation n'auroit aucun terme ſur la Bande ſans y, ou ſans t, & ſeroit par conſéquent diviſible par $t = u - B = y - Ax - B$. Elle n'exprimeroit donc pas une Courbe du troiſiéme Ordre, mais une Courbe du ſecond Ordre avec une Droite dont l'équation ſeroit $y - Ax - B = 0$, ou peut-être même l'aſſemblage de trois Droites. Pl. XV.

2. Si le terme x^2 manque dans la prémiére transformée, il n'en réſulte point de nouvelles Courbes. Seulement dans les deux précédentes Séries, le terme u, ou B, eſt zéro; parce que l'Origine eſt ſur l'Aſymptote repréſentée, dans ce Cas, par l'éq : $v = Ax$.

Cas II. Si les trois racines de l'éq : $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = 0$ ſont réelles & inégales, on fera ſur chacune de ces racines le même Calcul qu'on vient de faire ſur la racine unique du *Cas* précéd. On conclura donc que la Courbe a trois Aſymptotes droites accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, qui s'étendent, avec des directions oppoſées, ou d'un même côté de l'Aſymptote droite, ou des deux côtés de cette Aſymptote. Ce qui fait trois différens Genres de Courbes. Car ou chaque Aſymptote a ſes Branches de Courbe de part & d'autre (3) : ou deux Aſymptotes les ont de part & d'autre, la troiſiéme les ayant d'une même part (4) : ou chaque Aſymptote a ſes Branches de Courbe d'un même côté (5). A quoi l'on peut ajoûter, ſi

 l'on

(3) Mr. NEWTON les nomme *Hyperboles redondantes ſans diamétre*, & il en compte *neuf eſpèces* qu'il détaille au N°. 1.

(4) Ce ſont les *Hyperboles redondantes avec un diamétre*, dont Mr. NEWTON compte *douze eſpèces* au N°. 2. Mais Mr. STIRLING a fait voir qu'il en faut ajoûter deux, & que ce Genre a *quatorze eſpèces.*

(5) Mr. NEWTON les apelle *Hyperboles redondantes avec trois diamétres*, & il n'en compte que *deux eſpèces* au N°. 3. Mais Mr. STIRLING a fait voir qu'il y en a *quatre eſpèces.*

Pl. XV. l'on en veut faire un quatriéme Genre, les Courbes dont les trois Asymptotes se croisent en un seul point (*). Ch. IX. §. 151.

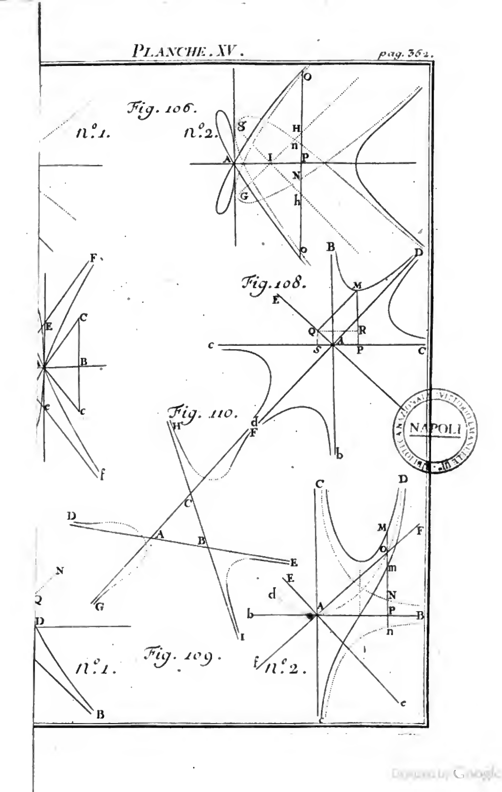
Il semble que cette énumération soit imparfaite, & que nous ayons oublié le Genre, où des trois Asymptotes l'une a ses Branches de Courbe de part & d'autre, les deux autres les ayant d'une même part. Mais ce Cas est im-
Fig. 110. possible. Car si on établit que l'Asymptote AB a ses deux Branches D, E de part & d'autre, tandis que les Asymptotes BC, CA ont leurs Branches F, G, & H, I d'un même côté; on verra que, pour lier ces six Branches deux à deux, comme elles doivent l'être afin que le cours de la Courbe soit continu [§. 19], il faudra, quelque combinaison qu'on fasse, qu'une Asymptote soit coupée deux fois par la Courbe; ce qui est impossible [§. 150]. Le Calcul démontre aussi l'impossibilité de ce Genre.

Car soient $y - Ax = 0$, $y - A'x = 0$, $y - A''x = 0$, les trois racines de l'équation faite en égalant à zéro le plus haut Rang; & soient $y - Ax - B - Cx^{-1} - Dx^{-2}$ &c $= 0$, $y - A'x - B' - C'x^{-1} - D'x^{-2}$ &c $= 0$, $y - A'x - B'' - C''x^{-1} - D''x^{-2}$ &c $= 0$ les trois Séries que donnent ces trois racines. Celles où le terme x^{-1} sera zéro désignent les Branches hyperboliques qui s'étendent d'un même côté de l'Asymptote: & celles où ce terme subsiste marquent les Branches hyperboliques qui se jettent de part & d'autre de leur Asymptote [§. 128]. Or en comparant le produit

$$\begin{array}{llll} y^3 - (A+A'+A'')xy^2 & + (AA'+AA''+A'A'')x^2y & - AA'A''x^3 & = 0 \\ \quad - (B+B'+B'')y^2 & \quad \&c & \quad \&c & \\ \quad - (C+C'+C'')x^{-1}y^2 & & & \\ \quad \&c & & & \end{array}$$

de

(*) Ce Genre contient les neuf espéces d'*Hyperboles redondantes dont les trois Asymptotes se croisent en un point.* NEWTON, N°. 4.


Fig. 106.
n.° 1.
n.° 2.
O
g
H
n
A
I
P
N
G
h
o
B
D
F
Fig. 108.
M
E
C
Q
R
c
S
A
P
C
B
A
b
c
f
Fig. 110.
H
d
F
C
D
A
B
E
G
I
N
Q
D
B
Fig. 109.
n.° 1.
n.° 2.
C
D
M
F
O
m
E
N
d
A
P
b
B
n
f
e
c

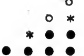
CH. IX. §. 155. de ces trois Séries avec l'équation proposée PL. XV.

$$\begin{array}{l} gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = 0 \\ + dy^2 + exy + fx^2 \\ \quad \&c \quad \&c \end{array}$$, on trouvera $C + C' + C'' = 0$:

ce qui montre que si deux des trois grandeurs C, C', C'', sont zéro, la troisiéme est aussi nécessairement zéro. Donc si des trois Asymptotes il y en a deux qui ont leurs Branches infinies d'une même part, la troisiéme a aussi ses Branches d'un même côté.

Cas III. Si l'équation du plus haut Rang de la proposée a deux de ses racines égales entr'elles; c'est-à-dire, si elle a une racine double $y - Ax = 0$ & une racine simple $y - Ax = 0$: chacune de ces racines donnera une Série. Celle de la racine simple désigne, comme dans le *Cas* I, une Asymptote droite, & deux Branches hyperboliques qui tombent ou d'un même côté de l'Asymptote, ou de part & d'autre. Pour avoir la Série de la racine double, on substituera dans l'équation proposée $Ax + u$ à y, & on aura une transformée à laquelle il manquera les termes x^3 & ux^2 [§. 107].

I. Si le terme x^2 ne manque pas, la déterminatrice passera par les Cases u^2x & x^2, & donnera une équation



telle que $u = \pm\sqrt{Bx}$, & dès lors la Série est réguliére, cette équation n'ayant point de racines multiples. Ses deux prémiers termes $Ax \pm \sqrt{Bx}$ marquent [§. 133] deux Branches paraboliques, qui, combinées avec les deux sortes de Branches hyperboliques que peut indiquer

 la

PL. XV. la racine ſimple, font deux Genres de Courbes (7) (8). CH. IX. §. 155.

II. Si le terme x^2 manque, la déterminatrice traverſe la Bande x & donne une équation de cette forme $\alpha u x^2$

o
o o
* * *
● ● ● ●

$+\beta u x+\gamma=0$, ou $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$, qui, étant du ſecond dégré, peut avoir deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une ſeule racine réelle double.

1. Si ces deux racines ſont imaginaires, les Séries qu'elles devroient donner ſont imaginaires: & la Courbe n'a de Branches infinies que celles qui ſont indiquées par la racine ſimple $y-A'x=0$: en quoi ce genre reſſemble aſſez à celui du premier *Cas* (9).

2. Si les deux racines de l'éq: $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$ ſont réelles & inégales $u-B=0$, $u'-B'=0$; qu'on ſubſtituë $B+t$, ou $B'+t$ à u, & on aura une ſeconde transformée à qui il manquera de plus qu'à la prémiére le terme x. Sa déterminatrice paſſant par la Pointe & par la Caſe tx, donnera $t=Cx^{-1}$, & la Série eſt dès lors réguliére. Ses prémiers termes $Ax+B+Cx^{-1}$, ou $Ax+B'+C'x^{-1}$, marquent des Branches hyperboliques,

(7) Le prémier eſt celui des *Hyperboles paraboliques ſans diamétre* dont Mr. NEWTON détaille *ſept eſpéces* au N°. 7.

(8) Le ſecond eſt celui des *Hyperboles paraboliques avec diamétre*, dont Mr. NEWTON compte *quatre eſpèces* au N°. 8. Mais il y en a réellement *ſix eſpéces*.

(9) Ce ſont les *Hyperboliſmes de l'Ellipſe*, dont il y a *trois eſpéces* énumerées par Mr. NEWTON au N°. 10.

Ch. IX. ques, qui, avec des directions opposées, se jettent de Pl. XV.
§. 155. part & d'autre de leur Asymptote droite représentée par

```
      o
    o o
  ● * o
● ● ● *
```

l'éq: $v = Ax + B$, ou $v = Ax + B'$. Ainsi la racine double $y - Ax = 0$ marque, dans ce Cas, quatre Branches hyperboliques autour de deux Asymptotes droites parallèles, auxquelles il faut joindre la troisiéme Asymptote accompagnée de deux Branches infinies que désigne la racine simple $y - A'x = 0$ [10].

On ne peut pas supposer ici, que la Pointe reste vuide : car la seconde transformée n'auroit aucun terme sur la Bande sans y, ou plutôt sans t : elle seroit donc divisible par t, & la proposée par $y - Ax - B$ [$= u - B = t$]. Elle ne représenteroit donc qu'une Droite & une Courbe du second Ordre, ou même trois Droites [§. 21].

3. Enfin, si l'éq: $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ n'a qu'une racine double $u = B$, on substituera $B + t$ à u dans la prémiére transformée, & on aura la seconde à laquelle manqueront les termes x & tx sur la Bande x [§. 107]. Mais, par la raison qu'on vient d'alléguer, la Pointe ne sera pas vuide. La déterminatrice partant de la Case t^2x

```
      o
    o o
  * o o
● ● ● *
```

Zz 3 portera

([10]) Ce sont les *Hyperbolismes de l'Hyperbole*, dont il y a *quatre espéces* comptées au N°. 9.

Ch. IX. §. 155. portera donc sur la Pointe, & donnera l'éq: $t = \pm\sqrt{Cx^{-1}}$: & dès ce terme la Série $y = Ax + B \pm \sqrt{Cx^{-1}}$ *&c* est réguliére. Elle marque deux Branches hyperboliques qui avec une même derniére direction se jettent de part & d'autre de l'Asymptote droite représentée par l'éq: $v = Ax + B$. Et ces deux Branches avec les deux que donne la racine simple $y - A'x = 0$, sont les quatre Branches hyperboliques de ce genre ([11]).

Cas IV. Si l'équation, faite en égalant à zéro le plus haut Rang de la proposée, n'a qu'une seule racine triple $y - Ax = 0$, ses Branches infinies n'ont qu'une seule derniére direction parallèle à la Droite que représente cette éq: $y - Ax = 0$. Et substituant, dans la proposée, $Ax + u$ à y, on aura une transformée à qui manquent, sur le plus haut Rang, les termes x^3, ux^2, u^2x [§. 107].

1. S'il ne lui manque pas le terme x^2, la déterminatrice portera sur cette Case & sur la Case u^3, & donnera $u = Bx^{2:3}$, & la Série est réguliére. Ses prémiers termes

o
o *
• • •
* • • •

$Ax + Bx^{2:3}$ marquent deux Branches paraboliques, qui, sous

([11]) Mr. Newton les appelle *Hyperbolismes de la Parabole*, & il en détaille *cinq espéces* au N°. 11. Une de ces espéces est l'*Hyperbole cubique*.

On auroit pû subdiviser ces trois derniers Genres, chacun en deux, suivant que l'Asymptote désignée par la racine simple a ses Branches de Courbe de part & d'autre, ou d'une même part. Mais puisque Mr. Newton n'a pas trouvé à propos de faire cette subdivision, on a cru devoir l'imiter dans une chose assez indifférente.

ſous des directions oppoſées, ſe jettent d'un même côté de la Droite parallèle à leur derniére direction, & qui eſt exprimée par l'éq : $y = Ax$ (11). Ch. IX. §. 155.

2. S'il manque à la transformée le terme x^2, & non le terme ux, on aura deux déterminatrices ſupérieures. L'une, qui paſſe par u^3 & ux, donnera $u = \pm\sqrt{Bx}$. La



Série $y = Ax \pm \sqrt{Bx}$ &c indique deux Branches paraboliques, qui tendent d'un même côté ſous une direction parallèle à la Droite repréſentée par l'éq : $y = Ax$.

L'autre déterminatrice eſt horizontale ſi la Caſe x eſt pleine, & donne $u = B'$. Subſtituant donc $B' + t$ à u, la ſeconde transformée n'aura aucun des termes x^3, u^2x, ux^2, x^2 & x, & ſa déterminatrice paſſant par la Pointe



& la Caſe tx, donnera $t = C'x^{-1}$. La Série $y = Ax + B' + C'x^{-1}$ &c. qui eſt réguliére, indique deux Branches hyperboliques, qui, avec une direction oppoſée ſe jettent de part & d'autre de leur Aſymptote droite exprimée par l'éq : $v = Ax + B'$.

On

(11) Ce ſont les *Paraboles divergentes*, dont Mr. Newton compte *cinq eſpéces* au N°. 12. L'une d'elles eſt la *Parabole ſemi-cubique*.

Ch. IX. §. 155. On prouveroit, comme ci-dessus [*Cas* III. 2], que dans cette transformée la Pointe ne peut rester vuide. Et si dans la prémiére transformée le terme x avoit manqué, cela ne donneroit point de nouvelles Courbes. Seulement on auroit $u = o = B'$; l'équation de l'Asymptote droite seroit $v = Ax$, ce qui marqueroit qu'elle passe par l'Origine. Ainsi les Courbes de ce Genre ont quatre Branches infinies, deux hyperboliques & deux paraboliques, qui ont toutes quatre leur derniére direction parallèle ([11]).

3. S'il manque enfin à la prémiére transformée le terme ux avec x^2, elle n'aura qu'une déterminatrice supérieure, qui, passant par les Cases u^3 & x donnera $u =$.

```
      o
    o o
  o o *
* ● ● ●
```

$Bx^{1:3}$. Les deux prémiers termes $Ax + Bx^{1:3}$ de la Série réguliére marquent deux Branches paraboliques, lesquelles, sous des directions opposées, & parallèles à la Droite exprimée par l'éq: $y = Ax$, se jettent de part & d'autre de cette Droite.

Lorsque cette transformée est la plus compliquée, elle est $u^3 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma + \delta x = o$. Qu'on substituë $sy + n$ à u & $ry + z + m$ à x: ce qui change les coordonnées de maniére que l'Axe des abscisses, & non celui des ordonnées, reste parallèle à sa prémiére position [§. 25]: l'équation se changera en celle-ci $s^3y^3 + (3n + \alpha)s^2y^2 + (3n^2s + 2\alpha ns + \beta s + \delta r)y + (n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma + \delta m) + \delta z$

([11]) Ce Genre ne renferme qu'*une seule espèce* de Courbes que Mr. Newton apelle *le Trident*. N°. 13.

$+\delta z = 0$, où l'on peut faire 1°. $3n + \alpha = 0$, ce qui donne $n = -\frac{1}{3}\alpha$. 2°. $3n^2 s + 2\alpha n s + \beta s + \delta r = 0$; d'où l'on tire $r = -\frac{3n^2 + 2\alpha n + \beta}{\delta} s = \frac{\frac{1}{3}\alpha^2 - \beta}{\delta} s$. 3°. $n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma + \delta m = 0$, d'où résulte $m = -\frac{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma}{\delta} = -\frac{2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma}{27\delta}$. Alors l'équation sera réduite à $s^3 y^3 + \delta z = 0$, ou $y^3 = -\frac{\delta}{s^3} z$, qui est à la *Parabole cubique*; elle est par conséquent la seule Courbe de ce Genre [14]. Ch.IX. §. 155.

On ne peut pas supposer, que dans la transformée $u^3 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma + \delta x = 0$ le terme δx manque: puisqu'elle seroit réduite à une seule variable u, & divisible en ses trois racines $u - B = 0$, $u - B' = 0$, $u - B'' = 0$. Donc la proposée se pourroit diviser en trois équations $y - Ax - B = 0$, $y - Ax - B' = 0$, $y - Ax - B'' = 0$, & ne représenteroit que trois Droites parallèles.

Ainsi toutes les Courbes du troisiéme Ordre se réduisent aux *quatorze Genres* que nous venons d'indiquer.

156. On s'y prendra de la même maniére pour faire l'énumération des Courbes du quatriéme Ordre *. L'équation générale des Lignes de cet Ordre étant mise sur le Triangle analytique, le quatriéme & plus haut Rang donne une équation du quatriéme dégré, telle que $my^4 + nxy^3 + ox^2y^2 + px^3y + qx^4 = 0$, que pour abréger nous nommerons Æ. Elle a quatre racines, imaginaires ou réelles, égales ou inégales; ce qui fait huit *Cas* différens, qu'on

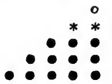
(14) Comme le remarque Mr. Newton, N°. 14.

* *Voyez* Mr. De Bragelogne, *Hist. de l'Acad.* 1730, 31, & 32.

CH. IX. §. 156. qu'on peut arranger ainſi. Ou l'éq: Æ n'a que des *racines imaginaires* [Cas I], ou elle a *deux racines imaginaires & deux racines ſimples* [Cas II], ou elle a *quatre racines ſimples* [Cas III], ou elle a *deux racines imaginaires & une double* [Cas IV], ou *deux doubles* [Cas V], ou *deux ſimples & une double* [Cas VI], ou *une racine ſimple & une triple* [Cas VII], ou enfin *une ſeule racine quadruple* [Cas VIII].

Cas I. Si les *racines* de l'éq: Æ ſont toutes *imaginaires*, la Courbe n'aura point de Branches infinies [§. 136]. Quoique ſon cours puiſſe être varié en diverſes maniéres dans un eſpace fini, ce qui donne un grand nombre d'eſpèces différentes ; on doit néantmoins toutes les ranger ſous un même Genre : du moins ſi l'on s'en tient à la méthode que nous ſuivons ici, & qui conſiſte à déterminer les Genres par le nombre & l'eſpèce des Branches infinies.

Cas II. Si l'éq: Æ n'a que *deux racines ſimples*, $y - Ax = 0$, $y - A'x = 0$, on aura, en ſubſtituant $Ax + u$ à y, une transformée à laquelle manquera le terme x^4.



1. Si le terme x^3 ne manque pas, la déterminatrice horizontale donnera $ux^3 = Bx^3$, ou $u = B$: & ſubſtituant $B + t$ à u, on aura une ſeconde transformée, à laquelle manqueront les termes x^4 & x^3.

1. Si

				o					o					o
			*	o				*	o				*	o
		●	●	*			●	●	o			●	●	o
	●	●	●	*	o	●	●	●	*		●	●	●	o
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	*

1. Si la Case x^2 n'est pas vuide, c'est sur elle que portera la déterminatrice qui part de la Case tx^3, & elle donnera $t = Cx^{-1}$. La Série réguliére $y = Ax + B + Cx^{-1}$ *&c.* désigne deux Branches hyperboliques qui se jettent dans les angles asymptotiques opposés.

2. Si la Case x^2 est vuide & la Case x pleine, c'est sur celle-ci que porte la déterminatrice, qui donnera $t = Cx^{-2}$. La Série $y = Ax + B + Cx^{-2}$ *&c.* marque deux Branches hyperboliques, qui s'étendent d'un méme côté de l'Asymptote, dans les angles asymptotiques de suite.

3. Si les Cases x^2 & x sont vuides, celle de la Pointe ne sauroit l'être; parce que la seconde transformée seroit divisible par t, la prémiére par $u - B$, & la proposée par $y - Ax - B$, de sorte qu'elle ne représenteroit qu'une Droite avec une Ligne du troisiéme Ordre. La déterminatrice donnera donc $t = Cx^{-3}$: & la Série $y = Ax + B + Cx^{-3}$ *&c.* indique deux Branches hyperboliques qui tombent dans les deux angles asymptotiques opposés.

II. Si dans la prémiére transformée le terme x^3 manquoit, on auroit $u = o = B$: ce qui feroit voir que l'Asymptote passe par l'Origine, son éq: $v = Ax + B$ étant réduite à $v = Ax$. D'ailleurs tout le reste subsiste également, & ce vuide de la Case x^2 ne donne point de nouvelles Courbes.

 Ainsi,

CH. IX. §. 156. Ainsi, sous la derniére direction exprimée par la racine $y - Ax = 0$ de l'éq : *Æ*, il y a une Asymptote droite avec deux Branches hyperboliques, mais qui peuvent être de trois différens genres. La racine $y - A'x = 0$, donne aussi une Asymptote droite avec deux Branches hyperboliques, qui peuvent être de trois genres différens. Donc, en combinant les uns avec les autres, on aura six Genres de Courbes compris dans ce second *Cas*, lesquels ont chacun quatre Branches hyperboliques.

Cas III. Si l'éq : *Æ* a *quatre racines simples*, on raisonnera sur chacune d'elles comme on vient de faire sur les deux racines simples du *Cas* préced. La Courbe a donc quatre Asymptotes de directions différentes, & chacune d'elles est accompagnée de deux Branches hyperboliques, qui peuvent être de trois différents genres. Il semble qu'en les combinant ensemble on trouvera quinze Genres de Courbes. Mais un calcul semblable à celui qu'on a fait au §. *préc. Cas II*, fera voir que de ces quinze combinaisons, il y en a six d'impossibles. Car soient $y - Ax - B - Cx^{-1} - Dx^{-2}$ *&c* $= 0$, $y - A'x - B' - C'x^{-1} - D'x^{-2}$ *&c* $= 0$, $y - A''x - B'' - C''x^{-1} - D''x^{-2}$ *&c* $= 0$, & $y - A'''x - B''' - C'''x^{-1} - D'''x^{-2}$ *&c* $= 0$, les quatre Séries que fournissent les quatre racines de l'éq : *Æ*. Celles où le terme x^{-1} ne manque point désignent les Branches hyperboliques du prémier genre ; celles qui n'ont pas le terme x^{-1}, mais bien x^{-2}, marquent les Branches du second genre : & celles du troisiéme sont indiquées par les Séries qui n'ont ni le terme x^{-1}, ni le terme x^{-2}. Or en comparant avec l'équation proposée

$$\alpha y^4 + \beta xy^3 + \gamma x^2y^2 \text{ \&c} \\ + \zeta y^3 + nxy^2 \text{ \&c} \\ + \lambda y^2 \text{ \&c}$$

le produit des quatre Séries

$y^4 -$

$$y^4 - (A+A'+A''+A''')xy^3 + (AA'+AA''+AA'''+A'A''+A'A'''+A''A''')x^2y^2 \text{ \&c}$$

$$-(B+B'+B''+B''')y^3 + \left\{\begin{array}{l} AB'+AB''+AB'''+A'B+A'B''+A'B''' \\ A''B+A''B'+A''B'''+A'''B+A'''B'+A'''B'' \end{array}\right\} xy^2 \text{ \&c}$$

$$-(C+C'+C''+C''')x^{-1}y^3 + \left\{\begin{array}{l} AC'+AC''+AC'''+A'C+A'C''+A'C''' \\ A''C+A''C'+A''C'''+A'''C+A'''C'+A'''C'' \\ BB'+BB''+BB'''+B'B''+B'B'''+B''B''' \end{array}\right\} y^2 \text{ \&c}$$

$$-(D+D'+D''+D''')x^{-2}y^3 + \left\{\begin{array}{l} AD'+AD''+AD'''+A'D+A'D''+A'D''' \\ A''D+A''D'+A''D'''+A'''D+A'''D'+A'''D'' \\ BC'+BC''+BC'''+B'C+B'C''+B'C''' \\ B''C+B''C'+B''C'''+B'''C+B'''C'+B'''C'' \end{array}\right\} x^{-1}y^2 \text{ \&c}$$

&c &c

on verra que les coëfficients de $x^{-1}y^3$, $x^{-1}y^2$, $x^{-2}y^3$ &c. étant zéro, 1°. $C+C'+C''+C'''=0$; de sorte que si trois de ces quatre grandeurs C, C', C'', C''' sont zéro, la quatriéme est aussi nécessairement zéro : c'est-à-dire, qu'il n'est pas possible qu'une seule des quatre Asymptotes ait des Branches infinies du prémier genre : ce qui exclud d'abord quatre combinaisons, sçavoir, celle où l'on supposeroit une paire de Branches du prémier genre, & les autres, ou toutes trois du second genre, ou deux du second & une du troisiéme, ou une du second & deux du troisiéme, ou toutes trois du troisiéme. 2°. que $D+D'+D''+D'''=0$, de sorte que C, C', C'', C''' & trois des quatre grandeurs D, D', D'', D''', étant zéro, la quatriéme l'est aussi : ce qui exclud la combinaison qui suppose une paire de Branches infinies du second genre, & les trois autres du troisiéme. 3°. que C, C', C'', C''' étant zéro, deux des grandeurs D, D', D'', D''' ne peuvent être zéro. Car si on suppose, par exemple, D''' & $D''=0$, le coëfficient de $x^{-2}y^3$ se réduit à $D+D'$, & & celui de $x^{-1}y^2$ à $AD'+A'D+A''D+A''D'+A'''D+A'''D'$. Ainsi ces coëfficients étant égaux à zéro, on aura $-\frac{D}{D'}=1=-\frac{A+A'+A''}{A'+A''+A'''}$. Donc $A=A'$; ce

CH. IX. §. 156. ce qui feroit contraire à la fuppofition que les quatre racines Ax, $A'x$, $A''x$, $A'''x$ de l'éq : Æ font inégales. Ainfi il faut encore exclure la combinaifon qui fuppofe deux paires de Branches du fecond genre, & deux du troifiéme.

Donc de quinze combinaifons que préfentent trois genres combinés quatre à quatre, en ayant exclu fix, il en refte neuf, qui font neuf Genres compris dans ce *Cas III*, fç. 1°. Quatre paires de Branches du prémier genre. 2°. Trois du prémier & une du fecond. 3°. Trois du prémier & une du troifiéme. 4°. Deux du prémier & deux du fecond. 5°. Deux du prémier, une du fecond, & une du troifiéme. 6°. Deux du prémier & deux du troifiéme. 7°. Quatre du fecond. 8°. Trois du fecond & une du troifiéme. 9°. Quatre paires de Branches du troifiéme genre.

Cas IV. L'équation Æ ayant *deux racines imaginaires & une racine double* [$y - Ax = 0$], la Droite indiquée par cette racine double eft parallèle à la derniére direction des Branches infinies que peut avoir la Courbe. En fubftituant $Ax + u$ à y, dans la propofée, on aura une transformée (T), à laquelle manquent les termes x^4 & ux^3 [§. 107].

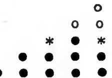
I. Si T a le terme x^3, la déterminatrice paffera par

o
o *
* ● ●
● ● ● ●
● ● ● ● ● ,

u^2x^2 & x^3, & donnera $u = \pm\sqrt{Bx}$. La Série, dès lors réguliére, $y = Ax \pm \sqrt{Bx}$ *&c.* indique deux Branches

ches paraboliques, qui embrassent pour ainsi dire la Droite exprimée par l'éq: $y = Ax$. Ch. IX. §. 156.

II. Mais s'il manque à T le terme x^1, la déterminatrice sera couchée sur la Bande x^2, & donnera une équa-



tion de cette forme $\alpha u^2x^2 + \beta ux^2 + \gamma x^2 = 0$, ou $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$, qui a, ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles simples, ou une seule racine double.

1. Si elles sont imaginaires, la Série est imaginaire par son second terme. La Courbe n'a donc point de Branches infinies.

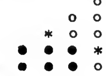
2. Si elles sont réelles simples, $u - B = 0$, $u - B' = 0$, on substituera $B + t$ à u dans T, & on aura une seconde transformée, à laquelle il manquera encore le terme x. La déterminatrice utile partira donc de la Case tx^2 & passera par la Case x; ou, si elle est vuide, par la Pointe, qui ne sauroit être vuide, par la raison si souvent allé-



guée. On aura donc $t = Cx^{-1}$, ou $t = Cx^{-2}$. La racine B donne donc une Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c, ou $y = Ax + B + Cx^{-2}$ &c. Et la racine B' donne aussi une Série $y = Ax + B' + C'x^{-1}$ &c. ou $y = Ax + B'$

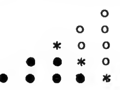
CH. IX. §. 156. $+B' + C'x^{-2}$ &c. Ainsi la Courbe a deux Asymptotes parallèles représentées par les éq : $v = Ax + B$, $v' = Ax + B'$. Et ces Asymptotes sont accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, qui se jettent dans les angles asymptotiques opposés, ou de suite : ce qui, par la combinaison, fait trois Genres de Courbes.

3. Si l'éq : $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ n'a qu'une racine double $u = B''$, on substituera $B'' + t$ à u dans T, & on aura une nouvelle transformée (V), à qui il manquera les termes x^2 & tx^1. Donc la déterminatrice partant de t^2x^2 portera sur la Case x, si elle est pleine, & don-



nera $t = \pm\sqrt{Cx^{-1}}$. La Série $y = Ax + B'' \pm \sqrt{Cx^{-1}}$ &c, marque deux Branches hyperboliques qui embrassent l'Asymptote droite représentée par l'éq : $v = Ax + B''$.

III. Que si dans l'éq : V il manque le terme x, la déterminatrice passera par les Cases t^2x^2, tx, & la Pointe, & donnera une équation de cette forme $\alpha t^2x^2 + \delta tx + \varepsilon = 0$, qui aura ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles simples, ou une double.

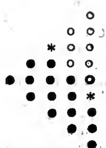


1). Si

1). Si ces deux racines font imaginaires, la Série eft imaginaire par fon troifiéme terme, & la Courbe eft finie. CH. IX. §. 156.

2). Si elles font réelles & fimples $t = Cx^{-1}$, $t = C'x^{-1}$, on a deux Séries $y = Ax + B'' + Cx^{-1}$ &c. $y = Ax + B'' + C'x^{-1}$ &c. qui marquent une feule Afymptote, [$v = Ax + B''$] avec quatre Branches hyperboliques, étenduës, ou dans les quatre angles afymptotiques, fi C & C' ont des fignes contraires, ou deux dans un de ces angles & deux dans l'oppofé, fi C & C' ont le même figne.

3). Si l'éq: $at^2x^2 + \delta tx + 1 = 0$ n'a qu'une racine double $t = C''x^{-1}$, la Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1}$ &c. n'eft pas encore réguliére: mais il faut fubftituer $C''x^{-1} + s$ à t dans V, & l'on aura une transformée (X), où la Pointe & la Cafe sx feront vuides. La déterminatrice partant de la Cafe s^2x^2 paffera par la Cafe



x^{-1}, fi elle eft pleine, & donnera $s = \pm\sqrt{D}\,x^{-1}$. La Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} \pm \sqrt{D}\,x^{-1}$ &c. marque deux Branches hyperboliques, qui fe jettent dans un même angle afymptotique, ayant pour Afymptote-courbe une des Branches de l'Hyperbole dont l'équation eft $v = Ax + B'' + C''x^{-1}$.

CH. IX. §. 156. IV. Si le terme x^{-1} manque dans la transformée X, la déterminatrice traverſera les Caſes s^2x^2, s & x^{-2}, & donne une équation du ſecond dégré, qui a ou deux racines imaginaires, ou deux réelles ſimples, ou une double. On reviendra donc aux raiſonnemens précédens, & on conclura, que,

(1). Si ces racines ſont imaginaires, la Courbe n'a point de Branches infinies.

(2). Si elles ſont réelles, $s = Dx^{-2}$, $s = D'x^{-2}$, les Séries $y = Ax + B' + C''x^{-1} + Dx^{-2}$ *&c.* $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D'x^{-2}$ *&c.* marquent une ſeule Aſymptote droite avec quatre Branches hyperboliques, qui ſe jettent deux à deux dans les angles aſymptotiques opposés.

(3). S'il n'y a qu'une racine double $s = D''x^{-2}$, la Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2}$ *&c.* n'eſt pas encore réguliére : mais on doit ſubſtituer $D''x^{-2} + r$ à s dans X, & on aura une autre transformée, ſur laquelle repétant le même raiſonnement, on aura, ou la Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} \pm \sqrt{Ex^{-5}}$ *&c.* qui déſigne deux Branches hyperboliques étenduës dans un des angles aſymptotiques ; ou une Série dont le cinquiéme terme eſt imaginaire, & qui ne donne point de Branches infinies ; ou les deux Séries $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} + Ex^{-3}$ *&c.* $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} + E'x^{-3}$ *&c.* qui marquent quatre Branches hyperboliques étenduës deux à deux dans les angles aſymptotiques opposés ; ou enfin une ſeule Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} + E''x^{-3}$ *&c.* mais qui n'eſt pas encore en régle, & à laquelle, par un même raiſonnement, on trouve pour ſixiéme terme, ou $\pm \sqrt{Fx^{-7}}$, ou un terme imaginaire, ou un terme double Fx^{-4}, $F'x^{-4}$, ou un terme ſimple $F''x^{-4}$, ſuivi d'un ſeptiéme, qui ſera, ou $\pm \sqrt{Gx^{-9}}$, ou imaginaire, ou double Gx^{-5}, $G'x^{-5}$,

ou

ou ſimple $G''x^{-s}$ mais &c. ce qui peut aller à l'infini. Ch. IX. §. 156.

On ne ſauroit donc énumérer tous les genres des Courbes compriſes dans ce IVe. *Cas* : mais on peut les réduire à cinq *Claſſes*.

1e. Celles qui n'ont point de Branches infinies, parce que le ſecond, troiſiéme, quatriéme, ou &c. terme de la Série qui les exprime, eſt imaginaire. N°. II, 1. III, 1). IV, (1). &c.

2e. Celles qui ont deux Branches paraboliques. N°. I.

3e. Celles qui ont deux Branches hyperboliques, ſoit qu'elles ſe jettent de part & d'autre de leur Aſymptote qu'elles ſemblent embraſſer, N°. II, 3 : ſoit qu'elles ſe jettent dans un ſeul des angles aſymptotiques, N°. III, 3). IV, (3).

4e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques autour d'une ſeule Aſymptote, ſoit qu'elles ſe jettent dans les quatre angles aſymptotiques, une dans chacun ; ſoit qu'elles ſe jettent, deux à deux, dans deux angles aſymptotiques oppoſés. N°. III, 2). IV, (2).

5e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes parallèles. N°. II, 2.

Cas V. Si l'éq. Æ a *deux racines doubles*, chaque racine donnera les mêmes variations que celles du préced. *Cas*. On les combinera donc les unes avec les autres, & on trouvera les quinze Claſſes ſuivantes.

1e. Les Courbes finies. *Combinaiſon de la* 1e. *Claſſe avec elle-même*.

2e. Les Courbes qui ont deux Branches paraboliques. *Claſſes* 1 *&* 2.

3e. Celles qui ont deux Branches hyperboliques. *Cl.* 1 *&* 3.

4e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques avec une ſeule Aſymptote. *Cl.* 1 *&* 4.

Ch. IX. §. 156. 5ᵉ. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques & deux Aſymptotes parallèles. *Cl.* 1 *&* 5.

6ᵉ. Celles qui ont quatre Branches paraboliques. *Claſſe* 2 *avec elle-même.*

7ᵉ. Celles qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques. *Cl.* 2 *&* 3.

8ᵉ. Celles qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques avec une ſeule Aſymptote. *Cl.* 2 *&* 4.

9ᵉ. Celles qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques avec deux Aſymptotes parallèles. *Claſſes* 2 *&* 5.

10ᵉ. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques avec deux Aſymptotes non-parallèles. *Cl.* 3 *avec elle-même.*

11ᵉ. Celles qui ont ſix Branches hyperboliques, deux autour d'une Aſymptote & quatre autour d'une autre, leſquelles Aſymptotes ne ſont pas parallèles. *Cl.* 3 *&* 4.

12ᵉ. Celles qui ont ſix Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes, dont deux parallèles ſont coupées par la troiſiéme. *Cl.* 3 *&* 5.

13ᵉ. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles, ſçavoir quatre Branches autour de chaque Aſymptote. *Cl.* 4 *avec elle-même.*

14ᵉ. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes, dont deux parallèles, ayant chacune deux Branches, ſont coupées par la troiſiéme qui a quatre Branches. *Cl.* 4 *&* 5.

15ᵉ. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de quatre Aſymptotes parallèles deux à deux. *Cl.* 5. *avec elle-même.*

Cas VI. Si l'éq : Æ a *deux racines ſimples & une double*, on combinera les ſix genres du *Cas II* [leſquels ne ſont qu'une Claſſe de quatre Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles] avec les cinq Claſſes

Classes du IVe. *Cas*, & on aura les cinq Classes suivantes.

1e. Les Courbes qui n'ont que quatre Branches hyperboliques autour de deux Asymptotes non parallèles.

2e. Celles qui ont deux Branches paraboliques, & quatre hyperboliques autour de deux Asymptotes non parallèles.

3e. Celles qui ont six Branches hyperboliques autour de trois Asymptotes non parallèles.

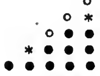
4e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de trois Asymptotes non parallèles, sçavoir, quatre autour d'une Asymptote & deux autour de chacune des deux autres.

5e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de quatre Asymptotes dont deux sont parallèles.

Cas VII. Si l'éq: Æ a *une racine simple & une triple*, la racine simple $y - A'x = 0$ indique une Asymptote droite, avec deux Branches hyperboliques. Elles peuvent être de trois genres différens, comme on l'a montré au *Cas I.*

Mais la racine triple étant $y - Ax = 0$, on substituera $Ax + u$ à y dans la proposée, & on aura une transformée (T), dont les Cases x^4, ux^3, & u^2x^2 restent vuides [§. 107].

I. Si la Case x^3 est pleine, la déterminatrice traversera

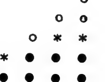


les Cases u^3x & x^3, & donnera $u = Bx^{2:3}$. La Série, dès lors régulière, $y = Ax + Bx^{2:3}$ &c. indique deux

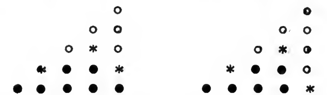
 Branches

CH. IX. §. 156. Branches paraboliques d'un même côté de la Droite exprimée par $y = Ax$, qui est parallèle à leur derniére direction.

II. Si la Case x^3 est vuide, mais que x^2 ne le soit pas; on aura deux déterminatrices, l'une qui passe par u^3x & ux^2, & l'autre par ux^2 & x^2. La prémiére donne $u = \pm\sqrt{B'x}$, & sa Série $y = Ax \pm \sqrt{B'x}$ &c. mar-



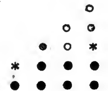
que deux Branches paraboliques, qui embrassent la Droite représentée par l'éq: $y = Ax$, parallèle à leur derniére direction. La seconde déterminatrice donne $u = B$, & substituant $B + t$ à u dans T, on aura une transformée à laquelle il manque le terme x^2. La déterminatrice partant



de la Case tx^2, portera donc sur la Case x, ou, si elle est vuide, sur la Pointe, qui, dans ce cas, ne peut être vuide, & on aura $t = Cx^{-1}$, ou $t = C'x^{-2}$. La Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. ou $y = Ax + B + C'x^{-2}$ &c. désigne deux Branches hyperboliques d'un même côté, ou des deux côtés de l'Asymptote droite exprimée par l'éq: $v = Ax + B$. Ces deux Branches hyperboliques, avec

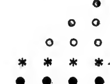
avec les deux paraboliques qu'indique la prémiére déterminatrice, font quatre Branches infinies dont la derniére direction est parallèle à la Droite représentée par l'éq : $y = Ax$. Ch. IX. §. 156.

III. S'il manque à la transformée T le terme ux^2, elle n'a qu'une seule déterminatrice, qui passe par les Cases u^3x & x^2, si celle-ci est pleine, & donne $u = B'x^{1:2}$. La Série $y = Ax + B'x^{1:2}$, dès lors réguliére, marque



deux Branches paraboliques, dont la derniére direction est parallèle à la Droite représentée par $y = Ax$, & qui se jettent enfin dans deux angles opposés des quatre que fait cette Droite avec l'Axe des ordonnées.

IV. S'il manque encore à la transformée T le terme x^2, la déterminatrice traversera la bande x, & fournira une équation cubique, qui peut avoir, 1°. une racine



simple réelle, & deux imaginaires, 2°. trois racines simples, 3°. une simple & une double, ou 4°. une triple.

1. S'il n'y a qu'une racine simple $u = B$; en substituant $B + t$ à u dans T, on aura une seconde transformée

Ch. IX §. 156. mée, où la Case x sera vuide. Celle de la Pointe ne pouvant l'être, la déterminatrice donnera $t = Cx^{-1}$.

```
            o
          o o
        o o o
      * * * o
    ● ● ● ● *
```

La Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ *&c.* marque deux Branches hyperboliques étenduës dans les angles asymptotiques opposés.

2. S'il y a trois racines, on raisonnera de la même maniére sur chacune d'elles, & on conclura qu'elles indiquent trois Asymptotes parallèles à la Droite représentée par l'éq: $y - Ax = 0$, & accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, qui se jettent dans les angles asymptotiques opposés.

3. S'il y a une racine simple $u = B$, & une double $u = B'$, la racine simple donne, comme n°. 1 & 2, une Asymptote droite avec deux Branches hyperboliques. Mais pour la double, on substituera $B' + t$ à u, & on aura une seconde transformée, à laquelle manquent les termes x & tx. La déterminatrice, partant de la Case t^2x, portera

```
            ●
          o o
        o o o
      * * o o
    ● ● ● ● *
```

sur la Pointe, qui ne sauroit être vuide, & donnera $t = \pm\sqrt{C'x^{-1}}$. La Série, dès lors réguliére, $y = Ax + B'$

$+B'\pm\sqrt{C'x^{-1}}$ &c. marque deux Branches hyperboli- CH. IX.
ques qui embrassent, pour ainsi dire, leur Asymptote. §. 156.
Il y a donc ici deux Asymptotes, accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, mais dont les unes se jettent dans les angles asymptotiques de suite, & les autres dans les angles asymptotiques opposés.

4. Si l'équation cubique, que fournit la déterminatrice de T, n'a qu'une racine triple $u=B''$, il manquera les termes x, tx & t^2x à la transformée qui résulte de la substitution de $B''+t$ à u dans T. La déterminatrice, partant

```
            o
         o  o
      o  o  o
   *  o  o  o
●  ●  ●  ●  *
```

de la Case t^3x, passera par la Pointe, & donnera $t=C''x^{-1:3}$. La Série $y=Ax+B''+C''x^{-1:3}$ &c. indique deux Branches hyperboliques jettées dans les angles asymptotiques opposés.

Ainsi joignant aux Branches infinies qu'indique la racine double de l'éq: *Æ*, les deux Branches hyperboliques marquées par la racine simple, il se trouve sept Classes de Courbes renfermées dans ce VII[e]. *Cas.*

La 1[e]. & la 3[e]. sont des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & deux Branches hyperboliques. N[os]. I & III.

La 2[e]. est des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques autour de deux Asymptotes non parallèles. N°. II.

La 4[e]. & 7[e]. sont des Courbes qui ont quatre Bran-

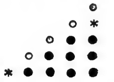
CH. IX. §. 156. ches hyperboliques autour de deux Asymptotes non parallèles. N°. IV, 1 & 4.

La 5e. présente trois Asymptotes parallèles coupées par une quatriéme, chaque Asymptote ayant deux Branches hyperboliques. N°. IV, 2.

Et la 6e. n'a que deux Asymptotes parallèles coupées par une troisiéme, ayant chacune deux Branches hyperboliques. N°. IV, 3.

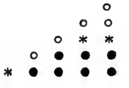
Cas VIII. Quand l'éq: Æ n'a qu'*une seule racine quadruple* $y - Ax = o$; en substituant $Ax + u$ à y, on la transforme en une équat. (T), dans le plus haut Rang de laquelle, il n'y a que la Case u^4 qui soit pleine.

I. Si, dans le troisiéme Rang, la Case x^3 est remplie, la déterminatrice donnera $u = \pm \sqrt[4]{Bx^3}$, & dès lors, la



Série $y = Ax \pm \sqrt{Bx^3}$ *&c.* est réguliére. Elle indique deux Branches paraboliques, qui embrassent, pour ainsi dire, la Droite [$y = Ax$] parallèle à leur derniére direction.

II. Si, dans le troisiéme Rang, la Case x^3 est vuide,



mais

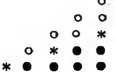
mais non pas la Case ux^2, on a deux déterminatrices, qui donnent, l'une $u = \sqrt[3]{B'x^2}$, l'autre $u = B$. La premiére marque deux Branches paraboliques, qui, d'un même côté de la Droite [$y = Ax$] parallèle à leur derniére direction, se jettent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. L'autre indique une Asymptote-droite, dont l'équation est $v = Ax + B$, & pour avoir le genre des Branches hyperboliques qui l'accompagnent, on substituera $B + t$ à u, & on aura une seconde transformée dont la Case x^2 sera vuide. Si la Case x est pleine, on aura Ch. IX. §. 156.

o
o o
o * o
o ● ● *
* ● ● ● ●

o
o o
o * o
● ● ● o
* ● ● ● *

$t = Cx^{-1}$. Si elle est vuide, on aura $t = Cx^{-2}$. Ainsi ce N°. II présente des Courbes qui ont deux Branches hyperboliques & deux Branches paraboliques.

III. Si, dans la transformée T, il manque au troisiéme Rang les Cases x^3 & ux^2, la déterminatrice passera par les Cases u^4, u^2x & x^2, & donnera une équation du second dégré, qui aura ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles simples, ou une racine double.

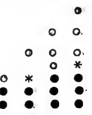


1. Si elles sont imaginaires, la Série est imaginaire, & la Courbe finie.

 2. S'il

CH. IX. §. 156. 2. S'il y a deux racines réelles $uu - Bx = 0$, $uu - B'x = 0$, ou $u = \pm\sqrt{Bx}$, $u = \pm\sqrt{B'x}$, on a quatre Séries $y = Ax + \sqrt{Bx}$ &c. $y = Ax + \sqrt{B'x}$ &c. $y = Ax - \sqrt{Bx}$ &c. $y = Ax - \sqrt{B'x}$ &c. qui marquent quatre Branches paraboliques, qui ont toutes leur derniére direction parallèle à une même Droite [$y = Ax$], qu'elles embrassent. Ces quatre Branches se jettent d'un même côté de l'Axe des ordonnées, si B & B' ont le même signe; elles se jettent deux d'un côté & deux de l'autre, si B & B' ont des signes contraires.

3. S'il n'y a qu'une racine double $uu - B''x = 0$, ou $u = \pm\sqrt{B''x}$, la Série n'est pas réguliére dès ce second terme. On substituera donc $\pm\sqrt{B''x} + t$ à u dans T, & on aura une seconde transformée (V) dont les Cases x^2 & $tx^{3:2}$ restent vuides. Si la Case $x^{3:2}$ est pleine, la dé-

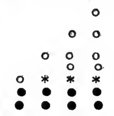


terminatrice passant par t^2x & $x^{3:2}$ donnera $t = \pm\sqrt{C\sqrt{B''x}}$, où il faut remarquer qu'on ne peut pas employer les deux valeurs de $\pm\sqrt{B''x}$, mais celle seulement qui multipliée par C fait un produit positif, dont la racine $\sqrt{C\sqrt{B''x}}$ n'est pas imaginaire. Il n'y aura donc que deux Séries $y = Ax + \sqrt{B''x} + \sqrt{C\sqrt{B''x}}$ &c & $y = Ax + \sqrt{B''x} - \sqrt{C\sqrt{B''x}}$ &c. ou $y = Ax - \sqrt{B''x} + \sqrt{C\sqrt{B''x}}$ &c. & $y = Ax - \sqrt{B''x} - \sqrt{C\sqrt{B''x}}$ &c, qui désignent deux Branches paraboliques jettées dans un seul des quatre angles, que fait avec l'Axe des ordonnées la Droite $y = Ax$.

Lises

Elles ont pour Parabole-asymptote une des Branches de la Parabole exprimée par l'éq : $v = Ax \pm \sqrt{B''x}$. CH. IX. §. 156.

Mais si, dans la transformée V, la Case $x^{1:2}$ se trouve vuide, la déterminatrice couchée sur la Bande x, dont la



Case u^2x est vuide, donnera une équation de cette forme $\alpha u^2x + \beta ux + \gamma x = 0$, ou $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$, qui peut avoir, ou deux racines imaginaires, ou deux réelles simples, ou une double.

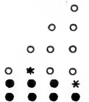
1). Si ces racines sont imaginaires, les Branches infinies le sont aussi.

2). Si elles sont réelles $t = C$, $t = C'$, on aura deux Séries réguliéres dès le troisiéme terme, $y = Ax \pm \sqrt{B''x} + C + \frac{D}{\sqrt{B''x}}$ &c, $y = Ax \pm \sqrt{B'x} + C' + \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$ &c, qui marquent quatre Branches paraboliques, dont les derniéres directions sont parallèles, & qui ont pour Asymptote-courbe, les unes la Parabole $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C$, les autres la Parabole $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C'$.

3). Mais s'il n'y a qu'une racine simple $t = C''$, la Série, qui commence par les trois termes $Ax \pm \sqrt{B''x} + C''$ n'est pas encore réguliére. Il faut substituer $C'' + s$ à t dans V, & on aura une troisiéme transformée (X) à laquelle manqueront les termes x & sx. Donc, si la Case $x^{1:2}$ n'est pas vuide, la déterminatrice donnera $s =$

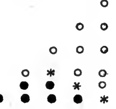
 $\pm \sqrt{Dx}$

CH. IX.
§. 156.



$\pm\sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$, expreſſion où l'on ne doit prendre qu'une des deux valeurs de $\pm\sqrt{B'x}$; celle qui fait avec Dx^{-1} un produit négatif étant excluë, parce que la racine de ce produit ſeroit imaginaire. Il y a donc deux Séries $y = Ax + \sqrt{B''x} + C'' + \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. & $y = Ax + \sqrt{B''x} + C'' - \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. ou $y = Ax - \sqrt{B''x} + C'' + \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. & $y = Ax - \sqrt{B''x} + C'' - \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. qui marquent deux Branches paraboliques, dans un même angle, & dont l'Aſymptote-courbe eſt une des deux Branches de la Parabole $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C''$.

Que ſi la Caſe $x^{1:2}$ de l'éq : X ſe trouve vuide, la déterminatrice paſſant par les Caſes s^2x, $sx^{1:2}$ & par la



Pointe, donnera une équation du ſecond dégré, de laquelle, au moyen d'un raiſonnement ſemblable à celui qu'on vient de faire, on conclura, que,

(1). Si

(1). Si elle n'a que des racines imaginaires, la Courbe n'a point de Branches infinies. Ch. IX. §. 156.

(2). Si elle a deux racines réelles $s = \pm \frac{D}{\sqrt{B''x}}$, $s = \pm \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$, on aura quatre Séries $y = Ax + \sqrt{B''x + C''} + \frac{D}{\sqrt{B''x}}$ &c. $y = Ax + \sqrt{B''x + C''} - \frac{D}{\sqrt{B''x}}$ &c. $y = Ax - \sqrt{B''x + C''} + \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$ &c. $y = Ax - \sqrt{B''x + C''} - \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$ &c. qui indiquent quatre Branches paraboliques, dont l'Asymptote-courbe est la Parabole représentée par l'éq : $v = Ax \pm \sqrt{B''x + C''}$.

(3). Mais s'il n'y a qu'une racine double $s = \pm \frac{D''}{\sqrt{B''x}}$, la Série $y = Ax \pm \sqrt{B''x + C''} \pm \frac{D''}{\sqrt{B''x}}$ &c. n'est pas encore réguliére, & pour avoir le terme suivant, il faut substituer $\pm \frac{D''}{\sqrt{B''x}} + r$ à s dans X, &c. & les mêmes conclusions que ci-dessus reviennent à l'infini.

Il y a donc une infinité de genres de Courbes comprises sous ce N°. III, mais qui se peuvent réduire à trois Classes.

1e. Celles qui n'ont point de Branches infinies: 1, 1), (1).

2e. Celles qui ont quatre Branches paraboliques: 2, 2), (2).

3e. Celles qui n'en ont que deux, étenduës dans un seul des quatre angles que fait avec l'Axe des ordonnées la Droite parallèle à leur derniére direction: 3, 3), (3).

IV. S'il

Ch. IX. §. 156. IV. S'il manque, dans la transformée T, toutes les Cases de la Bande x^2 ; elle aura deux déterminatrices. La

. o
o o
o o o
o * * *
* ● ● ● ●

prémiére, qui passe par les Cases u^4 & u^2x, donne $u = \pm \sqrt{Bx}$, & la Série $y = Ax \pm \sqrt{Bx}$ &c. qui en résulte, réguliére dès le second terme, indique deux Branches paraboliques, qui embrassent la Droite $[y = Ax]$ parallèle à leur derniére direction. La seconde, couchée sur la Bande x, donne une équation du second dégré, qui présente trois Cas. Car

1°. Si les racines sont imaginaires, la Série l'est aussi. La Courbe n'aura donc que les deux Branches paraboliques indiquées par la prémiére déterminatrice.

2°. Si les racines sont réelles & inégales $u = B$, $u = B'$, on aura deux Séries réguliéres $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. $y = Ax + B' + C'x^{-1}$ &c. qui marquent deux

. o
o o
o o o
o * * o
* ● ● ● *

Asymptotes parallèles, qui ont chacune deux Branches étenduës dans les angles asymptotiques opposés; auxquelles il faut joindre les deux Branches paraboliques de la prémiére déterminatrice.

3°. Si

3°. Si ſes racines ſe réduiſent à une ſeule double $u = B''$; en ſubſtituant $B'' + t$ à u, on aura une ſeconde transformée, qui n'aura ſur la bande x que le terme t^2x. La ſeconde déterminatrice donnera donc $t = \pm\sqrt{C^{iv}x^{-1}}$. Ch. IX. §. 156.

```
            o
          o   o
        o   o   o
      o   *   o   o
    *   ●   ●   ●   *
```

La Série $y = Ax + B'' \pm \sqrt{C^{iv}x^{-1}}$ *&c.* indique deux Branches hyperboliques, qui embraſſent leur Aſymptote droite exprimée par l'éq : $v = Ax + B''$, & qu'on joindra aux deux Branches paraboliques de la prémiére déterminatrice.

V. Qu'il manque à la transformée T les Caſes x^4, ux^3, u^2x^2 & u^3x du quatriéme rang, les Caſes x^3, ux^2, & u^2x du troiſiéme, & la Caſe x^2 du ſecond, elle aura encore

```
            o
          o   o
        o   o   o
      o   o   *   *
    *   ●   ●   ●   ●
```

deux déterminatrices. L'une, paſſant par u^4 & ux, donne $u = Bx^{1:3}$, & ſa Série $y = Ax + Bx^{1:3}$ marque deux Branches paraboliques dont la derniére direction eſt la Droite $y = Ax$, & qui ſe jettent dans deux angles oppoſés de ceux que fait cette Droite avec l'Axe des ordonnées. L'autre déterminatrice donne $u = B'$, & par une nouvelle transformée $t = C'x^{-1}$. Sa Série $y = Ax + B' +$

Ch.IX. $B' + C'x^{-1}$ &c. marque deux Branches hyperboliques §.156. étenduës dans les angles asymptotiques opposés. Ces Courbes ont donc deux Branches paraboliques & deux hyperboliques.

VI. Enfin, il peut encore manquer à la transformée $\dot{T}$ la Case ux, & alors elle n'a qu'une déterminatrice, qui

```
            o
          o o
        o o o
      o o o *
    * ● ● ● ●
```

donne $u = \pm \sqrt[4]{Bx}$. Elle indique deux Branches paraboliques, qui embrassent la Droite [$y = Ax$] parallèle à leur derniére direction.

On ne peut pas supposer, qu'avec toutes les Cases supposées vuides, il manque encore à la transformée T la Case x. Car T seroit réduite à la seule Bande sans x, & n'exprimeroit que quatre Droites parallèles. La proposée ne désigneroit donc que ces Droites, & non pas une Courbe du quatriéme Ordre.

Ainsi toutes les Courbes de ce VIIIe. *Cas* se réduisent à dix Classes.

La 1e. n'a que deux Branches paraboliques. N°. I.

La 2e. a deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, N°. II.

La 3e. n'a point de Branches infinies, N°. III, 1, 1), (1).

La 4e. a quatre Branches paraboliques, N°. III, 2, 2), (2).

La 5e. n'a que deux Branches paraboliques, N°. III, 3, 3), (3).

La

La 6e. a auſſi deux Branches paraboliques, N°. IV, 1.

La 7e. a deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques autour de deux Aſymptotes parallèles, N°. IV, 2.

La 8e. a deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, N°. IV, 3.

La 9e. de même, N°. V.

Et la 10e. a ſeulement deux Branches paraboliques, N°. VI.

Ces dix Claſſes ſe peuvent, ſi l'on veut, réduire à cinq, en réuniſſant la 1e, la 5e, la 6e, & la 10e; & la 2e, la 8e, & la 9e.

157. Il paroit que ce ſeroit une choſe infinie, que l'énumération de tous les Genres des Courbes du quatriéme Ordre pouſſée au même détail où nous ſommes entrés pour les Courbes du troiſiéme Ordre. Mais en ſe bornant aux *Claſſes générales*, dont la diviſion eſt fondée ſur le nombre & le caractére hyperbolique ou parabolique des Branches infinies, on peut les réduire à neuf.

La 1e. Claſſe ſera des Courbes finies. Telles ſont celles du *Cas I*: *Cas IV*, Claſſe 1: *Cas V*, Claſ. 1: & *Cas VIII*, Claſ. 3.

La 2e. eſt des Courbes qui n'ont que deux Branches paraboliques, *Cas IV*, Cl. 2: *Cas V*, Cl. 2: & *Cas VIII*, Cl. 1, 5, 6, & 10.

La 3e. eſt des Courbes qui ont deux Branches hyperboliques. *Cas IV*, Cl. 3, & *Cas V*, Cl. 3.

La 4e. eſt des Courbes, qui ont quatre Branches paraboliques ſous une même derniére direction, *Cas VIII*, Cl. 4, ou ſous deux différentes derniéres directions; *Cas V*, Cl. 6.

La 5e. eſt des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, ſoit que l'Aſymptote de celles-ci ſoit parallèle à la derniére direction de celles-là;

CH. IX. §. 157. *Cas VIII*, Cl. 2, 8, & 9: soit qu'elle ne leur soit pas parallèle; *Cas V*, Cl. 7, & *Cas VII*, Cl. 1 & 3.

La 6e. est des Courbes qui ont quatre Branches hyperboliques. Elle se subdivise en trois, 1°. Celles qui n'ont qu'une Asymptote, *Cas IV*, Cl. 4: & *Cas V*, Cl. 4. 2°. Celles qui ont deux Asymptotes parallèles, *Cas IV*, Cl. 5; & *Cas V*, Cl. 5. 3°. Celles qui ont deux Asymptotes non parallèles, *Cas II*: *Cas V*, Cl. 10: *Cas VI*, Cl. 1: & *Cas VII*, Cl. 4 & 7.

La 7e. est des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & quatre Branches hyperboliques: celles-ci 1°. n'ayant qu'une Asymptote, *Cas V*, Cl. 8: ou 2°. ayant deux Asymptotes parallèles, *Cas V*, Cl. 9: & *Cas VIII*, Cl. 7: ou 3°. ayant deux Asymptotes non parallèles, *Cas VI*, Cl. 2, & *Cas VII*, Cl. 2.

La 8e. est des Courbes qui ont six Branches hyperboliques. Elle a aussi trois subdivisions. 1°. de celles qui n'ont que deux Asymptotes, non parallèles, *Cas V*, Cl. 11. 2°. de celles qui ont trois Asymptotes, dont deux sont parallèles, *Cas V*, Cl. 12: & *Cas VII*, Cl. 6. 3°. de celles qui ont trois Asymptotes non parallèles, *Cas VI*, Cl. 3.

Enfin la 9e. est des Courbes qui ont huit Branches hyperboliques. On en peut faire sept subdivisions. 1°. Celles qui n'ont que deux Asymptotes, non parallèles, *Cas V*, Cl. 13. 2°. Celles qui ont trois Asymptotes, dont deux sont parallèles, *Cas V*, Cl. 14. 3°. Celles qui ont trois Asymptotes non parallèles, *Cas VI*, Cl. 4. 4°. Celles qui ont quatre Asymptotes, dont trois sont parallèles, *Cas VII*, Cl. 5. 5°. Celles qui ont quatre Asymptotes parallèles deux à deux, *Cas V*, Cl. 15. 6°. Celles qui ont quatre Asymptotes, dont deux seulement sont parallèles, *Cas VI*, Cl. 5. 7°. Celles qui ont quatre Asymptotes non parallèles, *Cas III*.

158. En

158. En ſuivant la même route, & au moyen de quelques abregés, il paroit qu'on pourroit diſtribuer les Courbes du cinquiéme Ordre en onze *Claſſes*. Ch. IX. §. 158.

La 1e. des Courbes qui n'ont que deux Branches paraboliques.

La 2e. des Courbes qui n'ont que deux Branches hyperboliques.

La 3e. de celles qui ont quatre Branches paraboliques.

La 4e. de celles qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques.

La 5e. de celles qui ont quatre Branches hyperboliques dont les deux Aſymptotes ſeront ou parallèles, ou non parallèles.

La 6e. de celles qui ont ſix Branches infinies, quatre paraboliques & deux hyperboliques.

La 7e. de celles qui ont auſſi ſix Branches infinies, mais deux paraboliques & quatre hyperboliques; autour d'une ſeule Aſymptote; ou autour de deux Aſymptotes parallèles; ou autour de deux Aſymptotes non parallèles.

La 8e. de celles qui ont ſix Branches hyperboliques; autour de deux Aſymptotes non parallèles, dont l'une eſt accompagnée de deux Branches & l'autre de quatre; ou bien autour de trois Aſymptotes, qui peuvent être parallèles; ou dont deux ſeulement ſeront parallèles; ou qui ne ſeront point parallèles.

La 9e. de celles qui ont deux Branches paraboliques & ſix hyperboliques autour des mêmes Aſymptotes que dans la Claſſe précédente.

La 10e. eſt de celles qui ont huit Branches hyperboliques; ou autour de trois Aſymptotes non parallèles; ou dont deux ſont parallèles, la troiſiéme ayant quatre Branches, & les parallèles chacune deux; ou autour de quatre Aſymptotes qui ont chacune deux Branches, & deſquelles trois peuvent être parallèles & coupées par la quatriéme;

 ou.

CH. IX. §. 158. ou dont deux ſeulement ſont parallèles ; ou qui ſont parallèles deux à deux ; ou enfin qui ne ſont point parallèles.

Et la 11e, eſt de celles qui ont dix Branches hyperboliques ; ou autour de trois Aſymptotes non parallèles, dont une n'a que deux Branches, & les deux autres chacune quatre Branches ; ou autour de quatre Aſymptotes, dont trois peuvent être parallèles, & ayant chacune deux Branches ſont coupées par la quatriéme qui en a quatre ; ou bien dont deux ſeulement ſont parallèles & coupées par les deux autres, une deſquelles a quatre Branches ; ou autour de cinq Aſymptotes, qui peuvent, ou n'être point parallèles, ou n'en avoir que deux parallèles ; ou en avoir trois ; ou en avoir deux couples de parallèles coupées par la cinquiéme ; ou en avoir trois parallèles coupées par les deux autres auſſi parallèles.

159. DONC, pour recapituler le tout,

I. La Ligne du prémier Ordre a deux Branches infinies rectilignes.

II. Dans le 2e. Ordre, il y a une Courbe finie, une infinie avec deux Branches paraboliques, & une avec quatre Branches hyperboliques.

III. Dans le 3e. Ordre, il y a des Courbes qui ont deux Branches paraboliques [*Genres* 12 & 14] ; d'autres qui n'ont que deux Branches hyperboliques [*G.* 1, 2, & 9]; d'autres qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques [*G.* 7, 8, & 13]; d'autres qui ont quatre Branches hyperboliques [*G.* 11] ; & d'autres qui en ont ſix [*G.* 3, 4, 5, 6 & 10].

IV. Dans le 4e. Ordre, on trouve des Courbes finies [*Cl.* 1]; d'autres, qui ont deux Branches infinies, ou paraboliques [*Cl.* 2], ou hyperboliques [*Cl.* 3] : d'autres qui ont quatre Branches infinies, ou paraboliques [*Cl.* 4],

ou

hyperboliques [*Cl.* 6], ou moitié paraboliques & moitié hyperboliques [*Cl.* 5]; d'autres, qui ont ſix Branches infinies, ou toutes hyperboliques [*Cl.* 8], ou quatre hyperboliques & deux paraboliques [*Cl.* 7]: & d'autres enfin, qui ont huit Branches infinies, toutes hyperboliques [*Cl.* 9]. CH. IX. §. 159.

V. Dans le 5e. Ordre, il y a des Courbes qui n'ont que deux Branches infinies, ou paraboliques [*Cl.* 1], ou hyperboliques [*Cl.* 2]: il y en a qui ont quatre Branches infinies, paraboliques [*Cl.* 3], hyperboliques [*Cl.* 5], ou mi-parties [*Cl.* 4]; il y en a qui ont ſix Branches infinies, quatre paraboliques & deux hyperboliques [*Cl.* 6], ou deux paraboliques & quatre hyperboliques [*Cl.* 7], ou toutes ſix hyperboliques [*Cl.* 8]: il y en a qui ont huit Branches, ou deux paraboliques & ſix hyperboliques [*Cl.* 9], ou toutes huit hyperboliques [*Cl.* 10]: il y en a enfin, qui ont dix Branches infinies, toutes hyperboliques [*Cl.* 11].

160. Où l'on voit, & cette Obſervation peut faire une Régle générale, que le nombre des Branches paraboliques ne ſurpaſſe jamais l'expoſant de l'Ordre de la Courbe, ni même cet expoſant diminué de l'unité, lorſqu'il eſt impair: que le nombre des Branches hyperboliques ne ſurpaſſe jamais le double de l'expoſant de l'Ordre de la Courbe: & qu'à compter deux Branches hyperboliques pour une ſeule, le nombre des Branches infinies, tant paraboliques qu'hyperboliques, ne ſurpaſſe jamais l'expoſant: ce dont la raiſon n'eſt pas difficile à pénétrer par les principes établis dans le Chap. précéd.

CHAPI-

CHAPITRE X.

Des Points ſinguliers : Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpentement.

161. LE NOMBRE, l'eſpèce & la poſition des Branches infinies diſtinguent les Courbes des différens Ordres en leurs Claſſes & Genres. Ces Genres ſe ſubdiviſent en Eſpèces par les varietés, qui conſiſtent en ce que les Courbes ont de remarquable dans un eſpace fini, & qui ſe réduiſent principalement à des *Points ſinguliers*. On donne ce nom aux Points qui ſe diſtinguent des autres Points de la même Courbe par quelque choſe de particulier.

Tout Point d'une Courbe eſt ſimple ou multiple. On apelle *Point ſimple*, celui qui n'apartient qu'à une ſeule Branche de la Courbe, & *Point multiple*, celui qui eſt commun à pluſieurs Branches. En particulier, on nomme *Point double* celui qui eſt commun à deux Branches ; *Point triple* celui qui apartient à trois ; *Point quadruple*, &c.

On voit déjà que les Points multiples ſont ſinguliers. Les Points ſimples le ſont auſſi, lorſqu'ils ſont *Points d'Inflexion*, ou *Points de Serpentement.*

162. Pour entendre ce que c'eſt qu'une *Inflexion* & un *Serpentement*, & quels ſont leurs différens dégrés; on conſidérera qu'une Droite *coupe* une Ligne, quand elle la traverſe au point où elle la rencontre, & qu'elle laiſſe une partie de la Ligne d'un côté & une partie de l'autre. Cette Droite s'apelle *Sécante.*

Une

CH. X. §. 162. Une Sécante peut rencontrer la Courbe en plus d'un point. Si deux *Points de Section* s'aprochent infiniment l'un de l'autre, en sorte qu'ils se réunissent & se confondent en un seul, la Sécante devient *Tangente*, & les deux Points de section réunis ne font plus qu'un seul *Point de contact*, ou *d'attouchement*. PL. XVI.

Soit, par ex., un Cercle AEB décrit sur le diamétre AB, qui coupe la Circonférence en deux Points A, B, éloignés de toute la distance AB. Si l'on imagine que ce diamétre vient à se mouvoir parallèlement à lui-même, & qu'il passe dans la situation CD; les Points de section se sont aprochés l'un de l'autre, car la chorde CD est plus petite que le diamétre AB. S'il continuë à se mouvoir en cd, les Points de section se raprochent toûjours plus, parce qu'une chorde est d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée du centre; jusqu'à ce que ce diamétre étant passé en $x\delta$, il cesse de couper la circonférence, mais il la touche au Point E, où l'on peut feindre qu'il la coupe en deux points infiniment proches l'une de l'autre; parce qu'en effet couper en deux Points réunis, c'est toucher en un seul Point. Fig. 111.

Une Tangente est donc censée rencontrer en deux Points la Courbe qu'elle touche, mais en deux Points infiniment proches l'un de l'autre, & coïncidents. Ainsi dans les Courbes du second Ordre, la Tangente ne peut rencontrer la Courbe qu'au seul Point d'attouchement: car si elle la rencontroit en un autre Point, elle seroit censée la rencontrer trois fois; ce qui n'est pas possible dans une Ligne de cet Ordre [§. 39].

163. Mais dans les Lignes des Ordres supérieurs, la Tangente peut encore rencontrer la Courbe qu'elle touche. Si trois Points de section se réunissent, la Droite qui passe par ces trois Points réunis, ou infiniment pro-

PL. XVI. ches, touche & coupe en même tems la Courbe, & le Point où ils se réunissent est un *Point d'Inflexion.* CH. X. §. 163.

Fig. 112. Soit, par ex. AdD une Parabole cubique représentée par l'éq: $y = ax^3$. Et soit conçuë au point D une Tangente, qui coupe encore la Courbe en E. Si cette Tangente glisse le long de la Parabole, la touchant toûjours plus près de l'origine A; quand elle sera parvenuë en de, le Point de section e se sera aproché du Point de contact d. Et il s'en aprochera toujours plus, jusqu'à-ce que ces deux Points coïncident en A; lorsque la Tangente, parvenuë dans la situation BA, touche & coupe la Courbe en un même Point A, où l'on peut concevoir trois Points réunis, sç. le Point de section & les deux Points auxquels est équivalent le Point d'attouchement.

Le Point A est apellé *Point d'Inflexion*, parce qu'en ce point la Courbe est comme pliée & fléchie; la Branche, qui est d'une part, tournant sa concavité du même côté vers lequel la Branche, qui est de l'autre part, tourne sa convexité.

On verra peut-être plus sensiblement que toucher en un Point d'Inflexion est une chose équivalente à couper trois Points réunis, si on se représente la même Parabole

Fig. 113. DdAeE, par l'Origine A de laquelle on a mené une Droite DAE oblique aux coordonnées, & qui rencontre la Courbe en deux autres Points D, E. Que cette Droite vienne à tourner sur le Point A, & à s'aprocher de la Ligne des abscisses, en passant de DAE en dAe. Les Points de section d, e, se sont aprochés de l'Origine A, & s'en aprocheront toujours plus, jusqu'à-ce que la Droite DAE étant enfin passée dans la situation BAb, qui est celle de l'Axe des abscisses, les trois Points de section D, A, E sont confondus en un seul Point A d'Inflexion.

La Tangente au Point d'Inflexion est donc censée rencontrer

Ch. X. §. 163. contrer la Courbe en trois Points. Donc les Lignes du Pl. XVI. second Ordre ne sont pas susceptibles d'Inflexion [§. 39]. Et dans celles du troisiéme Ordre, la Tangente au Point d'Inflexion ne peut plus rencontrer la Courbe.

164. Mais dans les Lignes du quatriéme Ordre & des Ordres supérieurs, une Tangente AB en un Point d'Infle- Fig. 114. xion A peut encore rencontrer la Courbe, comme en B. Si, par quelque supposition, la distance AB devient infiniment petite Ab, la Droite AB ne coupe plus la Courbe, elle ne fait que la toucher. Mais ce contact est équivalent à quatre intersections, ou à deux attouchemens simples, infiniment proches l'un de l'autre. L'Inflexion ne paroit plus, quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit, & qu'elle soit sensible à l'Analyse, dont la vuë, si l'on ose parler ainsi, est plus perçante que la nôtre. On donne à ces Points le nom de *Points de double Inflexion*, ou *Points de Serpentement* *.

165. De même, le *Point de triple Inflexion* est celui dans le contact duquel se réunissent cinq intersections : Et dans l'attouchement du *Point de quadruple Inflexion*, ou *de double Serpentement* sont censés confondus six Points de section. En général, la multiplicité de l'Inflexion se compte par le nombre des intersections, moins deux, qui se réunissent dans le contact de ce Point-là : & la multiplicité du Serpentement par la moitié du nombre des intersections moins deux, qui sont censées confonduës dans le contact de ce Point-là.

166. Il est aisé de voir que les Inflexions sont alternativement visibles & invisibles, en passant d'un degré à l'autre

* Mr. de Maupertuis, *Mem. de l'Acad.* 1729. p. 277.

PL. XVI. l'autre * : que les simples, les triples, les quintuples, & en général celles d'un dégré impair, sont visibles; parce qu'en ce Point-là la Courbe change sa convexité en concavité, & que la Tangente y est en même Sécante. Mais que les Inflexions doubles, les quadruples, & en général celles d'un dégré pair, sont invisibles, & ne différent en rien, à la vûë, des simples Points de la Courbe : ils ne sont reconnoissables que par les effets que leur existence produit dans le Calcul. C'est proprement ces *Points d'Inflexion invisible* qu'on nomme *Points de Serpentement*. CH. X. §. 166.

167. Il suit de là, que les Lignes les plus simples, qui soient susceptibles d'une Inflexion du dégré t, sont celles de l'Ordre $t+2$: parce qu'une Droite, qui touche une Courbe en un Point d'Inflexion du dégré t, est censé la rencontrer en $t+2$ Points [§. 165]. Que les Lignes les plus simples, qui soient susceptibles d'un Serpentement du dégré v, sont les Lignes de l'Ordre $2v+2$ [§. 165]. Et que dans les Lignes de l'Ordre $t+2$, ou $2v+2$, la Droite qui les touche en un Point d'Inflexion du dégré t, ou en un Point de Serpentement du dégré v, ne peut plus les rencontrer [§. 39].

168. On trouvera des Exemples de toutes ces espèces de Points simples, dans les Sommets des Paraboles dont l'équation est $y=x^b$, b étant un nombre entier & positif.

I. La Parabole ordinaire $y=xx$ n'a au sommet qu'un Point tout simple, sans Inflexion, ni Serpentement. Aussi, faisant $y=0$, on a $xx=0$, qui n'a que deux racines $x=0$, $x=0$; d'où il paroit que l'Axe des abscisses ne

* *Hist. de l'Acad.* 1730. pag. 72.

Ch. X. §. 168. ne rencontre la Courbe au sommet que deux fois, qu'il la touche simplement. Pl. XVI.

II. Mais la Parabole cubique $y = x^3$ a une Inflexion à l'Origine. C'est pourquoi $y = 0$ donne $x^3 = 0$, dont les trois racines égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, montrent que la Ligne des abscisses rencontre trois fois la Courbe à l'Origine, qu'elle y est en même tems Tangente & Sécante. Fig. 115.

On le verra clairement, si, au lieu de l'éq : $y = x^3$, on prend $y = x^3 - bx^2$, qui représente une Courbe que l'Axe des abscisses touche à l'Origine A & rencontre au point B. Car, faisant $y = 0$, on aura $x^3 - bx^2 = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. Ainsi l'Axe rencontre deux fois la Courbe en A, [c'est-à-dire, il l'y touche], & une fois en B à l'extrémité de l'abscisse $AB = b$. Mais si l'on conçoit que b diminuë par dégrés, le point B s'aproche de A, jusqu'à-ce que b devenant zéro, B tombe sur A ; l'éq : $y = x^3 - bx^2$ deviendra $y = x^3$, dans laquelle la supposition de $y = 0$ donne à x trois valeurs égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, parce que l'Axe des abscisses rencontre trois fois la Courbe au point A devenu Point d'Inflexion. Fig. 116.

Ou bien, qu'au lieu de l'éq: $y = x^3$, on prenne $y = x^3 - b^2x$. Cette équation exprime une Courbe, qui coupe trois fois l'Axe des abscisses, sç. à l'Origine A, & aux points B, b, extrémités des abscisses $AB = -b$, & $Ab = b$; car $y = 0$ donne $x^3 - b^2x = 0$, qui a trois racines, $x = 0$, $x = b$, $x = -b$. Si donc b diminuë jusqu'à s'anéantir, les points B & b s'aprochent de l'Origine jusqu'à se confondre avec le Point A. Alors l'éq : $y = x^3 - bbx$ se réduit à $y = x^3$, & ses trois racines $x = 0$, $x = b$, $x = -b$ se réduisent à $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$; ce qui marque un Point d'Inflexion à l'Origine. Fig. 117.

Pl. XVI. III. La Parabole quarré-quarrée, $y = x^4$ a un Point Ch. X. de Serpentement, ou de double Inflexion, à l'Origine. §. 168. Car $y = 0$ donne $x^4 = 0$, dont les quatre racines égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$ marquent que l'Axe des abscisses rencontrera quatre fois la Courbe à l'Origine : & qu'ainsi ce Point, étant un Point simple, est Point de Serpentement.

Cela sera rendu sensible, en substituant à l'éq: $y = x^4$, Fig. 118. l'éq: $y = x^4 - bx^3$, qui représente une Courbe, que l'Axe des abscisses touche à l'Origine A en un Point d'Inflexion, & coupe en un point B éloigné de A de la distance $AB = b$. Car $y = 0$ donne $x^4 - bx^3 = 0$, dont les racines sont $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. Mais à mesure que b diminuë, B s'aproche d'A, avec lequel il se confond enfin, quand b, devenu zéro, rend la racine $x = b$, égale aux trois autres $x = 0$. La Courbe bADB change alors son équat : $y = x^4 - bx^3$ en celle-ci $y = x^4$ & devient par conséquent une Parabole quarré-quarrée bAd, dont l'Origine A est un Point de Serpentement, ou de double Inflexion, puisqu'aux trois Points de section que renfermoit déjà le sommet A, il s'y joint encore celui qui étoit en B.

Fig. 119. On peut aussi, au lieu de $y = x^4$, prendre l'éq: $y = x^4 - (bb + cc)x^2 + bbcc$. Elle représente une Courbe, qui coupe quatre fois l'Axe des abscisses, sç. en c, b, B, & C, extrémités des abscisses $Ac = -c$, $Ab = -b$, $AB = b$, $AC = c$: car $y = 0$ donne $x^4 - (bb + cc)x^2 + bbcc = 0$, qui a ces quatre racines $x = c$, $x = -c$, $x = b$, $x = -b$. A mesure que b diminuera, les points B & b s'aprocheront de A, & s'y réuniront quand Fig. 120. b sera zéro. Alors la Courbe, dont l'équation est $y = x^4 - ccxx$, touche l'Axe des abscisses à l'Origine A, où ce contact réunit les deux intersections B, b, & elle continuë à le couper en C, c. Aussi $y = 0$ donne $x^4 - ccxx = 0$,

CH. X. §. 168. $=0$, dont les quatre racines font $x=0$, $x=0$, $x=c$, $x=-c$. Mais si c devient aussi zéro, les deux Points de section C, c viennent encore se confondre avec les deux qui sont déja en A, & le sommet de la Courbe, qui n'est plus que la Parabole quarré-quarrée $y=x^4$, réunit les quatre intersections c, b, B, C. C'est donc un Point de Serpentement. PL. XVI.

IV. La Parabole quarré-cubique $y=x^5$ a un Point de triple Inflexion à l'origine : puisque $y=0$ donne $x^5=0$, qui a cinq racines égales à celle-ci $x=0$. L'Axe des abscisses est donc censé rencontrer cinq fois la Courbe à l'Origine, qui n'est pourtant qu'un Point simple.

Si on substitue à l'éq : $y=x^5$, l'éq : $y=x^5-(bb+cc)x^3+bbccx$, on aura une Courbe, qui coupe cinq fois l'Axe des abscisses, sç. à l'Origine A, & aux extrémités B, b, C, c, des abscisses $AB=b$, $Ab=-b$, $AC=c$, $Ac=-c$. En effet, $y=0$ donne $x^5-(bb+cc)x^3+bbccx=0$, qui a ces cinq racines, $x=0$, $x=b$, $x=-b$, $x=c$, $x=-c$. Fig. 122.

Si, dans cette équation, on fait $b=c$, ce qui la change en $y=x^5-2ccx^3+c^4x$; les deux Points de section B & C se réunissent en un Point de contact, aussi bien que les deux Points b & c. L'Axe des abscisses, qui coupe la Courbe en A & la touche en deux autres Points, est toujours censé la rencontrer cinq fois. Fig. 12_

Si, au lieu de faire $b=c$, on eut fait $b=0$, les deux Points de section B, b se seroient réunis au Point de section A, l'Origine seroit devenuë un Point d'Inflexion touché par la Ligne des abscisses, & l'équation de la Courbe seroit $y=x^5-ccx^3$. Fig. 123.

Mais, si l'on fait b & $c=0$, les cinq Points de section se confondent en un seul Point de triple Inflexion à l'Origine, & la Courbe devient la Parabole quarré-cubique dAD, dont l'équation est $y=x^5$.

On

Pl. XVI. On pourroit ſuivre à l'infini cette maniére de faire voir Ch. X.
que la Tangente au Point d'Inflexion rencontrera la Cour- §. 168.
be en deux Points de plus qu'il n'y a d'unités dans l'exposant du dégré de leur Inflexion. Et on trouvera généralement que la Parabole, dont l'équation eſt $y = x^t$, a à l'Origine une Inflexion du dégré $t - 2$, laquelle eſt viſible, ſi t eſt impair; inviſible, ſi t eſt pair : en quel cas, c'eſt un Serpentement du dégré $\frac{1}{2}t - 1$.

169. Telles ſont les ſingularités des Points ſimples. Quant aux *Points multiples*, on a déja dit [§. 161] que le *Point double* eſt celui qui eſt commun à deux Branches de la Courbe, celui par où elle paſſe deux fois. Il y a donc cette différence entre le Point double & le Point ordinaire, c'eſt que, dans le Point ordinaire, la Tangente eſt la ſeule Droite qui ſoit cenſée y rencontrer deux fois la Courbe; au lieu que toute Droite qui paſſe par un Point double eſt cenſée y rencontrer la Courbe, au moins deux fois.

Le *Point triple* eſt celui qui eſt commun à trois Branches de la Courbe, celui par lequel la Courbe paſſe trois fois. Ainſi il différe du Point d'Inflexion, en ce que dans celui-ci la Tangente eſt la ſeule Droite qui ſoit cenſée y rencontrer trois fois la Courbe; au lieu que toute Droite qui paſſe par un Point triple eſt cenſée y rencontrer la Courbe, au moins trois fois.

De même, le *Point quadruple* eſt celui par lequel la Courbe paſſe quatre fois. Toute Droite qui traverſe un Point quadruple eſt donc cenſée y rencontrer la Courbe, au moins quatre fois : ce qui fait la différence du Point quadruple au Point de Serpentement, dont la Tangente ſeule eſt cenſée y rencontrer quatre fois la Courbe.

Ceci

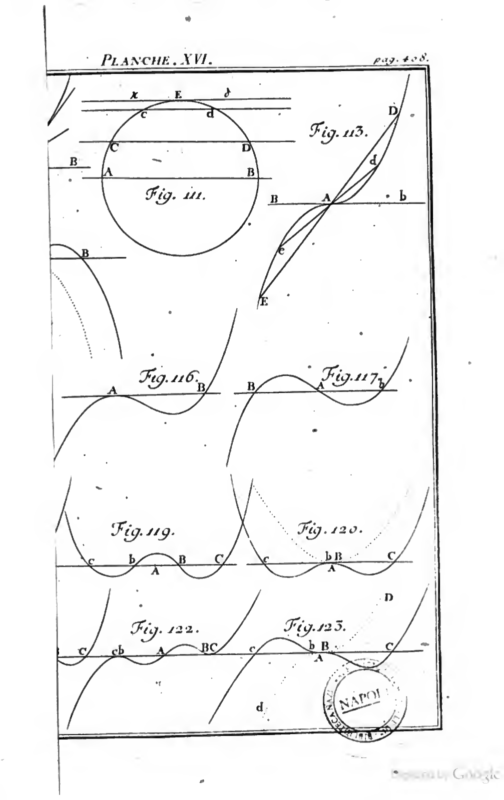


Fig. 111.
Fig. 113.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 122.
Fig. 123.

Ch. X. §. 169. Ceci s'aplique sans peine aux *Points quintuples*, & en général aux Points d'une multiplicité quelconque. Pl. XVI.

Ainsi pour savoir si un Point assigné d'une Courbe est un Point multiple, & quel est le dégré de sa multiplicité; il faut examiner combien de fois une Droite quelconque, menée par ce Point-là, y rencontre la Courbe *.

170. Pour cet effet, on supposera d'abord que l'Origine est prise sur le Point assigné, & conservant la position de l'Axe des abscisses, on donnera à celui des ordonnées une position indéterminée. Cela se fait [§. 25. n°. 2] en substituant dans l'équation de la Courbe su à y & $z + ru$ à x; $s:r$ marquant ici une raison quelconque, c'est-à-dire, une raison indéterminée. Mais, comme on ne transforme l'équation que pour savoir en combien de points la prémiére ordonnée rencontre la Courbe, ce qui se trouve en faisant $z = o$ dans la transformée [§. 15.], on peut faire cette supposition, même avant la substitution, en écrivant simplement su pour y & ru pour x. Cette substitution se fera donc en écrivant seulement s pour y, & r pour x, & multipliant chaque terme par la puissance d'u dont l'exposant est égal à la somme des exposants de x & de y dans ce terme; c'est-à-dire, en multipliant les termes du prémier Rang par u, ceux du second Rang par u^2, ceux du troisiéme par u^3, &c. De cette maniére l'équat. générale $a, + by + cx, + dyy + exy + fxx, + gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 + \&c = o$, se change en $a + (bs + cr)u + (dss + esr + frr)uu + (gs^3 + hssr + isrr + lr^3)u^3 + \&c = o$. Et cette derniére équation indique par le nombre de ses racines en combien de points une Droite quelconque passant par l'Origine rencontre la Courbe †.

* M. De Gua, *Usage de l'Anal.* pag. 88, & f.
† *Usage de l'Anal.* pag. 88.

PL. XVI. Comme on ne cherche ici qu'à savoir combien de fois cette Droite rencontre la Courbe à l'Origine ; ce n'est qu'aux racines $u=0$ qu'il faut s'arrêter : car les autres indiquent bien des points où l'ordonnée primitive rencontre la Courbe, mais ces points sont hors de l'Origine [§. 15] ; au lieu que les racines égales à zéro marquant que la Droite dont nous parlons rencontre la Courbe à l'Origine, si l'équation n'en a aucune, la Droite ne rencontre point la Courbe à l'Origine : l'Origine n'est pas un Point de la Courbe. Si l'équation n'a qu'une seule racine égale à zéro, la Droite rencontre une seule fois la Courbe à l'Origine, qui est, par conséquent, un Point de la Courbe, mais un Point simple. Si cette équation a deux, trois, quatre, ou plusieurs racines égales à zéro, la Droite quelconque, menée par l'Origine, y rencontre la Courbe, deux, trois, quatre, ou plusieurs fois : l'Origine est donc un Point double, triple, quadruple, multiple. CH. X. §. 170.

L'éq : $a+(bs+cr)u+(dss+esr+frr)uu+(gs^3+hssr+isrr+lr^3)u^3$, &c $=0$ a autant de racines égales à zéro qu'il lui manque de termes initiaux. Elle n'est pas divisible par $u=0$, elle n'a donc point de racines égales à zéro ; s'il ne lui manque le prémier terme a. Elle n'est divisible qu'une fois par $u=0$, elle n'a qu'une racine zéro ; si, le terme a manquant, elle conserve le terme $(bs+cr)u$. Elle est divisible par $uu=0$, c'est-à-dire, deux fois par $u=0$, & par conséquent elle a deux racines zéro ; si les deux prémiers termes lui manquent. Elle a trois racines zéro, elle est divisible par $u^3=0$; s'il lui manque ses trois prémiers termes a, $(bs+cr)u$, $(dss+esr+frr)u^2$, &c.

Mais ces termes sont justement les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe placée sur le Triangle analytique, où l'on a changé x en r, & y en s. Donc, autant qu'il

CH. X. §. 170. qu'il manque de Rangs, y compris la Pointe, dans l'équation d'une Courbe, placée sur le Tr. anal: autant de fois une Droite quelconque tirée par l'Origine est-elle censée y rencontrer la Courbe. Ou, ce qui revient au même, le Rang le plus bas de l'équation exprime, par son dégré, quelle est la multiplicité du Point sur lequel est prise l'Origine. Ainsi la seule inspection de l'équation mise sur le Triangle anal: fait connoitre si la Courbe passe par l'Origine, si elle y a un Point multiple, & quel est le dégré de sa multiplicité *. PL. XVII.

Exemple I, d'un Point simple. Le Point P, la Droite AB, & la perpendiculaire PA abaissée de P sur AB, étant donnés de position; on décrit par points la Courbe PAM de cette maniére. On méne du Point P une Droite quelconque PM, qui coupe en B la Droite donnée AB, & on prend sur cette Droite les parties BM, Bm, égales à AB comprise entre la perpendiculaire PA & l'oblique PB. Les Points M, m sont à une Courbe, dont on demande l'équation. Fig. 124.

Qu'on prenne P pour l'Origine, & PA pour l'Axe des ordonnées, sur lequel abaissant, d'un point quelconque M de la Courbe, la perpendiculaire MQ, elle sera l'abscisse x, PQ étant l'ordonnée y; & soit PA $= a$. Les Triangles semblables PQM, PAB donnent cette proportion PQ $[y]$: QM $[x]$ $=$ PA $[a]$: AB. Donc AB, & BM, qui lui est égale, est $\frac{ax}{y}$. Ainsi PB^2 égal, à cause du triangle rectangle PAB, à PA^2 $[aa]$ $+$ AB^2 $[\frac{aaxx}{yy}]$, est $\frac{aa}{yy}(yy + xx)$. Les mêmes triangles semblables PAB, PQM

* *Usage de l'Anal.* pag. 91.

PL.XVII. PQM donnent la propoſition $PA^2 : AQ^2 = PB^2 : BM^2$, qui s'exprime analytiquement ainſi, $aa : yy - 2ay + aa = \frac{aa}{yy}(yy + xx) : \frac{aaxx}{yy}$, ou [diviſant les termes de la 2e. raiſon par $\frac{aa}{yy}$], $aa : yy - 2ay + aa = yy + xx : xx$, c'eſt-à-dire, en égalant le produit des extrémes à celui des moyens, $aaxx = y^4 - 2ay^3 + aayy + xxyy - 2axxy + aaxx$, ou [ôtant de part & d'autre $aaxx$ & diviſant le reſte par y] $y^3 - 2ayy + aay + xxy - 2axx = 0$. CH. X. §. 170.

Si l'on place cette équation ſur le Tr : anal : on verra que la Pointe reſte vuide ; mais que, dans le prémier Rang, la Caſe y eſt remplie. Donc le Point P eſt un des points de la Courbe, mais un Point ſimple.

* o * o
* o *
* o
o

Exemple II, d'un Point double. Si, dans la même Courbe, on prend le point A pour l'Origine, & AB pour l'Axe des abſciſſes, ſur lequel la perpendiculaire MN, abaiſſée d'un point quelconque M de la Courbe, ſera l'ordonnée y, AN l'abſciſſe x, & $AP = a$; on aura, à cauſe des triangles ſemblables, qui donnent $PQ[a + y] : QM$ ou $AN[x] = PA[a] : AB$, on aura, dis-je, $AB = \frac{ax}{a+y}$, & menant AM, hypothenuſe du triang: rectang: AMN, [EUCL. I. 47] $AN^2 + NM^2 = AM^2 = AB^2 + BM^2 + 2AB \times BN$ [EUCL. II. 12] = [puiſque, par la conſtruction, AB eſt égal à BM] $2AB^2 + 2AB \times BN = 2AB \times (AB + BN) = 2AB \times AN$. Mettant dans cette éq: $AN^2 + NM^2 = 2AB \times AN$, au lieu de ces Lignes leurs valeurs analy-

 analytiques, on aura $xx + yy = 2\frac{ax}{a+y}x$, ou [multipliant de part & d'autre par $a + y$], $axx + ayy + xxy + y^3 = 2axx$, soit $y^3 + xxy + ayy - axx = 0$.

Dans cette équation, mise sur le Tr: anal: on voit que la Pointe & le prémier Rang manquent, de sorte que le second Rang est le plus bas. Donc l'Origine A est un Point double. Et en effet, les deux Branches PAM, PmA se croisent en A.



Exemple III, d'un Point triple. La Courbe AMmA*mM*A se construit ainsi. Du Centre C, pris sur l'Axe AB des ordonnées, on décrit par l'Origine A un demi-Cercle BQqA. La Tangente AP étant prise pour l'Axe des abscisses, à chaque abscisse AP on donne les ordonnées perpendiculaires PM, P*M*, moyennes proportionelles entre AP & PQ prémiére ordonnée du Cercle, & aussi Pm, P*m*, moyennes proportionelles entre AP & Pq seconde ordonnée du Cercle. Fig. 123.

Cette Courbe est composée de deux feuilles AMmA, & A*Mm*A, réunies à l'Origine par un Point triple, qui est le concours des trois Branches MA*M*, MmA, *Mm*A. Aussi verra-t-on que dans l'équation de cette Courbe le plus bas Rang est le troisiéme. Car, si l'on nomme CA $= r$, AP $= x$, PM, ou Pm $= y$; on aura, par la nature du Cercle, PQ $= \frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$. & Pq $= \frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$. Donc PM, ou Pm, [$y$], moyenne proportionelle entre AP [x] & PQ, ou Pq, [$\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$] est égale à $\sqrt{(\frac{1}{2}rx \pm x\sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)})}$:

PL. XVII. &, en quarrant, $yy = \frac{1}{2} rx \pm x\sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$, ou $yy - \frac{1}{2}rx = \pm x\sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$, & quarrant encore, $y^4 - rxyy + \frac{1}{4}rrxx = \frac{1}{4}rrxx - x^4$, ou $y^4 - rxyy + x^4 = 0$. C'est-là l'équation de la Courbe, dont le plus bas Rang, qui consiste dans le seul terme $rxyy$, est le troisiéme Rang. CH. X. §. 170.

Fig. 126. *Exemple IV, d'un Point quadruple.* Le Cercle BNRQO étant décrit avec un raïon AB $= a$, on déterminera tous les points de la Courbe AMNAOAQARA, en menant un raïon quelconque AC, & prenant sur ce raïon la partie AM égale au Sinus DE de l'arc BD double de l'arc BC compris entre le raïon AC & le raïon AB donné de position *.

Pour en avoir l'équation, qu'on abaisse l'ordonnée perpendiculaire MP $[y]$, qui détermine l'abscisse AP $[x]$, & AM sera $= \sqrt{(xx + yy)}$. Les triangles AMP, AFB, semblables à cause de l'angle commun A & des angles droits P, F, donnent AM $[\sqrt{(xx+yy)}]$: MP $[y] =$ AB $[a]$: BF $= \frac{ay}{\sqrt{(xx+yy)}}$, & AM $[\sqrt{(xx+yy)}]$: AP $[x] =$ AB $[a]$: AF $= \frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Et les triangles ABF, BDE, semblables à cause de l'angle commun B & des angles droits F, E, donnent AB $[a]$: AF $[\frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)}}] =$ BD, ou 2BF, $[\frac{2ay}{\sqrt{(xx+yy)}}]$: DE égal, par construction, à AM $[\sqrt{(xx+yy)}]$. Donc, égalant le produit des moyens à celui des extrémes, $a\sqrt{(xx+yy)} = \frac{2aaxy}{xx+yy}$, ou $(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)} = 2axy$, & en quarrant, $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 4aax^2y^2$.

* GUIDO GRANDI, *Flores Geometrici, &c.* Florent. 1728.

CH. X. § 170. $4aax^2y^2$. Dans cette équation, il n'y a que deux Rangs; le sixiéme qui a quatre termes, & le quatriéme, qui n'en a qu'un seul $4aaxxyy$. Aussi voit-on que les quatre feuilles, qui composent cette Courbe, se réunissent à l'Origine, & y forment un Point quadruple par le concours de quatre Branches. PL. XVII.

171. DEMANDE-T-ON d'un Point situé hors de l'Origine, s'il est simple ou multiple, & quel est le dégré de sa multiplicité? On pourra le reconnoitre en transportant l'Origine sur ce Point-là; cela se fait [§. 25, n°. 4] en menant par ce Point une abscisse & une ordonnée, qu'on nommera m & n, & substituant, dans l'équation de la Courbe, $m+z$ à x & $n+u$ à y. On jugera de la nature du Point en question par le nombre des Rangs qui manquent à cette transformée [§. *préc.*].

Mais on s'épargnera beaucoup de Calcul, en suivant la voye abrégée qui a été indiquée au §. 29; parce qu'on pourra ne pousser le Calcul que jusqu'où il est nécessaire de le faire pour s'assurer de ce qu'on cherche.

Car si l'on fait attention aux opérations prescrites dans ce §. 29, on verra que x & y restant dans la transformée au lieu de m & n; ces lettres x & y ne désignent plus des variables, mais des grandeurs données & déterminées, qui sont l'abscisse & l'ordonnée du Point dont on cherche la nature; de sorte qu'on substituë proprement $x+z$ à x & $y+u$ à y.

La prémiére Ligne, qui est l'équation même de la Courbe, ne renfermant aucune des deux variables z & u, qui désignent maintenant les coordonnées, elle est donc le terme qui occuperoit la Case de la Pointe. Ainsi on substituera d'abord dans ce terme, au lieu de x & y, leurs valeurs données m & n; & si cette supposition ne réduit pas ce terme à zéro, la Pointe n'est pas vuide dans la

trans-

PL.XVII. transformée : elle a, par conféquent, un terme conftant. CH. X. §. 171.
Donc [§. 14] la Courbe ne paffe pas par l'Origine à laquelle cette transformée eft rélative ; le Point affigné n'eft pas même un Point de la Courbe, & on ne peut pas demander s'il eft fimple ou multiple.

Mais fi, par cette fubftitution, l'équation de la Courbe, qui fait la prémiére Ligne de la transformée, eft réduite à zéro ; le Point en queftion apartient à la Courbe ; & pour favoir s'il eft fimple ou multiple, on fera le calcul de la féconde Ligne. Elle a une partie de fes termes multipliés par *u*, & l'autre par z. Elle conftitue donc le prémier Rang de la transformée, qui contient la Cafe *u* & la Cafe z. On fubftituera dans les coëfficients de *u* & de z, au lieu de *x* & *y*, leurs valeurs *m* & *n*. Si, après cette fubftitution, l'un ou l'autre de ces deux coëfficients fubfifte ; c'eft une preuve que le prémier Rang de la transformée ne manque pas. Le Point de l'Origine de cette transmée eft donc un Point fimple [§. *préc.*], & il n'eft pas néceffaire de pouffer le Calcul plus loin.

Que fi la fubftitution fait évanouir les deux coëfficients de *u* & de z, le prémier Rang manque dans la transformée. Le Point, qui en eft l'Origine, eft donc multiple. Pour connoitre le dégré de fa multiplicité, on procédera au calcul de la troifiéme Ligne. Elle renferme les trois termes *uu*, *u*z, zz, qui rempliffent les trois Cafes du fecond Rang. On fubftituera donc, dans les coëfficients de ces trois termes, *m* & *n* à *x* & *y* : & fi quelcun de ces coëfficients fubfifte, le fecond Rang de la transformée n'eft pas nul. Donc le Point en queftion eft un Point double & l'opération eft terminée.

Mais fi ces trois coëfficients font zéro, le Point eft plus que double. On calculera donc la quatriéme ligne, qui, renfermant les termes u^3, u^2z, uzz & z^3, fait le troifiéme Rang de la transformée, fi par la fubftitution de

Ch. X. §. 171. de m & n à x & y, ce Rang ne s'évanouït pas. Alors le Point dont on cherche la nature est un Point triple, & on peut s'arrêter là. Pl. XVII.

Si par la substitution cette Ligne est réduite à zéro, le Point en question est plus que triple; & on continuera à procéder de la même maniére jusqu'à-ce qu'on soit venu à une Ligne ou un Rang, qui ne disparoisse pas par la substitution de m, n à x, y. Le nombre, qui marque le quantiéme est ce Rang, marque aussi le dégré de multiplicité du Point proposé.

Exemple 1. Dans la Courbe * représentée par l'éq: $y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x = 0$, on demande la nature du Point, dont l'abscisse m & l'ordonnée n sont l'une & l'autre égales à 2.

On posera en prémiére Ligne l'équation même

$$y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x;$$

& substituant 2 pour x, & 2 pour y, on aura

$$16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 128,$$

ce qui étant $= 0$, on conclura que le Point indiqué est un des Points de la Courbe.

Pour savoir s'il est simple ou multiple, on calculera le second Rang. En voici l'opération [§. 29]

$$y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x$$

$$4{:}0 \quad 3{:}0 \quad 2{:}1 \quad 2{:}0 \quad 1{:}1 \quad 0{:}2 \quad 0{:}1$$

$$(4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x)\,u + (-12yy + 48y + 8x - 64)\,z$$

Substituant dans ce second Rang 2 pour x & pour y, on aura

$$(32 - 96 - 96 + 64 + 96)\,u + (-48 + 96 + 16 - 64)\,z$$

c'est-à-dire $(0)\,u + (0)\,z$.

* Saurin, *Mem. de l'Acad.* 1716. pag. 61.

PL. XVII. Puisque ce second Rang est zéro, le Point proposé n'est pas simple, mais multiple. CH. X. §. 171.

Pour savoir s'il est double ou d'une multiplicité supérieure, on calculera le troisiéme Rang, en continuant l'opération qui a été commencée.

$$(4y^3-24y^2-24xy+32y+48x)u + (-12yy+48y+8x-64)z$$

$$\tfrac{3}{2}:0 \quad \tfrac{2}{2}:0 \quad \tfrac{1}{2}:\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}:0 \quad 0:\tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{2}{2}:0 \quad \tfrac{1}{2}:0 \quad 0:\tfrac{1}{2} \quad 0:0$$

$$(6yy-24y-12x+16)uu + \left(\begin{matrix}-12y+24\\-12y+24\end{matrix}\right)uz + (4)zz$$

Il est inutile d'examiner si la substitution de 2 à x & y fera disparoitre ce second Rang, parce qu'on voit d'abord qu'elle ne peut anéantir le terme $(4)\,zz$, où il n'y a ni x, ni y.

Ainsi le Point cherché n'est qu'un Point double: &, si l'on n'a point d'autres vuës, il n'est pas nécessaire de pousser le Calcul plus loin.

Mais si, par curiosité ou pour mieux connoitre cette Courbe, on achéve la transformation, le troisiéme & quatriéme Rang seront

$$(4y-8)u^3 + (-12)uuz + (0)uzz + (0)z^3$$
$$+(1)u^4 + (0)u^3z + (0)u^2z^2 + (0)uz^3 + (0)z^4$$

qui par la substitution de 2 à y se réduisent à $-12uuz + u^4$. Ainsi toute la transformée est $u^4-12uuz-32uu+4zz=0$.

Cette équation a quatre racines

$$u=+\sqrt{(6z+16+4\sqrt{(2zz+12z+6)})}, \text{ou} +\sqrt{(4z+8)}+\sqrt{(2z+8)}$$
$$u=-\sqrt{(6z+16+4\sqrt{(2zz+12z+6)})}, \text{ou} -\sqrt{(4z+8)}-\sqrt{(2z+8)}$$
$$u=+\sqrt{(6z+16-4\sqrt{(2zz+12z+6)})}, \text{ou} +\sqrt{(4z+8)}-\sqrt{(2z+8)}$$
$$u=-\sqrt{(6z+16-4\sqrt{(2zz+12z+6)})}, \text{ou} -\sqrt{(4z+8)}+\sqrt{(2z+8)}$$

chacune

 chacune desquelles indique une Branche parabolique. La racine $u = +\sqrt{(4z+8)} + \sqrt{(2z+8)}$ indique la Branche fD. La racine $u = -\sqrt{(4z+8)} - \sqrt{(2z+8)}$ marque la Branche Fd. La Branche FAE est représentée par la racine $u = +\sqrt{(4z+8)} - \sqrt{(2z+8)}$; & la Branche fAe par la racine $u = -\sqrt{(4z+8)} + \sqrt{(2z+8)}$. Ces deux derniéres passent par le Point A. Car $z = 0$ réduit les équations de ces deux Branches à $u = +\sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$, & $u = -\sqrt{8} + \sqrt{8} = 0$. Elles ont pour Asymptote courbe la Parabole EAe désignée par l'éq: $uu = (6 - 4\sqrt{2})z$; & la Parabole DAd exprimée par l'éq: $uu = (6 + 4\sqrt{2})z$ est l'Asymptote courbe des Branches fD, FD: comme on le trouve aisément par le §. 142. L'équation proposée $y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x = 0$ représente la même Courbe, mais rélativement au point F, & alors le Point double A a son abscisse FG & son ordonnée GA égales l'une & l'autre à 2. Pl. XVII. Fig. 127.

Exemple II. On propose la Courbe dont l'équation est $y^4 + x^4 - 4ay^3 + 2ayyx + 2ax^3 + 8aayy - 4aayx - 8a^3y + 2a^4 = 0$. Et d'abord on demande quelle est la nature du Point dont l'abscisse m est o, & l'ordonnée n est a.

Pour le connoitre, on substituë o à x & a à y dans l'équation proposée; ce qui la réduit à $a^4 * - 4a^4 * * + 8a^4 * - 8a^4 + 2a^4 = -a^4$. Donc dans la transformée qui représenteroit la Courbe rélativement à l'Origine prise sur le Point assigné, il y auroit un terme constant. Elle ne passe donc pas par ce Point-là [§. 14].

2°. On demande ensuite quel est le Point dont l'abscisse & l'ordonnée sont chacune égale à a.

La substitution de a pour x & pour y réduisant l'équation proposée à $[a^4 + a^4 - 4a^4 + 2a^4 + 2a^4 + 8a^4$

 $-4a^4$

Pl. XVII. $-4a^4 - 8a^4 + 2a^4 =]\ 0$, on eſt aſſuré que le Point propoſé eſt un de ceux de la Courbe. Ch. X. §. 171.

Mais eſt-il ſimple ou multiple? Pour répondre à cette queſtion, on cherchera le prémier Rang de la transformée qui réſulte en ſubſtituant $a+z$ à x & $a+u$ à y. Le ſecond Rang que donne la ſubſtitution de $x+z$ à x, & de $y+u$ à y eſt $(4y^3 - 12ay^2 + 4ayx + 16a^2y - 4a^2x - 8a^3)u + (4x^3 + 2ay^2 + 6ax^2 - 4a^2y)z$, qui, ſubſtituant a pour x & pour y, ſe réduit à $(4a^3 - 12a^3 + 4a^3 + 16a^3 - 4a^3 - 8a^3)u + (4a^3 + 2a^3 + 6a^3 - 4a^3)z$, ou $(0)u + (2a^3)z$. Le prémier Rang ne s'évanouiſſant donc pas entiérement, on conclura que le Point, dont l'abſciſſe & l'ordonnée ſont a, eſt bien un Point de la Courbe, mais un Point ſimple.

3°. On demande la nature du Point dont l'abſciſſe eſt $-a$ & l'ordonnée a.

Ces valeurs ſubſtituées dans l'équation propoſée la réduiſent à $a^4 + a^4 - 4a^4 - 2a^4 - 2a^4 + 8a^4 + 4a^4 - 8a^4 + 2a^4$, c'eſt-à-dire, à zéro. Donc ce Point eſt un de ceux de la Courbe.

Ces mêmes valeurs ſubſtituées dans le prémier Rang de la transformée le changent en $(4a^3 - 12a^3 - 4a^3 + 15a^3 + 4a^3 - 8a^3)u + (-4a^3 + 2a^3 + 6a^3 - 4a^3)z$, ou $(0)u + (0)z$. Ce Rang s'évanouiſſant fait voir que le Point, dont l'abſciſſe eſt $-a$ & l'ordonnée a, eſt un Point multiple.

On cherchera le dégré de ſa multiplicité en calculant le ſecond Rang. On trouve $(6yy - 12ay + 2ax + 8a^2)uu + (4ay - 4aa)uz + (6xx + 6ax)zz$, ou, mettant toûjours $-a$ pour x & $+a$ pour y, $(6aa - 12aa - 2aa + 8aa)uu + (4aa - 4aa)uz + (6aa - 6aa)zz$, c'eſt-à-dire, $(0)uu + (0)uz + (0)zz$.

Le Point propoſé eſt donc plus que double, & on cherchera le

CH. X. §. 171. le troisiéme Rang. C'est $(4y - 4a)u^3 + (2a)uuz + (0)uzz + (4x + 2a)z^3$: dont aucune substitution ne peut faire disparoitre le terme uuz, qui a pour coëfficient $2a$. Le troisiéme Rang ne s'évanouït donc pas dans la transformée ; mais étant le plus bas Rang, il fait voir que le Point, sur lequel on a porté l'Origine, est un Point triple. PL. XVII.

On peut s'assurer de ceci en continuant le Calcul de la transformation. Le voici en entier

$$y^4 + x^4 - 4ay^3 + 2ay^2x + 2ax^3 + 8a^2y^2 - 4a^2yx - 8a^3y + 2a^4$$
$$4{:}0,\ 0{:}4,\quad 3{:}0,\ 2{:}1,\ 0{:}3,\ 2{:}0,\ 1{:}1,\ 1{:}0,\ 0{:}0$$

$$+ (4y^3 - 12ay^2 + 4ayx + 16a^2y - 4a^2x - 8a^3)u + (4x^3 + 2ay^2 + 6ax^2 - 4a^2y)z$$
$$\tfrac{3}{2}{:}0,\ \tfrac{2}{2}{:}0,\ \tfrac{1}{2}{:}\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}{:}0\quad 0{:}\tfrac{1}{2},\ 0{:}0\qquad 0{:}\tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{2}{:}0,\ 0{:}\tfrac{2}{2},\ \tfrac{1}{2}{:}0$$

$$+ (6yy - 12ay + 2ax + 8aa)uu + \left(\begin{matrix}2ay - 2aa\\ 2ay - 2aa\end{matrix}\right)uz + (6xx + 6ax)zz$$
$$\tfrac{2}{3}{:}0,\ \tfrac{1}{3}{:}0,\ 0{:}\tfrac{1}{3},\ 0{:}0,\qquad \tfrac{1}{3}{:}0,\ 0{:}0\qquad 0{:}\tfrac{2}{3},\ 0{:}\tfrac{1}{3}$$

$$+ (4y - 4a)u^3 + \left(\begin{matrix}\tfrac{2}{3}a\\ \tfrac{4}{3}a\end{matrix}\right)uuz + (0)uzz + (4x + 2a)z^3$$
$$\tfrac{1}{4}{:}0,\ 0{:}0,\qquad 0{:}0\qquad\qquad 0{:}\tfrac{1}{4},\ 0{:}0$$

$$(1)u^4 + (0)u^3z + (0)u^2z^2 + (0)uz^3 + (1)z^4$$

La substitution de $-a$ à x & de a à y, qui ne laisse, comme on a vû, subsister que les deux derniers Rangs, les réduit à $2auuz - 2az^3 + u^4 + z^4 = 0$, qui est l'équation de la Courbe rélative à l'Origine placée sur le Point triple.

Cette équation, résoluë comme une équation du second degré, manifeste quatre racines $u = \pm\sqrt{(-az \pm z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$, & donne cette Construction. Du point C, avec un raïon $CA = a\sqrt{2}$, on décrira un Cercle : on ménera deux diamétres parallèles aux coordonnées supposées perpendiculaires l'une à l'autre, & on Fig. 118.

PL.XVII. prendra pour Origine le point A déterminé par le raïon CA, qui coupe en deux également les angles des coordonnées de différents signes. A chaque abscisse comme AP, on donnera des ordonnées PM, PM, moyennes proportionelles entre l'abscisse AP & l'ordonnée du Cercle PN. Puisque $AC = a\sqrt{2}$, on aura $AB = BC = a$. Nommant donc AP, z, & PM, u, on aura $CO = BP = AP - AB = z - a$, & $ON = \sqrt{(CN^2 - CO^2)} = \sqrt{(2aa - aa + 2az - zz)} = \sqrt{(aa + 2az - zz)}$, & $PN = ON - PO = -a + \sqrt{(aa + 2az - zz)}$. Donc PM $[u]$, moyenne proportionelle entre AP $[z]$ & PN $[-a + \sqrt{(aa + 2az - zz)}]$, est égale à $\sqrt{(-az + z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$. Ch. X. §. 171.

Du côté des abscisses positives, cette Courbe n'a que deux Branches AMD, AMD; parce que la moyenne proportionelle entre l'abscisse AP positive & l'ordonnée PN négative, est imaginaire. Et on le voit clairement dans l'équation : car les racines $\pm\sqrt{(-az - z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$ ne peuvent être qu'imaginaires ; ce qui est sous le signe radical étant négatif, quand z est positive. Mais du côté des abscisses négatives, la Courbe a quatre Branches Ame, Ame, Ame, Ame; parce que, z étant négative, les racines $\pm\sqrt{(-az \pm z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$ qui deviennent $\pm\sqrt{(az \mp z\sqrt{(aa - 2az - zz)})}$, sont toutes quatre réelles, tant que $z < a\sqrt{2} - a$ $[= BE - BA = AE]$.

Ainsi la Courbe représentée par l'éq : $u^4 + 2auuz + z^4 - 2az^3 = 0$ est une espèce de Trefle, qui a un Point triple en A. L'éq : $y^4 + x^4 - 4ay^3 + 2ayyx + 2ax^3 + 8aayy - 4aayx - 8a^3y + 2a^4 = 0$ représente la même Courbe, en prenant l'Origine sur le centre C du Cercle générateur. Aussi a-t-on trouvé que le Point A, qui a l'ordonnée $CB = a$, & l'abscisse $BA = -a$, est un Point triple : que le point D, qui a l'ordonnée $CB = a$,

&

CH. X. & l'abſciſſe BD $= a$, eſt un Point ſimple : & que le point Pl. XVII.
§. 171. B, qui a l'ordonnée CB $= a$, & l'abſciſſe $= o$, n'eſt pas même un Point de la Courbe.

172. Si le Point propoſé ſe trouve ſur l'Axe des abſciſſes ou des ordonnées, ailleurs qu'à l'Origine ; le calcul ſera plus abrégé, puiſqu'il s'agit ſeulement de ſubſtituer $m + z$ à x, ou $n + u$ à y, pour porter l'Origine ſur le Point aſſigné [§. 25] : ce qui ſe fait commodément par la voye indiquée au §. 28. Car ſi on ordonne l'équation par x, lorſqu'il faut ſubſtituer à y ; ou par y, lorſqu'il faut ſubſtituer à x ; les termes & les Rangs de la transformée ſe trouveront ſi bien rangés qu'il ſera facile de pouſſer le calcul ſeulement juſqu'au point qui eſt néceſſaire.

Exemple. On propoſe l'éq : $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 6axy^2 - 7ax^3 - 4aayy + 18aaxx - 20a^3x + 8a^4 = 0$, & l'on demande la nature du Point qui eſt ſitué ſur l'Axe des abſciſſes à la diſtance $2a$ de l'Origine, c'eſt-à-dire, du Point dont l'abſciſſe eſt $2a$, & l'ordonnée o.

Il s'agit, pour porter l'Origine ſur le Point propoſé de ſubſtituer $2a + z$ à x ; on ordonnera donc l'équation par y,

$$y^4 + (-2x^2 + 6ax - 4aa)yy + (x^4 - 7ax^3 + 18aaxx - 20a^3x + 8a^4)$$

Le dernier terme eſt celui qui, dans la transformée, occupera la Pointe. Il faut donc voir ce qu'il devient quand x devient $2a$. Comme il ſe réduit à $16a^4 - 56a^4 + 72a^4 - 40a^4 + 8a^4$, c'eſt-à-dire à o ; on voit déjà que le Point aſſigné eſt un des Points de la Courbe.

Enſuite puiſque le terme y manque dans la propoſée, il manquera auſſi dans la transformée. Il ſuffit donc, pour ſavoir ſi le prémier Rang ſubſiſte ou s'évanouït, de chercher le terme z. En voici le calcul

$y^4 +$

PL. XVII. $y^4 + (-2x^2 + 6ax - 4aa)yy + (x^4 - 7ax^3 + 18a^2x^2 - 20a^3x + 8a^4)$ CH. X. §. 172.

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$+ (4x^3 - 21ax^2 + 36a^2x - 20a^3)z$$

La substitution de $2a$ à x dans le coëfficient de z le réduit à $32a^3 - 84a^3 + 72a^3 - 20a^3$, ou o. Donc le prémier Rang manque entiérement dans la transformée. Ainsi le Point proposé est un Point multiple.

On cherchera le second Rang, qui a les trois termes yy, yz, zz. Le coëfficient de yy est $-2x^2 + 6ax - 4aa$, que la substitution de $2a$ à x rend $-8a^4 + 12a^4 - 4a^4 = 0$. Le coëfficient de yz est aussi o, puisque le terme y, dont le coëfficient devroit produire celui de yz, manque dans la proposée. Il suffit donc de chercher le coëfficient de zz en continuant le calcul commencé.

$$+ (4x^3 - 21ax^2 + 36a^2x - 20a^3)z$$
$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{2} & \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$+ (6xx - 21ax + 18aa)zz$$

$2a$ écrit au lieu de x dans ce coëfficient $6xx - 21ax + 18aa$ le réduit à $24aa - 42aa + 18aa$, ou o. Ainsi le second Rang disparoit, & par conséquent le Point assigné est plus que double.

S'il est plus que triple, les coëfficients des termes y^3, yyz, yzz, z^3, du troisiéme Rang seront tous zéro. Celui de y^3 est o, puisque ce terme manque dans la proposée. Mais celui de y^2z, qui est $-4x + 6a$, en écrivant $2a$ pour x, se réduit à $-2a$. Donc le troisiéme Rang subsiste, & sans aller plus loin, on peut affirmer que le Point proposé est un Point triple.

Mais si, par curiosité, on achéve la transformation,

$y^4 +$

CH. X. §. 172. PL. XVII.

$$y^4 + (-2x^2 + 6ax - 4aa)yy + (x^4 - 7ax^3 + 18a^2x^2 - 20a^3x + 8a^4)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 0 & & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$+(-4x + 6a)yyz \quad + (4x^3 - 21ax^2 + 36a^2x - 20a^3)z$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & 0 & & \frac{3}{2} & \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$-2yyzz \qquad + (6xx - 21ax + 18aa)zz$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

$$+ (4x - 7a)z^3$$

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & 0 \end{array}$$

$$+ z^4$$

on trouvera que l'équation de la Courbe; l'Origine étant portée sur le Point triple, est $y^4 - 2ayyz - 2y^2z^2 + az^3 + z^4 = 0$. Cette équation a quatre racines $y = \pm\sqrt{(az + zz \pm z\sqrt{(aa + az)})}$ qu'on peut construire ainsi. Avec un Paramétre $= a$, on décrira la Parabole NB*N*, dont BA soit la derniére direction : & prenant l'abscisse BA égale au Paramétre, on aura les ordonnées Ac, AC aussi égales au Paramétre. On ménera la Droite BC qui achéve le triangle isoscèle BAC, & prenant le point A pour l'Origine, on donnera à chaque abscisse AP [z] des ordonnées PM, P*M* [y] & PM, P*M* [$-y$] égales aux moyennes proportionelles entre l'abscisse AP & les parties QN, Q*N*, comprises entre la Droite BCQ, & la Parabole NB*N*. Fig. 129.

Car, puisque AP $= z$, BP [$=$ AB $+$ AP] $= a + z$, &, par la nature de la Parabole, PN $= \sqrt{(aa + az)}$. De plus PQ [$=$ BP] $= a + z$. Donc QN $= a + z + \sqrt{(aa + az)}$, & Q*N* $= a + z - \sqrt{(aa + az)}$. Ainsi PM, ou P*M* [$y$], moyenne proportionelle entre AP & QN, ou Q*N*, est $= \pm\sqrt{(az + zz \pm z\sqrt{(aa + az)})}$.

Il paroit, par cette construction, que la Courbe, du

PL. XVII. côté des abſciſſes négatives, n'a que deux Branches AmB, AmB, qui ſont une Feuille, & dont les ordonnées pm, pm ſont moyennes proportionelles entre l'abſciſſe négative Ap, & la partie qn interceptée négative entre la Droite BC & la Parabole BnC. Ces Branches ſont repréſentées par les racines $\pm\sqrt{(az + zz - z\sqrt{(aa + zz)})}$, ou, z étant négative, $\pm\sqrt{(-az + zz + z\sqrt{(aa + zz)})}$. Les deux autres Branches, que repréſenteroient les racines $\pm\sqrt{(az + zz + z\sqrt{(aa + zz)})}$, ou, z étant négative, $\pm\sqrt{(-az + zz - z\sqrt{(aa + zz)})}$ ſont imaginaires; le Calcul démontrant aiſément que la grandeur ſous le ſigne radical eſt négative ou imaginaire: d'ailleurs la moyenne proportionelle entre une abſciſſe négative Ap, & une interceptée poſitive qn, ne peut être qu'imaginaire. Mais, du côté des abſciſſes poſitives, la Courbe a quatre Branches, dont deux AM, AM ſont la continuation des deux Branches Am, Am, exprimées par les racines $\pm\sqrt{(az + zz - z\sqrt{(aa + az)})}$, & dont les ordonnées PM, PM ſont moyennes proportionelles entre AP & QN. Les deux autres Branches AM, AM ſont repréſentées par les racines $\pm\sqrt{(az + zz + z\sqrt{(aa + az)})}$, qui, du côté négatif, ſont imaginaires, & leurs ordonnées PM, PM ſont moyennes proportionelles entre AP & QN. Le Point A, où ſe coupent les trois Branches mAM, mAM, MAM eſt donc un Point triple, comme le Calcul l'a fait voir. CH. X. §. 172.

173. LES PRINCIPES établis dans les §§. précéd. donnent la Solution de ce Problême: L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver ſi cette Courbe a des Points multiples, quels ils ſont, & où ils ſont*?

Pour trouver les Points doubles, on procédera comme ſi on

* *Uſage de l'Anal.* pag. 238.

CH. X. §. 173. si on vouloit transformer l'équation en substituant [§.171] $x+z$ à x, & $y+u$ à y: mais on n'ira pas plus loin que la seconde Ligne, qui donne les termes u & z. On égalera leurs coëfficients à zéro, ce qui, avec l'équation proposée, fait trois équations. PL. XVII.

Pour connoitre les Points triples, on joindra aux trois équations, qui donnent les Points doubles, celles qui naissent en égalant à zéro les coëfficients de uu, uz, & zz. Et pour cet effet, il faudra pousser le Calcul de la transformation jusqu'à la troisiéme Ligne.

On trouvera de même les Points quadruples, en formant, outre les six équations précédentes, les quatre que donnent les coëfficients de u^3, u^2z, uzz, z^3 égalés à zéro. Et ainsi de suite.

De sorte que comme on a 3, 6, 10, 15, ou &c. équations pour déterminer deux inconnuës x, y, le Problème est plus que déterminé; & sera souvent impossible: parce qu'il se peut fort bien que la Courbe proposée n'ait aucun Point multiple, ou du moins aucun Point de la multiplicité qu'on suppose.

L'Analyse fournit les Régles nécessaires pour déterminer ces inconnuës au moyen de tant d'équations, lorsque leurs valeurs sont réelles. Ce qu'il y a de plus simple, c'est de voir d'abord si la Courbe a quelques Points multiples. On les trouvera en combinant trois équations, sç. la proposée & les deux que donnent les coëfficients de u & de z égalés à zéro. S'il paroit par-là que la Courbe a des Points multiples, on cherchera le dégré de leur multiplicité par les Régles des §§. 170, ou 171.

Or pour combiner ensemble les trois équations indiquées, on cherchera la valeur d'x ou d'y par l'équation la plus commode des trois; on substituera cette valeur dans les deux autres; & on cherchera les racines communes à ces deux équations. Elles donneront les valeurs d'x

 ou

PL. XVII. ou d'y qui répondent aux Points multiples. Mais si ces équations n'ont aucune racine commune, ou si elles mènent à quelque absurdité, le Problême est impossible, & la Courbe n'a aucun Point multiple. CH. X. §. 173.

Fig. 130. *Exemple I.* On demande si la Courbe représentée par l'éq : $xxy + xyy - a^3 = 0$ a quelques Points multiples ?

On calculera le prémier Rang de la transformée qui nait de la substitution de $x + z$ à x, & de $y + u$ à y. Ce Rang est $(xx + 2xy)u + (2xy + yy)z$. On aura donc trois équations à remplir, 1°. la proposée, 2°. le coëfficient d'u égalé à zéro, 3°. le coëfficient de z égalé aussi à zéro.

1°. $xxy + xyy - a^3 = 0$. 2°. $xx + 2xy = 0$. 3°. $2xy + yy = 0$.

La 3°. donne $y = 0$, ou $y = -2x$. Zéro substitué pour y dans la 1°. donne $-a^3 = 0$: ce qui est absurde, puisque a est une grandeur donnée. Et $-2x$ substitué pour y dans la 2°, la réduit à $xx - 4xx = 0$, ou $-3xx = 0$, c'est-à-dire, $x = 0$, valeur qui substituée dans la 1°. donne aussi $-a^3 = 0$: ce qui est absurde. Il est donc impossible de trouver des valeurs d'y & d'x, qui satisfassent aux 3 équations à remplir. Ainsi la Courbe n'a aucun Point multiple.

Exemple II. On propose l'éq : $x^2y^2 - 2axy^2 + aayy + aaxy - a^3y + aaxx = 0$: & l'on demande si la Courbe qu'elle représente a quelques Points multiples.

Le prémier Rang de la transformée étant $(2x^2y - 4axy + 2aay + aax - a^3)u + (2xyy - 2ayy + aay + 2aax)z$, on a ces trois équations à remplir.

1°. $x^2y^2 - 2axyy + aayy + aaxy - a^3y + aaxx$
ou $(x - a)^2yy + (x - a)a^2y + a^2x^2 = 0$.

2°. $2x^2y$

CH. X. § 173. $2°.\ 2x^2y - 4axy + 2aay + aax - a^3$, ou $(x-a)^2 2y + (x-a)aa = 0$ PL. XVII.

$3°.\ 2xyy - 2ayy + aay + 2aax = 0$.

La ſeconde ſe peut diviſer par $x - a$, & le quotient eſt $2xy - 2ay + aa$. Elle a donc ces deux racines $x = a$, & $y = \frac{aa}{2(a-x)}$. En ſubſtituant a pour x dans la propoſée on la réduit à $a^4 = 0$, ce qui eſt abſurde : cette racine ne donne donc aucun Point multiple. De même, ſubſtituant $\frac{aa}{2(a-x)}$ pour y dans la propoſée, elle ſe réduit à $\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + aaxx = 0$, ou $x = \frac{1}{2}a$. Donc y $[= \frac{aa}{2(a-x)}] = a$. Mais ces valeurs ſubſtituées dans la 3e. équation, donnent $a^3 - 2a^3 + a^3 + a^3 = 0$, ou $a^3 = 0$, ce qui eſt encore abſurde. Cette racine auſſi ne donne donc aucun Point multiple. Ainſi la Courbe n'en a aucun.

Et c'eſt ce que fait voir ſa conſtruction. Ayant décrit du centre C, avec un raïon $CA = \frac{1}{2}a$, un Cercle dont on méne la Tangente $AB = a$; on prendra ſur cette Tangente une abſciſſe $AP = x$, & on lui donnera l'ordonnée PM [y], égale à la droite AQ retranchée de l'Axe des ordonnées par la droite BQ, qui, partant du Point fixe B, paſſe par le Point N où PM rencontre la circonférence du Cercle. Car les triangles ſemblables BAQ, BPN donnent BA [a] : AQ ou PM [y] = BP [$a-x$] : PN [$\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$ par la nature du Cercle]. Donc $\frac{1}{2}aa - a\sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)} = ay - xy$; ce qui, tranſpoſant, quarrant, &c. revient à l'équation propoſée $x^2y^2 - 2axy^2 + aayy - aaxy + aaxx - a^3y = 0$. Fig. 131.

PL. XVII. *Exemple III.* Il s'agit de la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4 + 4ay^3 + 2y^2x^2 + 4ayxx - 3a^3y + x^4 - 4a^2x^2 + 8a^3x - 8a^4 = 0$. On demande ſi elle a quelque Point multiple ? CH. X. §. 173.

On commencera le Calcul de la transformation néceſſaire pour porter l'Origine ſur un point quelconque. Le prémier Rang ſera

$$(4y^3 + 12ay^2 + 4yxx + 4axx - 8a^3)u + (4yyx + 8ayx + 4x^3 - 8aax + 8a^3)z,$$

de ſorte que les trois équations qu'on a à remplir, ſont

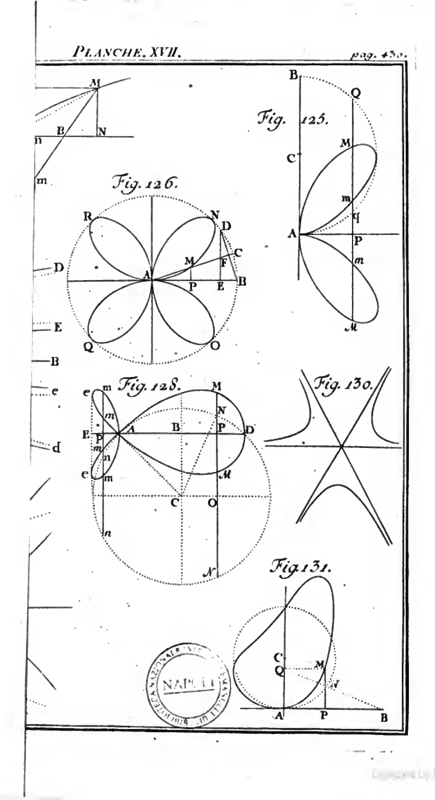
1°. $y^4 + 4ay^3 + 2yyxx + 4ayxx - 8a^3y + x^4 - 4aaxx + 8a^3x - 8a^4 = 0$

2°. $4y^3 + 12ay^2 + 4yxx + 4axx - 8a^3 = 0$, ou prenant le quart,
$y^3 + 3ayy + yxx + axx - 2a^3 = 0$

3°. $4yyx + 8ayx + 4x^3 - 8aax + 8a^3 = 0$, ou prenant auſſi le quart,
$yyx + 2ayx + x^3 - 2aax + 2a^3 = 0$.

La 2e. de ces équations ſe diviſe par $y + a$, & donne au quotient $yy + 2ay - 2aa + xx$. Elle a donc ces deux racines $y = -a$, & $xx = 2aa - 2ay - yy$. Cette valeur d'xx, ſubſtituée dans la 3e. équation, la réduit à $yyx + 2ayx + 2aax - 2ayx - yyx - 2aax + 2a^3 = 0$, ou $2a^3 = 0$, ce qui eſt abſurde. Ainſi cette racine ne donne aucun Point multiple. Il n'en eſt pas de même de la racine $y = -a$. Cette valeur ſubſtituée dans la 1e. & dans la 3e. équation, les réduit à $x^4 - 6aaxx + 8a^3x - 3a^4 = 0$, & $x^3 - 3aax + 2a^3 = 0$. Pour avoir les racines communes à ces deux équations, on diviſera l'une par l'autre, & le reſte $-3aa(xx - 2ax + aa)$, diviſant la ſeconde, ſera le diviſeur commun. Sa racine unique eſt $x - a = 0$. On examinera donc, ſi les valeurs $x = a$, $y = -a$ ſatisfont aux trois équations qu'on a à remplir. Et comme elles ſatisfont, on eſt ſûr que la Courbe a un Point multiple, ſç. celui dont l'abſciſſe eſt a & l'ordonnée $-a$.

Ce


Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 128.
Fig. 130.
Fig. 131.

CH. X. §. 173. Ce Point n'est que double. Car si on passe à calculer le second Rang, on trouve d'abord $(6yy + 12ay + 2xx)uu$, ou, mettant $-a$ pour y & a pour x, $(-4aa)uu$: ce qui fait voir que le second Rang ne disparoit pas. PL. XVII.

Mais si on achéve le Calcul, on trouvera pour l'équation de la Courbe, rélative à l'Origine portée sur le Point double, $u^4 - 4aauu + 4auuz + 2uuzz + 4az^3 + z^4 = 0$.

Cette Courbe se peut décrire en faisant rouler un Cercle autour d'un autre Cercle égal. Soit AEA un Cercle décrit du centre C, avec le raïon $CA = a$. Si l'on fait rouler autour de lui un Cercle égal MEM; chaque Point de sa circonférence, comme M, décrira une Courbe AMMA. Soit A le point de la circonférence fixe sur lequel étoit appliqué le point M, dans la prémiére position du Cercle mobile. De là, supposons qu'en roulant il ait passé dans la position MEM. Donc l'arc EM, qui a été appliqué sur l'arc EA, lui sera égal. Ainsi les angles ACE, MDE sont égaux, & le Triangle CDF est isoscèle, aussi bien que AFM. Par conséquent AM & CD sont parallèles. Donc AH, perpendiculaire sur CD, est parallèle à EG, qui lui est aussi perpendiculaire, & EH est égale à AG, moitié de AM. De plus, les triangles rectangles ACH, CEI sont semblables, & même égaux, leurs hypothénuses AC, CE étant égales. Donc CH & CI sont égales. Cela posé, soit l'abscisse $AP = z$, l'ordonnée $PM = u$. Donc $AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{(zz + uu)}$. Le raïon CA est $= a$. Soit $CI = CH = s$. Donc $EH = AG = a - s$, & $2AG [2a - 2s] = AM [\sqrt{(zz + uu)}]$. Ainsi $s = a - \frac{1}{2}\sqrt{(zz + uu)}$. De plus, les triangles semblables CEI, AMP donnent CE $[a]$: CI $[s$ ou $a - \frac{1}{2}\sqrt{(zz + uu)}] =$ AM $[\sqrt{(zz + uu)}]$: AP $[z]$. Donc $az = a\sqrt{(zz + uu)} - \frac{1}{2}(zz + uu)$, Fig. 132.

ou

PL. XVII. ou $2az + zz + uu = 2a\sqrt{(zz + uu)}$, & quarrant $4aazz + 4az^3 + z^4 + 4azuu + 2zzuu + u^4 = 4aazz + 4aauu$, soit $u^4 + 2zzuu + z^4 + 4auuz + 4az^3 - 4aauu = 0$. CH. X. §. 173.

Exemple IV. On demande quels Points multiples a la Courbe représentée par l'éq: $x^4 - ay^3 + 2ax^2y + 4ax^3 + 3aayy + 4aaxy + 4aaxx - a^3y = 0$.

Le prémier Rang de la transformée qui résulte de la substitution de $y+u$ à y & de $x+z$ à x, est $(-3ayy + 2ax^2 + 6aay + 4aax - a^3)u + (4x^3 + 4axy + 12axx + 4aay + 8aax)z$. On a donc à remplir ces trois équations,

1e. $x^4 - ay^3 + 2axxy + 4ax^3 + 3aayy + 4aaxy + 4aaxx - a^3y = 0$

2e. $-3ayy + 2axx + 6aay + 4aax - a^3 = 0$

3e. $4x^3 + 4axy + 12axx + 4aay + 8aax = 0$

La 3e. est divisible par $4x + 4a$, & donne au quotient $xx + 2ax + ay$. Elle a donc deux racines $4x + 4a = 0$, ou $x = -a$, & $xx + 2ax + ay = 0$, ou $y = -\frac{xx + 2ax}{a}$.

Si on substitue $-a$ pour x dans la 2e. on aura $-3ayy + 6aay - 3a^3 = 0$, ou $-3a(a-y)^2 = 0$, soit $y = a$. Ces valeurs de x, & de y, mises dans la 1e. équation rendent son prémier membre égal à zéro. Donc la Courbe a un Point multiple, qui a pour abscisse $-a$ & pour ordonnée $+a$. Mais il faut examiner si l'autre racine $y = -\frac{xx + 2ax}{a}$ n'en fournit point d'autres. Cette valeur d'y substituée dans la 1e. & 2e. équations les change en $(x^6 + 6ax^5 + 14a^2x^4 + 16a^3x^3 + 9a^4x^2 + 2a^5x) : aa = 0$ & $(3x^4 + 12ax^3 + 16aaxx + 8a^3x + a^4) : a = 0$. Divisant celle-là par celle-ci, le reste est $-\frac{8}{9}a^4(xx + 2ax + aa)$, qui, égalé à zéro, donne $x = -a$. C'est la même valeur qu'on a déja trouvée, & qui, substituée dans

Ch. X. §. 173. dans $y = -\frac{xx + 2ax}{a}$ donne $y = a$. Ainſi cette ſeconde racine de la 3ᵉ. équation ne donne pas d'autre Points multiples que la prémiére. Planche XVIII.

On connoitra le dégré de ſa multiplicité en continuant le calcul de la transformation. Le ſecond Rang eſt $(-3ay + 3aa)uu + (4ax + 2aa)uz + (6xx + 2ay + 12ax + 4aa)zz$, où, mettant $-a$ pour x & $+a$ pour y, tous les termes s'évanouiſſent. Donc le Point eſt plus que double. Mais ſi on cherche le troiſiéme Rang, on aura d'abord $(-a)u^3$; ce qui montre que ce Rang ſubſiſte, & que, par conſéquent, le Point cherché eſt un Point triple.

L'Origine étant portée ſur ce Point, l'équation de la Courbe ſe réduit à $z^4 + 2auzz - au^3 = 0$, qui a quatre racines $z = \pm\sqrt{(-au \pm u\sqrt{(aa + au)})}$, &, qui ſe peut conſtruire ainſi. Ayant décrit, avec un Paramétre $= a$, la Parabole NCN, dont l'Axe des ordonnées eſt CQ; on prendra ſur cette Courbe le point A, dont l'ordonnée CB & l'abſciſſe BA ſont toutes deux égales à a. Ce Point A étant pris pour l'Origine, on ménera la Ligne des ordonnées PAp parallèle à CB, & on donnera à chaque ordonnée AP $[u]$ des abſciſſes PM $[z]$ & PM $[-z]$, moyennes proportionelles entre AP & PN. Car, puiſque AP $[u]$ = BQ, CQ = CB + BQ = $a + u$, & QN, par la nature de la Parabole, $= \sqrt{(aa + au)}$. Donc PN $= -a \pm \sqrt{(aa + au)}$. Ainſi PM, moyenne proportionelle entre AP & PN eſt $= \pm\sqrt{(-au \pm u\sqrt{(aa + au)})}$. Fig. 133.

Du côté des ordonnées poſitives, la Courbe n'a que deux Branches infinies AM, AM, parce que des quatre racines $\pm\sqrt{(-au \pm u\sqrt{(aa + au)})}$ les deux $\pm\sqrt{(-au - u\sqrt{(aa + au)})}$ ſont imaginaires, & parce, auſſi, qu'on ne prend pas une moyenne propor-

PLANCHE tionelle entre une grandeur positive AP & une négative CH. X.
XVIII. PN. Mais du côté des ordonnées négatives, la Courbe §. 173.
a deux feuilles Amm, A*mm*, qui se nouent en A & y font un Point triple.

Exemple V. On demande si la Courbe représentée par l'éq: 1e. a quelque Point multiple?

En substituant dans cette équation $y+u$ à y & $x+z$ à x, on trouvera que les coëfficients de u & de z dans le prémier Rang, égalés à zéro, donnent les équations 2e, & 3e.

1e. $y^4 + yyxx - 8ay^3 - 4ayyx - 4ayxx + 19aayy + 16aayx + 5aaxx - 12a^3y - 14a^3x - 3a^4 = 0.$

2e. $4y^3 + 2yxx - 24ayy - 8ayx - 4axx + 38aay + 16aax - 12a^3 = 0.$

3e. $2yyx - 4ayy - 8ayx + 16aay + 10aax - 14a^3 = 0.$

Cette 3e. équation donne $x = \frac{2yy - 8ay + 7aa}{yy - 4ay + 5aa}a$, & cette valeur substituée dans les deux autres transforme la 1e. en $y^8 - 16ay^7 + 105a^2y^6 - 364a^3y^5 + 692a^4y^4 - 608a^5y^3 - 80a^6y^2 + 576a^7y - 320a^8 = 0$, & la 2e. en $2y^7 - 28ay^6 + 163a^2y^5 - 510a^3y^4 + 904a^4y^3 - 848a^5y^2 + 304a^6y + 32a^7 = 0$. On cherchera les racines communes à ces deux équations, en cherchant leur commun diviseur. Si on divise la 1e. par la 2e. on trouvera pour le reste $-9(y^6 - 12ay^5 + 6aay^4 - 160a^3y^3 + 240a^4y^2 - 192a^5y + 64a^6)$, & ce prémier reste divisant la 2e. équation donne un second reste $-(5y^5 - 50ay^4 + 216a^2y^3 - 496a^3y^2 + 592a^4y - 288a^5)$, par lequel divisant le prémier reste multiplié par 5, on aura un troisiéme reste $-16(y^4 - 8ay^3 + 24a^2y^2 - 32a^3y + 16a^4)$. Ce troisiéme reste divisant le second donnera le quatriéme

16 (y^3

Ch. X. §. 173. $16(y^3 - 6ay^2 + 12a^2y - 8a^3)$ qui divise exactement le troisiéme. C'est donc ce quatriéme reste qui contient les racines communes aux trois équations à remplir. L'équation qu'il fournit $y^3 - 6ayy + 12a^2y - 8a^3 = 0$, quoique du troisiéme dégré, n'a qu'une racine $y - 2a = 0$, dont cette équation est le cube. Donc si la Courbe a quelque Point multiple, ce ne peut être que sur l'abscisse de l'ordonnée $y = 2a$. Planche XVIII.

Et pour s'assurer de sa juste position, on substituera $2a$ pour y dans l'éq: $x = \frac{2yy - 8ay + 7aa}{yy - 4ay + 5aa}a$ & on trouvera $x = -a$. Comme ces valeurs $-a$ & $2a$, de x & de y, substituées dans les trois équations à remplir, font évanouïr leur prémier membre, on peut conclure assurément que le Point, dont l'abscisse est $-a$ & l'ordonnée $2a$, est un Point multiple.

On trouvera le dégré de sa multiplicité en continuant le Calcul de la transformation. Le second Rang est $(6yy + xx - 24ay - 4ax + 19aa)uu + (4yx - 8ay - 8ax + 16aa)uz + (yy - 4ay + 5aa)zz$, que la substitution de $-a$ à x & de $2a$ à y réduit à $(0)uu + (0)uz + (aa)zz$. Ainsi, ce second Rang ne disparoissant pas, on sait que le Point en question n'est qu'un Point double.

En effet, si on pousse jusqu'au bout le calcul de la transformation, on réduira l'équation de la Courbe à $u^4 + uuzz - 6auuz + aazz = 0$, qui se construit ainsi. On décrira du centre C, avec un raïon $CA = 4a$, le Cercle ANDN, & sur le raïon CA, comme diamétre, le Cercle $ANCN$. On prendra le point A, où ces Cercles se touchent, pour Origine, & ayant mené NN perpendiculaire à l'abscisse AP [z], on partagera en deux également en M & M, les parties NN, NN interceptées entre les deux circonférences. Les points M, M, sont Fig. 134.

PLANCHE XVIII. ceux de la Courbe. Car $PN = \sqrt{(AP \times PD)} = \sqrt{(8az - zz)}$, & $PN = \sqrt{(AP \times PC)} = \sqrt{(4az - zz)}$. Donc, du coté positif, $PM = +\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} + \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$, & $PM = +\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} - \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$; &, du coté négatif, $PM = -\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} - \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$, & $PM = -\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} + \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$: en général $u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$. Donc $uu = \frac{1}{4}(8az - zz) + \frac{1}{4}(4az - zz) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(32aazz - 12az^3 + z^4)}$, ou $uu - 3az + \frac{1}{2}zz = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(32aazz - 12az^3 + z^4)}$. soit $u^4 - 6auuz + 9aazz + zzuu - 3az^3 + \frac{1}{4}z^4 = 8aazz - 3az^3 + \frac{1}{4}z^4$, & enfin $u^4 - 6auuz + aazz + zzuu = 0$. Il est manifeste, par cette équation & par la construction qu'on vient d'en donner, que la Courbe a un Point double à l'Origine A, où les Branches MAM, *MAM* viennent se toucher. CH. X. § 173.

Exemple VI. On propose la Courbe représentée par l'éq: $y^4 + x^4 - 2aayy - 2bbxx + b^4 = 0$. Et on demande si elle a des Points multiples?

Le prémier Rang de la transformée étant $(4y^3 - 4aay)u + (4x^3 - 4bbx)z$, on a ces trois équations à remplir,

1e. $y^4 + x^4 - 2aayy - 2bbxx + b^4 = 0$
2e. $4y^3 - 4aay = 0$
3e. $4x^3 - 4bbx = 0$

La 2e. a les trois racines $y = 0, y = a, y = -a$. Et la 3e. aussi les trois racines $x = 0$, $x = b$, $x = -b$. On combinera donc les trois valeurs d'y avec les trois valeurs d'x: ce qui fait neuf combinaisons.

$x = 0$,

Ch. X. §. 173.

$x=0, y=0$	Ces valeurs d'x & d'y substituées dans l'équation proposée la changent en	$0+0-0-0+b^4=0$	; ce qui est absurde.
$x=0, y=a$		$a^4+0-2a^4-0+b^4=0$	ce qui est absurde, à moins que a ne soit $=b$.
$x=0, y=-a$		$a^4+0-2a^4-0+b^4=0$	
$x=b, y=0$		$0+b^4-0-2b^4+b^4=0$	
$x=b, y=a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$	ce qui est absurde.
$x=b, y=-a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b=0$	
$x=-b, y=0$		$0+b^4-0-2b^4+b^4=0.$	
$x=-b, y=a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$	ce qui est absurde.
$x=-b, y=-a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$	

Il paroit donc que, hors le cas où $a=b$, la Courbe n'a que deux Points multiples, qui répondent à l'ordonnée $y=0$, & aux abscisses $x=b$, $x=-b$. C'est aussi ce que confirme l'examen de la Courbe. Son équation marque que ses Axes sont en même tems Diamétres & Contrediamétres [§. 76]. Elle se peut réduire à $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{(a^4-(xx-bb)^2)})}$. Chaque abscisse x aura donc quatre ordonnées, tant que $x<\sqrt{(aa+bb)}$. Si l'on fait $x=0$, on aura $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{(a^4-b^4)})}$. Ainsi prenant sur l'Axe des ordonnées, AC & A*C*, égales à $\pm\sqrt{(aa+\sqrt{(a^4-b^4)})}$, & Ac, A*c*, égales à $\pm\sqrt{(aa-\sqrt{(a^4-b^4)})}$, les Points C, *C*, c, *c*, seront des Points de la Courbe. Si on fait $x=\pm b$, on aura $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{a^4})}=\pm\sqrt{(aa\pm aa)}=\pm a\sqrt{2}$ & o. Prenant donc AB & Ab égales à $\pm b$, les Points B & b sont les Points doubles de la Courbe. Mais ces abscisses AB & Ab ont encore les ordonnées BD, bd, B*D*, b*d*, égales à $\pm a\sqrt{2}$. Si l'on fait $x=\pm\sqrt{(aa+bb)}$, on aura $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{(a^4-a^4)})}=\pm a$. Donc, prenant les abscisses AE, Ae égales à $\pm\sqrt{(aa+bb)}$, & leur appliquant les ordonnées EF, E*F*, ef, e*f*, égales à $\pm a$, les Points F, *F*, f, *f* sont encore des Points de la Courbe, & même des limites. Car si $x>\sqrt{(aa+bb)}$, y est imaginaire. On voit par-là, & on verroit encore

Planche XVIII.

Fig. 13

 plus

PLANCHE XVIII. plus clairement par un détail, mais un peu long, que la Courbe a la figure de deux cœurs qui se pénétrent l'un l'autre par la pointe, & se croisent en B & b qui sont les deux Points doubles que nous a donné le calcul. CH. X. §. 171.

Ce même calcul fait voir que quand $a = b$, les points Fig. 136. C, *C* extrémités des ordonnées $AC = a$, $AC = -a$, sont encore des Points doubles. Dans ce cas, la Courbe en a quatre ; & elle est composée de deux Ovales qui se croisent en B, C, b, *C*. Mais il faut remarquer que cette Courbe n'est pas, comme la précédente, une Courbe simple : c'est l'assemblage de deux Courbes, chaque Ovale étant une Ligne du second Ordre. Car l'équation proposée, réduite, par la supposition de $a = b$, à $y^4 + x^4 - 2aayy - 2aaxx + a^4 = 0$, se décompose en ces deux $yy + xy\sqrt{2} + xx - aa = 0$, & $yy - xy\sqrt{2} + xx - aa = 0$. Donc [§. 21], la Courbe qu'elle représente est composée de deux autres.

Exemple VII. On demande les Points multiples de la Courbe représentée par l'éq : $x^4 - 2ay^3 - 3aayy - 2aaxx + a^4 = 0$?

Les trois équations à remplir sont

1e. $x^4 - 2ay^3 - 3aayy - 2aaxx + a^4 = 0$

2e. $-6ayy - 6aay = 0$

3e. $4x^3 - 4aax = 0$.

La 2e. a deux racines $y = 0$ & $y = -a$, & la 3e. trois $x = 0$, $x = a$, $x = -a$, qu'on combinera les unes avec les autres.

$x = 0$,

Ch. X. §. 173.

Valeurs		Résultats
$x=0, y=0$	Ces valeurs de x & de y substituées dans la proposée la changent en	$0-0-0-0+a^4=0$, ce qui est absurde.
$x=0, y=-a$		$0+2a^4-3a^4-0+a^4=0$
$x=a, y=0$		$a^4-0-0-2a^4+a^4=0$
$x=a, y=-a$		$a^4+2a^4-3a^4-2a^4+a^4=0$, ce qui est absurde.
$x=-a, y=0$		$a^4-0-0-2a^4+a^4=0$
$x=-a, y=-a$		$a^4+2a^4-3a^4-2a^4+a^4=0$, ce qui est absurde.

Il ne peut donc y avoir que trois Points multiples ; un, dont l'abscisse est o, & l'ordonnée $-a$; un, dont l'abscisse est a & l'ordonnée o ; & un, dont l'abscisse est $-a$ & l'ordonnée o. Planche XVIII.

Ces Points ne sont que doubles. Car le second Rang de la transformée est $(-6ay-3aa)uu+(0)uz+(6ax-2aa)zz$; que la substitution de o pour x & $-a$ pour y réduit à $3aauu-2aazz$; que la substitution de a pour x & de o pour y change en $-3aauu+4aazz$; & que la substitution de $-a$ pour x & de o pour y transforme encore en $-3aauu+4aazz$. Donc aucune de ces suppositions ne faisant disparoitre le second Rang, les trois Points multiples de la Courbe ne sont que des Points doubles.

L'équation de la Courbe $x^4-2aaxx+a^4=2ay^3+3aayy$ se résout en ces quatre racines $x=\pm\sqrt{(aa\pm y\sqrt{(2ay+3aa)})}$. Si on fait $y=0$, on aura $x=\pm\sqrt{aa}=\pm a$. Qu'on prenne donc les abscisses AB $=a$, Ab $=-a$; B, b seront des Points de la Courbe, & mêmes des Points doubles. Si on fait $y=\frac{1}{2}a$, on aura $x=\pm\sqrt{(aa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(aa+3aa)})}=\pm a\sqrt{2}$ & o. Ainsi prenant l'ordonnée AC $=\frac{1}{2}a$, le Point C est un de ceux de la Courbe, aussi bien que les Points D, d, extrémités des abscisses CD $=+a\sqrt{2}$, & Cd $=-a\sqrt{2}$. Les racines $\pm\sqrt{(aa-y\sqrt{(2ay+3aa)})}$ désignent les Branches BC, bC, qui se terminent au Point C ; ces racines deve- Fig. 137.

PLANCHE XVIII. devenant imaginaires, quand $y > \frac{3}{2}a$. Mais les racines $\pm\sqrt{(aa + y\sqrt{(2ay + 3aa)})}$ défignent les Branches BD, bd, qui font paraboliques & vont à l'infini. Du côté des ordonnées négatives, fi l'on prend $y = -a$, on aura $x = \pm\sqrt{(aa \pm a\sqrt{(3aa - 2aa)})} = \pm a\sqrt{2}$ & o. Prenant donc l'ordonnée $AE = -a$, le Point E apartient à la Courbe; il en eft même un Point double. Et fi à cette ordonnée AE on donne les deux abfciffes $EF = +a\sqrt{2}$, $Ef = -a\sqrt{2}$, on aura encore deux Points de la Courbe, F, f. Enfin, fi l'on fait $y = -\frac{3}{2}a$, on aura $x = \pm\sqrt{(aa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(3aa - 3aa)})} = \pm a$, de forte que l'ordonnée $AG = -\frac{3}{2}a$ n'a que deux abfciffes $GH = +a$, $Gh = -a$, & ces abfciffes font des limites; car les ordonnées plus négatives que AG n'ont que des abfciffes imaginaires. On voit par-là que la Courbe eft compofée de deux Branches paraboliques, qui fe nouent aux Points B, b, E, qui ont été affignés par le calcul. CH. X. §. 173.

174. C'EST encore par le Principe du §. 170, qu'on peut réfoudre ce Problême *. L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver les conditions qui donnent des Points multiples à la Courbe?

Ce Problême n'a lieu que quand l'équation renferme plufieurs lettres qui défignent des grandeurs conftantes. Lorfqu'elle n'en a qu'une, comme dans prefque tous les Exemples précédents, l'augmentation ou diminution de ce Paramêtre ne produit que des Courbes femblables, qui toutes, ou n'ont aucun Point multiple, ou en ont le même nombre.

Mais quand l'équation renferme plufieurs conftantes, il arrive fouvent que certains raports de ces conftantes don-

† *Ufage de l'Anal.* pag. 240.

Ch. X. §. 174. donnent à la Courbe des Points multiples que d'autres raports leur refusent. PLANCHE XVIII.

Pour déterminer ces raports, on fera les mêmes équations qui ont été indiquées au §. préc. Mais les opérations qu'on fera sur ces équations, au lieu d'aller à déterminer les variables x & y, iront à les exterminer; afin qu'il reste des équations entre les quantités constantes, qui expriment leurs raports propres à donner des Points multiples, ou qui manifestent l'impossibilité des Points multiples dans cette Courbe.

Ainsi, puisque l'existence des Points doubles donne trois équations [§. préc.], desquelles il n'en reste qu'une quand on a éliminé x & y; l'existence des Points doubles dépend en général d'une seule condition.

Celle des Points triples fournit six équations, qui se réduisent à quatre quand on a éliminé x & y: l'existence d'un Point triple dépend donc en général de quatre conditions.

De même, celle d'un Point quadruple dépend de huit conditions; celle d'un Point quintuple de treize conditions; &c. Celle d'un Point d'une multiplicité du dégré t, de $\frac{1}{2}tt + \frac{1}{2}t - 2$ conditions.

Cela n'est ainsi qu'en général, & n'empêche pas que, dans plusieurs Cas particuliers, des équations qui renferment plusieurs constantes ne puissent être telles que, quelque supposition qu'on fasse, les Courbes qu'elles représentent auront toûjours des Points multiples, ou n'en auront jamais.

Exemple I. On demande, si la Courbe CMBm a des Points multiples, où ils sont, & ce qu'ils sont? Sa construction est telle. Fig. 135.

Sur le diamétre AB du Cercle ANBn, on prend à volonté un Point C, & menant une infinité de perpen-

PLANCHE XVIII. diculaires à ce diamétre, comme NPn, qui coupe le CH. X. §. 174.
diamétre en P & la circonférence en N, n; on tire par C les droites CM, Cm parallèles à AN, An. Les Points M, m sont des Points de la Courbe.

Si on nomme l'abscisse AP, x; l'ordonnée PM, y; le diamétre AB, a; sa partie AC, b; on aura $CP = x - b$, &, par la nature du Cercle, $PN = \sqrt{AP \times PB} = \sqrt{(ax - xx)}$. Les triang: sembl: APN, CPM, donnent $AP^2 [xx] : PN^2 [ax - xx] = CP^2 [xx - 2bx + bb] : PM^2 [y^2]$. Donc, multipliant les extrêmes & les moyennes, & divisant par x, $xyy + x^3 - (2b + a)xx + (bb + 2ab)x - abb = 0$.

Pour savoir en quel cas cette Courbe peut avoir des Points multiples, on cherchera le prémier Rang de la transformée qui résulte de la substitution de $y + u$ à y, & de $x + z$ à x. Ce Rang est $(2xy)u + (yy + 3xx - 2(2b + a)x + (bb + 2ab))z$.

On aura donc, y compris la proposée, ces trois équations à remplir,

$$1^e.\ xyy + x^3 - (2b + a)xx + (bb + 2ab)x - abb = 0$$
$$2^e.\ yy + 3xx - 2(2b + a)x + (bb + 2ab) = 0$$
$$3^e.\ 2xy = 0.$$

La 3e. donne, ou $x = 0$, ou $y = 0$, c'est-à-dire, que les Points multiples de la Courbe, si elle en a, se trouvent ou sur l'Axe des ordonnées ou sur celui des abscisses.

Qu'on fasse d'abord $x = 0$, & l'on aura les Points multiples qui se peuvent trouver sur la Ligne des ordonnées. En substituant o pour x dans les équations 1e & 2e, on les réduit à $-abb = 0$ & $bb + 2ab = 0$, qui ne peuvent s'accorder qu'autant que b est $= 0$. Mais cette valeur de b, substituée dans la proposée, la change en $xyy + x^3 - axx = 0$, réductible en ces deux-cy $x = 0$, & $yy + xx - ax = 0$. La prémiére désigne l'Axe

CH. X. §. 174. l'Axe des ordonnées [§. 40, III, 2] & la seconde le Cercle ANBn. Le système de ces deux Lignes, qui se touchent en A, y forme un Point double. Mais c'est-là un Cas particulier, qui n'est compris qu'incidemment dans l'équation de la Courbe proposée. On peut donc assurer que, hors ce Cas-là, la Courbe n'a aucun Point multiple sur l'Axe des ordonnées. PLANCHE XVIII.

Voyons si elle en a sur l'Axe des abscisses. C'est la seconde racine $y=0$ de l'équation 3e, qui les indique. Cette valeur d'y substituée dans les équat : 1e. & 2e. les change en $x^3-(2b+a)x^2+(bb+2ab)x-abb=0$, & en $3xx-(4b+2a)x+bb+2ab=0$. La Courbe aura donc quelque Point multiple, si on peut trouver une valeur d'x, qui satisfasse en même tems à ces deux équations. Que si elle n'y satisfait qu'au cas que a & b ayent certain raport, ce raport est la condition qui donne à la Courbe un ou plusieurs Points multiples. Il faut donc chercher le diviseur commun de ces deux équations. On trouvera, par les régles ordinaires, que l'une & l'autre est divisible par $x-b$, qui, égalé à zéro, donne $x=b$.

Donc, quelque supposition qu'on fasse touchant le raport d'a & b, la Courbe a un Point multiple à l'extrémité de l'abscisse b, c'est-à-dire en C. Et on verra aisément que ce Point est un Point double: ce que la Construction géométrique de la Courbe rend aussi fort sensible.

Exemple II. On propose l'équation semblable, mais plus générale, $xyy+ax^3+bxx+cx+d=0$, & l'on demande quel doit être le raport des quantités constantes a, b, c, d, afin que la Courbe représentée par cette équation ait quelque Point multiple?

Les trois équations à remplir seront

1e. $xyy + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

2e. $yy + 3axx + 2bx + c = 0$

3e. $2xy = 0$.

Cette derniére donne $x = 0$, ou $y = 0$, c'est-à-dire, que les Points multiples, si la Courbe en a, ne peuvent se trouver que sur l'Axe des ordonnées ou sur celui des abscisses.

La supposition de $x = 0$ change la proposée en $d = 0$. Donc, si la Courbe a des Points multiples sur l'Axe des ordonnées, il faut que d soit $= 0$. Alors l'équation de la Courbe est $xyy + ax^3 + bx^2 + cx = 0$, qui se résoud en ces deux $x = 0$, & $yy + ax^2 + bx + c = 0$. Elle exprime donc l'Axe des ordonnées avec une Courbe du second Ordre. Ces deux Lignes se coupent en deux points situés aux extrémités des ordonnées $+\sqrt{-c}$ & $-\sqrt{-c}$; grandeurs qui ne seront pas imaginaires, si c est négative: & ces deux interſections peuvent être regardées comme des Points doubles du Systéme de ces deux Lignes.

La supposition de $y = 0$, qui donne les Points multiples sur l'Axe des abscisses, change la proposée en $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, & l'équation 2e. en $3ax^2 + 2bx + c = 0$. La Courbe aura donc des Points multiples, si ces deux équations ont quelque racine commune. Ainsi il faut voir quelle rélation de a, b, c, d, peut leur donner une racine commune. On la trouvera en divisant la 1e. par la 2e. & celle-ci par le reste $\frac{6ac - 2bb}{9a} x + \frac{9ad - bc}{9a}$, ou $x + \frac{9ad - bc}{6ac - 2bb}$. Le reste de cette seconde division est $36aac^3 - 9abbcc - 162aabcd + 36ab^3d + 243a^3dd$, ou, divisant

Fig. 132.

Fig. 133.

Fig. 134.

Fig. 136.

Fig. 138.

CH. X. § 174. divisant par $9a$, $4ac^3 - bbcc - 18abcd + 4b^3d + 27aadd$. PLANCHE XVIII.
Si les équat: 1e. & 2e. ont quelque racine commune, y étant $= 0$, ce reste doit être $= 0$. C'est donc l'équat: $4ac^3 - bbcc - 18abcd + 4b^3d + 27aadd = 0$, qui exprime la rélation des coëfficients a, b, c, d, propre à donner à la Courbe un Point multiple. Ce Point sera sur l'Axe des abscisses, à l'extrémité de l'abscisse $\frac{bc - 9ad}{6ad - 2bb}$, qui se déduit de l'éq: $x + \frac{9ad - bc}{6ac - 2bb} = 0$, racine commune des équations 1e. & 2e.

Ce n'est qu'un Point double; car si on cherche le second Rang de la transformée, on trouvera d'abord $(-x)uu$, qui ne s'évanouit que par la supposition de $x = 0$; supposition qui, comme on l'a vû, change la Courbe en une Ligne du second Ordre combinée avec une Droite.

Si on fait attention que la supposition $y = 0$ marque que les Points multiples, si la Courbe en a, se trouvent sur l'Axe des abscisses, & qu'elle change la proposée en $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dont les racines marquent les abscisses par l'extrémité desquelles passe la Courbe; on conclura d'abord que la Courbe n'a de Points doubles qu'autant que l'éq: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a des racines égales; puisque pour former un Point double, il faut le concours de deux Points simples.

Et c'est aussi justement ce qu'exprime l'équation 2e, transformée par la supposition de $y = 0$ en $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Celle-ci se forme de l'éq: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, en multipliant ses termes par la progression arithmétique 3, 2, 1, 0. Et la Régle de Mr. HUDDE montre que quand une équation a deux racines égales; si on multiplie ses termes par ceux d'une progression arithmétique, le produit est une équation qui aura une de ces racines égales. [*V. Append*, N°. 3].

 Exemple

PLANCHE XVIII.

Exemple III. Mais si l'équation de la Courbe avoit été $xyy + ey + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, * les trois équations à remplir seroient CH. X. §. 174.

1e. $xyy + ey + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
2e. $2xy + e = 0$
3e. $yy + 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

La 2e. donne $y = -\frac{e}{2x}$, qui est une équation à l'Hyperbole. C'est donc sur une Hyperbole que se doivent trouver tous les Points multiples que la Courbe peut avoir. Cette valeur d'y substituée dans les équations 1e. & 3e. les transforme en $\frac{ee}{4x} - \frac{ee}{2x} + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ou, multipliant par x, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - \frac{1}{4}ee = 0$, & $\frac{ee}{4xx} + 3ax^2 + 2bx + c = 0$, ou, multipliant par xx, $3ax^4 + 2bx^3 + cxx + \frac{1}{4}ee = 0$. Il faudroit donc chercher quels sont les raports de a, b, c, d, e, qui donnent à ces deux équations des racines communes; & ces racines détermineroient la valeur de l'abscisse, ou des abscisses, qui répondent aux Points multiples de la Courbe.

Mais sans s'engager dans ce Calcul, qui seroit un peu long, on voit que la seconde de ces équations est justement celle qui résulte quand on multiplie successivement les termes de la prémiére par la progr: arith: 3, 2, 1, 0, −1. D'où l'on peut conclure que la proposée a des Points doubles, quand l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ a des racines égales.

Je dis des Points doubles. Car si l'on cherche le second Rang de la transformée, on trouvera $(x)uu + (2y)uz + (3ax + b)zz$, dont les coëfficients égalés à zéro,

* Voyez NEWTON, *Enumer. lin. tert. Ord.* §. IV.

CH. X zéro, donnent $x=0$, $y=0$, $3ax+b=0$. Donc $b=0$; PL. XIX.
§. 174. & ces valeurs, substituées dans les équations à remplir, donnent $d=0$, $e=0$, & $c=0$; ce qui réduit la proposée à $xyy+ax^3=0$, réductible en ces trois équations $x=0$, $y-x\sqrt{-a}=0$, $y+x\sqrt{-a}=0$. La premiére représente l'Axe des ordonnées : les deux autres sont imaginaires, quand a est positive; mais quand a est négative, elles représentent deux Droites passant par l'Origine. Dans ce cas, le Point triple est à l'Origine sur le concours des trois Droites que représente l'éq : $xyy-ax^3=0$.

Exemple IV. On demande en quels Cas la *Conchoïde* a des Points multiples?

La Conchoïde se construit ainsi. Hors de la Droite AB, qui se nomme la *Régle*, on a pris un Point fixe P, Fig. 139. apellé le *Pole*, duquel on méne à la Régle une infinité de Droites, comme PC, PE, &c. qu'on prolonge toutes également, ensorte que CD = EF = &c. La Courbe FDH, qui passe par les extrémités de tous ces prolongements, est la *Conchoïde supérieure.* Si on avoit pris, de l'autre côté de la Régle, des parties Cd, Ef, &c. égales à CD, EF; les Points d, f, &c. auroient été à la *Conchoïde inférieure.*

Ces deux Courbes n'en font qu'une seule, exprimée par l'équation qui se forme en considérant la ressemblance des triangles PCE, PFQ: elle donne cette proportion QC: CP = FE:EP. Donc, en nommant CP, abaissée perpendiculairement du Pole sur la Régle, a; CD, ou EF, b; l'abscisse CQ, x; & l'ordonnée QF, y; on aura $x:a = b:\frac{ab}{x} =$ EP. Ainsi PF = PE + EF $= \frac{ab}{x} + b = \frac{b}{x}(a+x)$.

PL. XIX. $+x$). Mais $PF^2 = PQ^2 + QF^2$. Donc $\frac{bb}{xx}(aa + 2ax + xx) = aa + 2ax + xx + yy$, où $yyxx + x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2abbx - aabb = 0$. C'eſt dans cette équation qu'il faut chercher ſi la Conchoïde a des Points multiples. CH. X. §. 174.

On aura ces trois équations à remplir

1°. $yyxx + x^4 + 2ax^3 + (aa - bb)xx - 2abbx - aabb = 0$

2°. $2xxy = 0$

3°. $2xyy + 4x^3 + 6ax^2 + 2(aa - bb)x - 2abb = 0$

dont la 2°. donne $x = 0$, ou $y = 0$.

La ſuppoſition de $x = 0$ change la 1°. en $-aabb = 0$, & la 2° en $-2abb = 0$. De l'une & de l'autre il réſulte $a = 0$, ou $b = 0$.

Si on fait $a = 0$, le Pole tombe ſur la Régle, & l'équation ſe réduit à $y^2x^2 + x^4 - bbxx = 0$, qui ſe décompoſe en $x = 0$, $x = 0$, & $yy + xx - bb = 0$. Les deux prémiéres expriment l'Axe des ordonnées, & la troiſiéme un Cercle décrit du centre C avec un raïon $CD = b$. Il coupe l'Axe des ordonnées en deux Points qui ſont des Points doubles. Mais ce Cas n'apartient pas à la Conchoïde.

Si on fait $b = 0$, on change la propoſée en $yyxx + x^4 + 2ax^3 + aaxx = 0$, qui ſe décompoſe en $x = 0$, $x = 0$, $yy + xx + 2ax + aa = 0$. Les deux prémiéres indiquent l'Axe des ordonnées, & la troiſiéme n'exprime que deux Droites imaginaires $y\sqrt{-1} + x + a = 0$, $y\sqrt{-1} - x - a = 0$.

Ainſi la ſuppoſition de $x = 0$ ne nous aprend rien touchant la Conchoïde, ſinon que cette Courbe n'a aucun Point multiple ſur l'Axe des ordonnées.

La ſuppoſition de $y = 0$ réduit l'éq: 1°. à $x^4 + 2ax^3 + (aa - bb)xx - 2abbx - aabb = 0$, & l'éq: 3°. à

$4x^3 +$

CH. X. §. 174. $4x^3 + 6ax^2 + 2(aa - bb)x - 2abb = 0$. Cette ſeconde étant celle qui réſulte de la prémiére multipliée, terme à terme, par la progr: arith: 4, 3, 2, 1, 0, & diviſée par x, marque que la Courbe aura quelque Point multiple quand l'éq: $x^4 + 2ax^3 + (aa - bb)xx - 2abbx - aabb = 0$ aura deux racines égales. Or elle les a toûjours, puiſqu'elle eſt diviſible par $xx + 2ax + aa = 0$, ou $(x+a)^2 = 0$. Donc la Courbe a un Point multiple à l'extrémité de l'abſciſſe négative $x = -a$, c'eſt-à-dire, au Pole, & cela quelque raport qu'il y ait entre a & b. On trouve la même choſe en cherchant la racine commune des deux équations que donne la ſuppoſition d'$y = 0$. Et on prouve ſans peine que ce Point eſt un Point double. PL. XIX.

On le voit auſſi par la Conſtruction de la Courbe. Mais ſi le prolongement CD étoit pris plus petit que la diſtance PC du Pole à la Régle; on pourra être ſurpris de voir que le Point P, où eſt le Pole, ſoit un des Points de la Courbe, quoiqu'il ne paſſe aucune Branche par ce Point-là. Il apartient pourtant à la Courbe par ſon équation. Car ſi l'on fait $y = 0$, pour avoir les Points où la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes PD, on aura $x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2ab^2x - a^2b^2 = 0$, ſoit $(xx + 2ax + aa)(xx - bb) = 0$, qui a quatre racines $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + a = 0$, $x + a = 0$. La racine $x - b = 0$, ou $x = b = CD$, marque le Point D. La racine $x + b = 0$, ou $x = -b = Cd$, déſigne le Point d, & la racine double $x + a = 0$, ou $x = -a = CP$, indique le Point P, qui eſt par conſéquent un des Points de la Courbe. On verra dans les Chapp. ſuivants, aſſez d'Exemples de ces Points iſolés & détachés du reſte du contour de la Courbe, à laquelle pourtant l'équation démontre qu'ils apartiennent. On y parlera de leur origine, de la maniére de les reconnoi- Fig. 140.

PL. XIX. tre, d'assigner leur place & le dégré de leur multiplicité. CH. X. §. 174.

Exemple V. On propose la Courbe dont voici la Construction, & on demande en quel Cas elle a des Points multiples?

Fig. 141. Sur le plan d'un Cercle décrit du centre C, avec le raïon CN, on a tracé la Droite AB. D'un Point fixe A pris sur cette Droite, on méne des Droites AN à la circonférence, & abaissant NP perpendiculaire sur AB, on donne à l'abscisse AP des ordonnées PM, PM égales à AN.

On aura l'équation de cette Courbe en nommant a, la perpendiculaire CF abaissée du centre C sur la Droite AB; b, la portion AF de cette Droite, comprise entre le Point F & le Point fixe A; r, le raïon CN; x, l'abscisse AP; y, l'ordonnée $PM = AN$. Car on aura $PN = \sqrt{(AN^2 - AP^2)} = \sqrt{(yy - xx)}$; $EN = PN - PE = \sqrt{(yy - xx)} - a$; $CE = AP - PF = x - b$; & le triang. rect. CEN donnera $CN^2 [rr] = CE^2 [xx - 2bx + bb] + EN^2 [yy - xx - 2a\sqrt{(yy - xx)} + aa]$. Soit, pour abréger, $cc = aa + bb - rr$, & l'on aura $yy - 2bx + cc = 2a\sqrt{(yy - xx)}$, ou, quarrant & transposant, $y^4 - 4bxyy + (4bb + 4aa)xx + (2cc - 4aa)yy - 4bccx + c^4 = 0$.

On aura donc, pour l'existence des Points multiples, ces trois équations à remplir.

1°. $y^4 - 4bxyy + (4bb + 4aa)xx + (2cc - 4aa)yy - 4bccx + c^4 = 0$

2°. $4y^3 - 8bxy + (4cc - 8aa)y = 0$

3°. $-4byy + (8bb + 8aa)x - 4bcc = 0$.

La 3°. donne $x = \frac{4byy + 4bcc}{8bb + 8aa} = \frac{byy + bcc}{2bb + 2aa}$, & cet-

te

CH. X. §. 174. te valeur d'x substituée dans la 2e. la transforme en $4y^3$ PL. XIX. $-\frac{8bby^3 + 8bbccy}{2bb + 2aa} + (4cc - 8aa)y = 0$, soit $\frac{8aay^3 - 16aabby + 8aaccy - 16a^4y}{2bb + 2aa} = 0$, ou $y^3 - 2bby + ccy - 2aay = 0$, qui a trois racines, $y = 0$, $y = +\sqrt{(2bb + 2aa - cc)}$, & $y = -\sqrt{(2bb + 2aa - cc)}$, soit $y = 0$, $y = +\sqrt{(aa + bb + rr)}$, $y = -\sqrt{(aa + bb + rr)}$, en mettant pour cc sa valeur $aa + bb - rr$.

La prémiére racine $y = 0$, donne $x\left[= \frac{byy + bcc}{2bb + 2aa}\right] = \frac{\frac{1}{2}bcc}{bb + aa}$, & ces valeurs d'$x$ & d'y mises dans la proposée, la changent en $\frac{4(bb + aa) \times \frac{1}{4}bbc^4}{(bb + aa)^2} - \frac{4bc^2 \times \frac{1}{2}bcc}{bb + aa} + c^4 = c^4 - \frac{bbc^4}{bb + aa} = 0$, soit $aac^4 = 0$. Il y aura donc quelque Point multiple sur l'Axe des abscisses AB, lorsque a, ou c, seront égaux à zéro.

Si $c = 0$, & par conséquent $cc\,[= aa + bb - rr] = 0$, ou $aa + bb = rr$, ce qui revient à dire, si le Point A est pris sur la circonférence du Cercle, [& pour cela il faut que la Droite AB coupe le Cercle, que CF soit moindre que le raïon CN;] alors l'équation sera réduite à $y^4 - 4bxyy - 4rrxx - 4ayy = 0$. La Courbe représente en Fig. 142. quelque sorte une besace, les deux Ovales, dont elle étoit composée, venant se réunir à l'Origine A, où elles forment un Point double; ce que l'équation même de la Courbe manifeste [§. 170].

Mais si $a = 0$, si la Droite AB passe par le centre C, l'équation proposée se réduit à $y^4 - 4bxyy + 4bbxx + 2ccyy - 4bccx + c^4 = 0$. Cette grandeur est le quarré de $yy - 2bx + cc = 0$, qui représente une Courbe du second

PL. XIX. Fig. 143. second Ordre, sçavoir une Parabole MIM, dont l'ordonnée PM $=$ AN $[y]$ a son quarré égal au rectangle du Paramétre $2b$ [Aa] & de l'abscisse IP $=$ AP $-$ IA $=$ $x - \frac{cc}{2b}$; en prenant AI moitié de AH $[\frac{cc}{b}]$ troisiéme proportionelle de AC $[b]$ & de AG $[c] = \sqrt{(AC^2 - CG^2)} = \sqrt{(bb - rr)}$. CH. X. §. 174.

Donc, à proprement parler, la supposition de $a = 0$ ne donne pas de Points multiples : mais comme, au lieu de la simple équation à la Parabole, $yy - 2bx + cc = 0$, elle présente le quarré de cette équation ; on peut dire qu'elle exprime deux Paraboles égales & semblables, exactement couchées l'une sur l'autre, & dont tous les Points sont, en quelque sorte, Points doubles. En effet, si on cherche le prémier Rang de l'équation transformée de $y^4 - 4bxyy + 4bbxx + 2ccyy - 4bccx + c^4 = 0$, on trouvera $(4y^3 - 8bxy + 4ccy)u + (-4byy + 8bbx - 4bcc)z$, dont les deux termes s'évanouissent dès qu'on prend des valeurs de x & de y qui font évanouïr le terme de la Pointe, c'est-à-dire, la proposée. Car la proposée est le quarré de $yy - 2bx + cc$, le coëfficient d'u est cette même grandeur multipliée par $4y$, & le coëfficient de z, cette même grandeur multipliée par $-4b$. Donc ces trois termes s'évanouissent en même tems ; c'est-à-dire, que tout Point de cette Courbe est un Point double [§. 171].

Les deux autres racines $y = \pm\sqrt{(2aa + 2bb - cc)}$ de l'éq: $y^3 - 2bby - 2aay + ccy = 0$, donnent, l'une & l'autre, $x \left[= \frac{byy + bcc}{2aa + 2bb}\right] = \frac{2aab + 2b^3}{2aa + 2bb} = b$. Ces valeurs d'$x$ & d'y, substituées dans la proposée, la réduisent à $-4a^4 - 4aabb + 4aacc = 0$, ou $-4aarr = 0$. Il y aura donc, lorsque a ou r seront $= 0$, des Points multi-

CH. X. §. 174. multiples sur la Droite indéfinie CF abaissée perpendiculairement sur AB du centre C. PL. XIX. Fig. 141.

La supposition d'$a = 0$ donne, comme on vient de le voir, l'équation quarrée d'une Parabole, dont tous les Points, & par conséquent ceux qui se trouvent sur la Droite CF, sont Points doubles.

Mais la supposition de $r = 0$, ne change rien à l'équation de la Courbe. Seulement cc, qui étoit $= aa + bb - rr$, vaut présentement $aa + bb$. Si on met cette valeur au lieu de cc, l'équation sera $y^4 - 4bxyy - 2(aa - bb)yy + 4(aa + bb)x^2 - 4(aa + bb)bx + (aa + bb)^2 = 0$.

Cette équation semble représenter une Courbe. Il est pourtant clair par la Construction, qu'elle n'exprime que deux Points détachez M, m. Car, quand le raïon $r = 0$, le Cercle se réduit au Point C, qui étoit son centre, & toute la Courbe se réduit aux Points M, m, déterminez en prenant FM $=$ AC $=$ Fm. Fig. 144. Et c'est aussi ce qu'on peut déduire de l'éq: $y^4 - 4bxyy - 2(aa - bb)yy + 4(aa + bb)xx - 4(aa + bb)bx + (aa + bb)^2 = 0$. Si on la résout comme une équation du 2e. dégré, on trouvera $yy - 2bx - aa + bb = \pm 2a(x - b)\sqrt{-1}$: ce qui marque que toutes les abscisses ont des ordonnées imaginaires, hors l'abscisse $x = b$; parce que celle-là seule rend zéro la grandeur $x - b$, qui multiplie la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$.

On peut donc regarder l'éq: $y^4 - 4bxyy - 2(aa - bb)yy + 4(aa + bb)xx - 4(aa + bb)bx + (aa + bb)^2 = 0$ comme réductible en ces deux $yy - 2(b + a\sqrt{-1})x + (b + a\sqrt{-1})^2 = 0$ & $yy - 2(b - a\sqrt{-1})x + (b - a\sqrt{-1})^2 = 0$, ou $yy - 2fx + ff = 0$, & $yy - 2gx + gg = 0$, en faisant $f = b + a\sqrt{-1}$ & $g = b - a\sqrt{-1}$. Ces équations désignent deux Paraboles, qui sont, à la vérité, imaginaires, puisque les grandeurs f & g sont

PL. XIX. Fig. 144. g sont imaginaires ; mais qui sont pourtant censées se couper en M & m. Car elles sont censées se couper aux Points où elles ont une même abscisse & une même ordonnée. Or à l'abscisse commune $x = b$, les ordonnées de l'une sont $\pm\sqrt{(2bf - ff)} = \pm\sqrt{(f(2b - f))} = \pm\sqrt{((b + a\sqrt{-1})(b - a\sqrt{-1}))} = \sqrt{(bb + aa)}$, celles de l'autre sont $\pm\sqrt{(2bg - gg)} = \pm\sqrt{(g(2b - g))} = \pm\sqrt{((b - a\sqrt{-1})(b + a\sqrt{-1}))} = \sqrt{(bb + aa)}$. Ainsi ces deux Paraboles imaginaires sont censées se rencontrer aux Points M, m, où elles ont une même abscisse $AF = b$, & des ordonnées égales $FM = +\sqrt{(bb + aa)}$, $Fm = -\sqrt{(bb + aa)}$. De cette manière, à ces Points M; m, ce qu'il y a d'imaginaire dans une de ces Paraboles est rendu réel par ce qu'il y a d'imaginaire dans l'autre. CH. X. §. 174.

Exemple VI. On demande quelles sont les Lignes du second Ordre qui ont des Points doubles ?

L'équation générale des Lignes du 2e. Ordre est $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$. Si on substituë $x + z$ à x & $y + u$ à y, la transformée sera

$$\left.\begin{array}{l} a + by + cx + dyy + exy + fxx \\ + (b + 2dy + ex)u + (c + ey + 2fx)z \\ + (d)uu + (e)uz + (f)zz \end{array}\right\} = 0$$

Si le Point de l'Origine est un Point double, les deux prémiéres lignes de cette équation s'évanouissent [§. 170]. Donc toute l'équation est réduite à $duu + euz + fzz = 0$, qui se peut décomposer en ces deux, $u\sqrt{d} + z\sqrt{\alpha} = 0$, $u\sqrt{d} + z\sqrt{\beta} = 0$ [où $\sqrt{\alpha} = \frac{e + \sqrt{(ee - 4df)}}{2\sqrt{d}}$ & $\sqrt{\beta} = \frac{e - \sqrt{(ee - 4df)}}{2\sqrt{d}}$]. Ces deux équations, si $\sqrt{\alpha}$ & $\sqrt{\beta}$

ne

ne sont pas imaginaires, représentent deux Droites qui passent par l'Origine. Donc la seule Ligne du second Ordre qui ait un Point double est le Systême de deux Droites qui se coupent en un Point, auquel on prend l'Origine des z & des *u*. Aucune Courbe du second Ordre ne peut donc avoir de Points doubles; mais tous leurs Points sont simples.

De même, si l'on cherche quelles Lignes du 3e. Ordre ont des Points triples; on trouvera, qu'après la substitution de $x + z$ à x, & de $y + u$ à y, & supposant que les trois prémiéres lignes de la transformée disparoissent [§. 171], elle est réduite au seul troisiéme Rang, qui fait une équation, $gu^3 + huuz + iuzz + lz^3 = 0$, réductible en trois autres de cette forme $u\sqrt{g} + z\sqrt{\alpha} = 0$, $u\sqrt{g} + z\sqrt{\beta} = 0$, $u\sqrt{g} + z\sqrt{\gamma} = 0$, qui représente trois Droites qui se coupent en un même Point, sur lequel on a porté l'Origine des *u* & des z. Donc la seule Ligne du 3e Ordre qui puisse avoir un Point triple est le Systême de trois Droites qui se croisent en un Point. Les Courbes de cet Ordre ne peuvent donc avoir aucun Point triple.

On prouvera de même que les Courbes du 4e. Ordre ne peuvent avoir aucun Point quadruple; & en général qu'une Courbe d'un Ordre quelconque ne sauroit avoir des Points dont la multiplicité ait le même exposant que l'Ordre de la Courbe.

175. CELA se prouve aussi par ce Principe [§. 39], Qu'une Droite ne peut rencontrer une Courbe en plus de Points qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son Ordre. Car si une Courbe de l'Ordre *v* avoit un Point dont la multiplicité fut du dégré *v*, toute Droite qui passeroit par ce Point-là seroit censée rencontrer la Courbe en *v* points [§. 169]. Donc une Droite, qui passeroit par ce Point-là & par un autre Point quelconque de la Courbe, seroit censée

censée la rencontrer au moins en $v+1$ points; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'une Courbe de l'Ordre v ait un Point multiple du dégré v.

176. Il suit de ce même Principe, Qu'une Courbe du 3e. Ordre qui a un Point double, ou une Courbe du 4e. Ordre qui a un Point triple, ou, en général, une Courbe de l'ordre v qui a un Point multiple du dégré $v-1$, ne peut avoir aucun autre Point multiple; pas même double. Car si elle l'avoit, la Droite menée par ces deux Points, seroit censée rencontrer la Courbe, au moins, en $(v-1)+2=v+1$ Points [§. 169]: ce qui est impossible, la Courbe n'étant que de l'Ordre v [§. 39].

177. Il suit encore, Qu'une Courbe du 5e. Ordre ne peut avoir deux Points triples; ni une Courbe du 6e. ou du 7e. Ordre, deux Points quadruples, &c. ni en général, une Courbe de l'ordre $2v-1$ deux Points multiples du dégré v. Car la Droite qui passeroit par ces deux Points seroit censée rencontrer la Courbe en $2v$ Points au moins [§. 169]; ce qui ne se peut, la Courbe n'étant que de l'Ordre $2v-1$ [§. 39]. Plus généralement, une Courbe de l'Ordre v, ou d'un Ordre inférieur, ne peut avoir deux Points multiples, de dégrés tels que leurs exposants ensemble fassent un nombre plus grand que v.

178. Si l'on considére, Qu'on peut toûjours faire passer une Courbe du 2e. Ordre par cinq Points donnés [§. 38], & qu'une Courbe du 2e Ordre ne peut rencontrer une Courbe de l'Ordre v en plus de $2v$ Points, [§. 46], on conclura, Qu'une Courbe de l'Ordre v ne peut avoir cinq Points, dont les dégrés de multiplicité fassent ensemble plus de $2v$ unités.

D'où

CH. X. §. 178. D'où il suit, Qu'une Courbe du 4ᵉ. Ordre ne peut avoir quatre Points doubles. Car la Courbe du 2ᵉ. Ordre, qui passeroit par ces quatre Points doubles & par un cinquiéme Point simple de la Courbe du 4ᵉ. Ordre, seroit censée la rencontrer neuf fois; ce qui est impossible, puisqu'elle ne la peut rencontrer qu'en huit Points. PL. XIX.

Et par la même raison, Qu'une Courbe du 5ᵉ. Ordre, qui ne peut avoir qu'un Point triple [§. 176], ne peut avoir avec ce Point triple plus de trois Points doubles.

Qu'une Courbe du 6ᵉ. Ordre ne peut avoir quatre Points triples, ni même trois Points triples & deux doubles.

Qu'une Courbe du 7ᵉ. Ordre ne peut avoir cinq Points triples, ni un Point quadruple avec trois triples & quelque autre multiple, &c.

179. De ce qu'on peut toûjours faire passer une Ligne du 3ᵉ. Ordre par neuf Points donnés [§. 38], & de ce qu'une Courbe du 3ᵉ. Ordre ne peut rencontrer une Courbe de l'Ordre v en plus de $3v$ Points [§. 46]: il suit qu'une Courbe de l'Ordre v ne peut avoir neuf Points, dont les dégrés de multiplicité fassent ensemble un nombre plus grand que $3v$. D'où l'on déduira,

Qu'une Courbe du 5ᵉ. Ordre ne peut avoir plus de six Points doubles.

Qu'une Courbe du 6ᵉ. Ordre, qui ne peut avoir deux Points quadruples, ne peut avoir, avec un Point quadruple, plus de six Points doubles; ni, avec deux Points triples, plus de cinq Points doubles; ni même, avec un Point triple, plus de sept doubles.

Qu'une Courbe du 7ᵉ. Ordre ne peut avoir, avec un Point quadruple & deux Points triples, plus de quatre Points doubles; ni avec quatre Points triples, plus de quatre Points doubles; &c.

 180. On tirera des Conclusions semblables de ce qu'une Ligne du 4e. Ordre, qu'on peut toujours faire passer par quatorze Points [§. 38], ne peut rencontrer une Ligne de l'Ordre v qu'en $4v$ Points [§. 46]; de ce qu'une Ligne du 5e. Ordre, qu'on peut toujours faire passer par vingt Points, ne sauroit rencontrer une Ligne de l'Ordre v, qu'en $5v$ Points, &c.

Le résultat de toutes ces Conclusions, pour les huit prémiers Ordres des Courbes, se trouve dans la Table suivante, où chaque colomne marque le plus grand nombre de différens Points multiples qu'une Courbe puisse avoir. On y voit, par ex. qu'une Courbe du 5e. Ordre ne peut avoir que, ou 1 Point quadruple, ou 1 Point triple & 3 doubles, ou 6 Points doubles. Mais il faut remarquer qu'absolument parlant, ces Conclusions ne sont que négatives. Ainsi la derniére colomne indiquant qu'une Courbe du 8e. Ordre ne peut avoir plus de 21 Points doubles, il ne s'ensuit pas qu'elle en puisse avoir ce nombre. Car la preuve que nous employons ne prouve que l'impossibilité d'aller au-delà, & non la possibilité d'aller jusques-là. Cependant, comme l'expérience fait voir, dans les Ordres inférieurs, que les Points multiples des Courbes peuvent aller jusqu'aux bornes qui leur sont assignées dans cette Table; il en résulte un Préjugé bien légitime pour conclure qu'il en est de même dans les Ordres supérieurs.

Les Courbes du second Ordre

ne peuvent avoir que des Points simples.

Les Courbes du troisiéme Ordre

ne peuvent avoir que 1 seul Point double.

Les

Ch. X. §. 180. Pl. XIX.

Les Courbes du quatriéme Ordre

peuvent avoir

1	.	Point triple
.	3	Points doubles.

Les Courbes du cinquiéme Ordre

peuvent avoir

1	.	.	Point quadruple
.	1	.	—— triple
.	3	6	—— doubles.

Les Courbes du ſixiéme Ordre

peuvent avoir

1	.	.	.	.	.	Point quintuple
.	1	.	.	.	.	—— quadruple
.	.	3	2	1	.	—— triples
.	6	1	5	7	10	—— doubles.

Les Courbes du ſeptiéme Ordre

peuvent avoir

1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Point ſextuple
.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—— quintuple
.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	—— quadruple
.	.	3	2	1	.	4	3	2	1	.	—— triples
.	10	.	4	9	11	4	8	10	12	15	—— doubles.

Les Courbes du huitiéme Ordre

peuvent avoir

1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Point ſeptuple
.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—— ſextuple
.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—— quintuple
.	.	.	.	.	.	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	—— quadruples
.	.	3	2	1	.	1	.	2	1	.	6	5	4	3	2	1	.	7	6	5	4	3	2	1	.	—— triples
.	15	8	10	14	16	.	9	8	10	14	.	2	7	9	13	15	17	1	6	8	12	14	16	18	21	—— doubles.

CHAPITRE XI.

De la Méthode des Tangentes. Des Points d'Inflexion &c. Des plus grandes & des plus petites abſciſſes ou ordonnées, &c.

PL. XIX. 181. VENONS maintenant aux moyens de diſtinguer les différentes eſpèces de Points, ſimples ou multiples, qui peuvent ſe trouver ſur une Courbe dont l'équation eſt donnée. C'eſt prémiérement par leurs Tangentes qu'on les diſcerne; parce que la Tangente indique la direction d'une Courbe dans le point où elle la touche. Le caractére propre de la Tangente c'eſt de rencontrer la Branche qu'elle touche en deux ou pluſieurs Points coïncidens, ou infiniment proches l'un de l'autre [§. 162]. Ainſi la Tangente d'un Point ſimple y rencontre la Courbe deux fois, ſi ce Point eſt ſans Inflexion; trois fois, ſi c'eſt un Point d'Inflexion ſimple; quatre fois, ſi c'eſt un Point d'Inflexion double, ou de Serpentement; cinq fois, ſi c'eſt un Point de triple Inflexion, &c. [§. 163 & ſuiv.].

La Tangente d'un Point double eſt cenſée y rencontrer la Courbe, au moins trois fois; ſçav. deux fois la Branche qu'elle touche, & une fois la Branche qu'elle coupe. Elle peut être cenſée y rencontrer la Courbe plus ſouvent, 1°. Quand la Branche touchée ſubit une Inflexion ſimple, ou multiple, au point d'attouchement. Si le dégré de cette Inflexion eſt t, $t+2$ eſt le nombre de fois que la Tangente eſt cenſée rencontrer cette Branche, & comme elle rencontre une fois la Branche qu'elle ne touche pas, la Tangente eſt cenſée rencontrer $t+3$ fois

CH. XI. §. 181. fois la Courbe au Point double. 2°. Quand les deux Branches se touchent l'une l'autre. Alors la Tangente de l'une est aussi Tangente de l'autre : elle est donc censée rencontrer la Courbe au moins quatre fois. PL. XIX.

La Tangente d'un Point triple est censée y rencontrer la Courbe au moins quatre fois : deux fois, la Branche qu'elle touche, & une fois chaque Branche qu'elle coupe. Mais si la Branche touchée subit, au Point de contact, une Inflexion; ou si les Branches qui passent par le Point triple s'y touchent les unes les autres, la Tangente du Point triple est censée y rencontrer la Courbe plus de quatre fois.

Et il en est de même, en général, des Tangentes des Points multiples.

182. Un Point d'une Courbe étant pris pour l'Origine, & l'équation de la Courbe étant donnée rélativement à cette Origine, on trouvera la Tangente, ou les Tangentes de ce Point, [car s'il est multiple, il en a plusieurs, & réguliérement il en a autant qu'il y a de Branches qui passent par ce Point-là], en donnant à l'Axe des ordonnées une position indéterminée, comme on l'a fait au §. 170; c'est-à-dire, en substituant dans l'équation de la Courbe, ru pour x & su pour y. Alors le terme de l'éq: $a + (bs + cr)u + (ds^2 + esr + fr^2)u^2 + (gs^3 + hssr + isrr + lr^3)u^3$ &c. $= 0$, qui reste le prémier, marque par l'exposant de u, combien de fois une Droite quelconque, passant par l'Origine, rencontre la Courbe en ce Point-là; ce qui fait connoitre la simplicité ou multiplicité de ce Point [§. 170]. Mais la Tangente rencontre la Courbe en ce Point au moins une fois de plus qu'une Droite quelconque [§. *préc.*]. Donc lorsque la Droite indéterminée, qui passe par l'Origine, est déterminée à être Tangente, l'éq: $a + (bs + cr)u +$ &c $= 0$, aura,

PL. XIX. au moins, une racine $u = 0$ de plus que pour toute autre position de cette Droite. Il manquera donc à l'équation $a + (bs + cr) u$ &c $= 0$, un terme de plus au commencement. Ainsi, pour déterminer la Tangente, on égalera à zéro le terme de l'éq: $a + (bs + cr) u$ &c $= 0$, qui par l'évanouissement des autres se trouve le prémier; & cette Egalité déterminera le raport, ou les raports, de s à r, qui fixent la position de la Tangente, ou des Tangentes. CH. XI. §. 182.

Les termes de l'éq: $a + (bs + cr) u$ &c $= 0$ ne sont autre chose que les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe mise sur le Triangle analytique, dans laquelle on a changé x en r & y en s. On peut donc dire, en conservant x pour r & y pour s, que pour avoir la Tangente, ou les Tangentes, du Point qui est l'Origine, il faut égaler à zéro le plus bas des Rangs horizontaux de l'équation mise sur le Triangle analytique, & construire la Droite, ou les Droites, représentées par cette équation. Elles seront la Tangente, ou les Tangentes requises *.

183. On voit, en général, qu'on aura autant de Tangentes qu'il y a de Branches qui passent par l'Origine, c'est-à-dire, autant qu'il y a d'unités dans le dégré de la multiplicité de ce Point. Si le Point, qui est à l'Origine, est un Point simple, le plus bas Rang de l'équation sera le prémier Rang [§. 170], & ce Rang égalé à zéro donne, pour déterminer la Tangente, l'éq: $by + cx = 0$, qui ne représente qu'une seule Droite. Aussi un Point simple n'a qu'une seule Tangente. Si le Point de l'Origine est un Point double, le second Rang est le plus bas de l'équation. Egalé à zéro, il donne l'éq: du second dégré

* *Usage de l'Anal.* pag. 93.

CH. XI. §. 183. gré $dyy+exy+fxx=0$, qui a deux racines $y\sqrt{d}+\frac{e+\sqrt{(ee-4df)}}{2\sqrt{d}}x=0$, & $y\sqrt{d}+\frac{e-\sqrt{(ee-4df)}}{2\sqrt{d}}x=0$. PL. XIX.
Ces racines peuvent exprimer deux Droites qui paſſent par l'Origine, & qui ſeront les deux Tangentes du Point double. En général, le Point qui eſt à l'Origine étant d'une multiplicité dont le dégré eſt t, les Rangs inférieurs manquent dans l'équation juſqu'au Rang t, qui égalé à zéro, donne une éq: $gy^t+hxy^{t-1}+\ldots+lx^t=0$, du dégré t, qui peut ſe réſoudre en t racines du prémier dégré, telles que $Ay+\alpha x=0$, $By+\beta x=0$, $Cy+\gamma x=0$, &c. Chacune de ces équations repréſente une Droite qui paſſe par l'Origine [§. 40]. Et ces Droites ſont autant de Tangentes du Point multiple. Il en doit avoir ce nombre-là, parce qu'il eſt le concours de t Branches qui peuvent avoir chacune ſa Tangente. On verra, dans la ſuite, les exceptions que font à cette Régle les racines égales & les racines imaginaires.

184. On remarquera en paſſant, parce que c'eſt un Cas fort commun, que quand l'équation qui détermine les Tangentes a une racine $y=0$, l'Axe des abſciſſes touche la Courbe, cet Axe étant repréſenté par l'éq: $y=0$ [§. 40, III.], & qu'au contraire la Courbe eſt touchée par l'Axe des ordonnées, quand l'*équation tangentielle* a une racine $x=0$, qui repréſente cet Axe. Or l'équation tangentielle a une racine $y=0$, quand il manque au plus bas Rang le terme ſans y, & elle a une racine $x=0$, quand il manque à ce Rang le terme ſans x. Donc l'abſence du terme ſans y, ou du terme ſans x, dans le p'us bas Rang de l'équation, fait voir qne la Courbe touche l'Axe des abſciſſes, ou celui des ordonnées, à ſon Origine.

185. Les

PL. XIX. 185. Les autres racines, telles que $Ay + \alpha x = 0$, de l'équation tangentielle, se construisent, 1°. Ou en donnant à l'abscisse A une ordonnée $-\alpha$, & menant par l'Origine & l'extrémité de cette ordonnée, une Droite, qui sera la Tangente désignée par l'éq : $Ay + \alpha x = 0$. [§. 40. II]. CH. XI. §. 185.

2°. Ou en donnant à l'ordonnée α une abscisse $-A$, & menant une Droite par l'Origine & par l'extrémité de cette abscisse.

3°. Ou en prenant une abscisse égale à A, & une ordonnée égale à α, ou seulement une abscisse & une ordonnée proportionelles à A & α, joignant leurs extrémités par une Droite, & lui menant par l'Origine une parallèle.

On peut aussi, si l'on aime mieux, ou si cela fournit une équation plus commode, mener la perpendiculaire à la Courbe, c'est-à-dire, à la Tangente de la Courbe, en construisant l'éq: $\alpha y + Ax = 0$. Car il est aisé de voir que, supposant les coordonnées perpendiculaires l'une à l'autre, les Droites représentées par les éq: $Ay + \alpha x = 0$, & $\alpha y + Ax = 0$ sont aussi perpendiculaires l'une à l'autre. Or cette éq: $\alpha y + Ax = 0$ se construit, 1°. ou en donnant à l'abscisse α l'ordonnée $-A$. 2°. Ou en donnant à l'ordonnée A l'abscisse $-\alpha$. 3°. Ou en menant par l'Origine une parallèle à la Droite qui passe par l'extrémité de l'abscisse α & de l'ordonnée A [§. 40, II].

Exemple I. On demande quelle est la position de la Droite, qui touche à l'Origine la Courbe représentée par l'éq: $yy + xx + by - cx = 0$.

Cette équation étant mise sur le Tr: anal: son plus bas Rang est le prémier, qui égalé à zéro donne $by - cx = 0$.

Ch. XI §. 185. $=0$. On prendra donc l'abſciſſe $AE=b$, & on lui donnera l'ordonnée $EF=c$; ou bien on donnera à l'ordonnée $AG=-c$, l'abſciſſe $GH=-b$, & la Droite FAH menée par l'Origine A, & par le Point F, ou par le Point H, ſera la Tangente requiſe. On peut auſſi prendre l'abſciſſe $AE=b$, & l'ordonnée $AG=-c$, & la Droite AF, menée par l'Origine A parallèlement à EG, eſt la Tangente requiſe. Pl. XIX. Fig. 145.

La Courbe ABDA repréſentée par l'éq: $yy+xx+by-cx=0$ eſt un Cercle décrit ſur la chorde $AB=c$, du centre C éloigné de cette chorde de l'intervalle $CK=\frac{1}{2}b$. Car l'éq: $uu+zz=\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}bb$, qui exprime le raport des coordonnées CP [u], PM [z], & du raïon $CA=\sqrt{(CK^2+KA^2)}=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}bb)}$, ſe transforme en $yy+xx+by-cx=0$, par la ſubſtitution de $x-\frac{1}{2}c$ [$AE-AK=EK$] au lieu de z [CP], & de $y+\frac{1}{2}b$ [$ME+CK=ME+EP$] au lieu de u [MP]. Il eſt donc aiſé de voir, dans cet Exemple, que la Conſtruction s'acorde avec ce qu'on démontre dans les Elemens de la Géométrie, que la Tangente du Cercle eſt perpendiculaire au raïon. Car CK [$\frac{1}{2}b$]: KA [$\frac{1}{2}c$] $=$ AE [b]: EF [c]. Donc les triangles rectangles CAK, FAE ſont ſemblables, & les angles CAK, AFE ſont égaux. Mais AFE & FAE valent enſemble un angle droit. Donc les angles CAK, FAE enſemble, ou l'angle CAF ſeul, eſt un angle droit. La Tangente AF eſt donc perpendiculaire au raïon AC.

Cela s'acorde auſſi très bien avec la Conſtruction indiquée [§. *préc.*] pour mener la Perpendiculaire à la Courbe. Elle veut qu'à l'abſciſſe $AB=c$ on donne l'ordonnée $BD=-b$, & qu'on mène la Droite AD. Les triangles ſemblables AKC, ABD font voir que AD eſt un Diamétre.

PL. XIX. *Exemple II.* On demande quelle eſt la poſition de la Tangente de la Courbe repréſentée par l'éq : $yyxx + x^4 - 2ax^3 - 2axy^2 + aayy + (aa - bb)xx = 0$. CH. XI. §. 185.

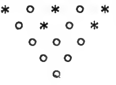
Fig. 139. Cette Courbe eſt la Conchoïde, l'Origine ayant été priſe au Pole P. Si on la place ſur le Tr : anal : on verra que la Pointe & le prémier Rang reſtent vuides. Le ſecond, qui eſt le plus bas, étant donc égalé à zéro,



donne l'éq : $aayy + (aa - bb)xx = 0$, qui ſe réſoud en ces deux $ay + x\sqrt{(bb - aa)} = 0$, & $ay - x\sqrt{(bb - aa)} = 0$, leſquelles ſe conſtruiſent en donnant à l'abſciſſe $PC = a$ les ordonnées $CG = +\sqrt{(bb - aa)}$ & $Cg = -\sqrt{(bb - aa)}$. Or cela s'exécute ſans peine, en décrivant du centre P, avec un raïon $PG = Pg = b = CD$, une circonférence qui coupe la Règle en G & g. Les Droites PG, Pg ſont les Tangentes des deux Branches qui ſe croiſent au Pole P.

Exemple III. Quelles ſont, à l'Origine, les Tangentes de la Courbe dont l'équation eſt $y^4 - 2y^2x^2 + x^4 + 2ay^2x - 5ax^3 = 0$? C'eſt celle dont nous avons déterminé les Aſymptotes au §. 143, *Ex. III.*

Le plus bas Rang de cette équation miſe ſur le Triang:



anal:

Ch. XI. §. 185. anal : eſt le troiſiéme, qui, étant égalé à zéro, donne $2ay^2x - 5ax^3 = 0$. Cette équation tangentielle a trois racines $x = 0$, $y\sqrt{2} - x\sqrt{5} = 0$, $y\sqrt{2} + x\sqrt{5} = 0$. Le Point triple de l'Origine a donc trois Tangentes différentes. La prémiére eſt l'Axe des ordonnées indiqué par la racine $x = 0$. Les deux autres, marquées par les deux autres racines, ſe déterminent en donnant à l'abſciſſe $\sqrt{2}$ les ordonnées $+\sqrt{5}$ & $-\sqrt{5}$, & menant dès l'Origine des Droites aux extrémités de ces ordonnées. Pl. XIX.

186. Si le raport de x à y, ou plûtôt de r à s, qui détermine la poſition d'une Tangente, fait évanouir, dans l'éq: $a + (bs + cr)u + (dss + esr + frr)uu$ &c $= 0$, non ſeulement le terme qui ſe trouve être le prémier [§. 182], mais encore un ou pluſieurs des termes ſuivants : c'eſt une marque que la Tangente rencontre la Courbe à l'Origine en deux, ou un plus grand nombre de Points, qu'une Droite quelconque. Donc, ſi le Point eſt ſimple, la Courbe y ſubit une Inflexion, ſimple ou multiple. Si le Point eſt multiple ; il ſe peut faire que la Branche touchée y ſubiſſe quelque Inflexion : mais il ſe peut bien auſſi que deux ou pluſieurs Branches ſe touchent en ce Point-là [§. 181]. Mais ces Cas ſont faciles à diſcerner, parce que pluſieurs Branches qui ſe touchent n'ont qu'une Tangente commune. Donc, lors que l'équation tangentielle donne autant de Tangentes qu'il y a de Branches qui paſſent par un Point multiple, on voit que ces Branches ne ſe touchent pas. Si une de ces Tangentes rencontre ſa Branche plus de deux fois à l'Origine, il faut que cette Branche ait quelque Inflexion au point de contact.

Le dégré de cette Inflexion ſe connoit par le nombre des termes au-delà du prémier, que fait évanouir le raport de r à s, déterminé en égalant ce prémier terme à zéro. S'il n'en fait évanouir qu'un, c'eſt une Inflexion

 ſimple,

PL. XIX. ſimple, & la Tangente eſt en même tems Sécante [§. 163]. CH. XI.
S'il diſparoit deux termes après le prémier, le Point tou- §. 186.
ché eſt un Point de Serpentement [§. 163], & ainſi de ſuite. De ſorte que la Tangente coupe la Courbe, ſi le nombre des termes, qui s'évanouiſſent au-delà du prémier, eſt impair; elle ne la coupe pas, ſi ce nombre eſt pair.

On voit ici, comme au §. 182, que les termes de l'éq: $a + (bs + cr) u + \&c = 0$ ſont les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe miſe ſur le Tr: anal: & transformée par la ſubſtitution de r à x & de s à y. C'eſt donc par le nombre des Rangs ſupérieurs au plus bas Rang, que fait évanouir la ſubſtitution d'une des racines de l'équation tangentielle, qu'on juge du dégré d'Inflexion que ſubit, au Point d'attouchement, la Branche touchée par la Droite que déſigne cette racine. Les Rangs, que la ſubſtitution d'une racine fait évanouir étant diviſibles par cette racine; on examinera, en remontant de Rang en Rang, combien de Rangs, ſupérieurs au plus bas, peut diviſer chaque racine de l'équation tangentielle; & par le nombre de ces Rangs on connoitra le dégré de l'Inflexion de chaque Branche de la Courbe, à l'Origine *.

Exemple I. On demande la nature du Point ſitué
Fig. 146. à l'Origine de la Courbe repréſentée par l'éq: $x^3 - axy - bby = 0$. C'eſt une des eſpèces du *Trident* défini au §. 155, *Cas* IV, 2.

Cette équation a trois Rangs, chacun d'un ſeul Terme. Le plus bas eſt le prémier Rang. Donc l'Origine eſt un Point ſimple [§. 170]. Egalé à zéro, il donne l'éq: $-bby = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine $y = 0$. Donc la Tangente eſt l'Axe des abſciſſes [§. 184]. Cette racine ſubſtituée dans le ſecond Rang, $-axy$, le fait diſparoitre.

* *Uſage de l'Anal.* pag. 116.

CH. XI. §. 186. paroitre. Donc le Point, qui est à l'Origine, est un Point d'Inflexion. Mais le troisiéme Rang, x^3, ne disparoit pas. C'est donc un Point d'Inflexion simple. PL. XIX.

Exemple II. On propose l'éq: $x^2y + bxy - ax^2 + aby - aax = 0$, & l'on demande la nature du Point qui est à l'Origine de la Courbe qu'elle représente. Fig. 147.

Le Rang le plus bas est le prémier Rang, $aby - aax$, qui égalé à zéro, donne $by - ax = 0$; ce qui fait voir que le Point de l'Origine est un Point simple, dont la Tangente est la Droite, qui fait, avec les abscisses & les ordonnées, des angles dont les Sinus sont entr'eux comme a & b. Si l'on substitue, dans le second Rang $bxy - ax^2$, au lieu d'y sa valeur $\frac{ax}{b}$, prise dans l'éq: $by - ax = 0$, on le réduira à $axx - axx$, ou zéro. Ou, ce qui revient au même, on voit que le second Rang $bxy - axx$ est divisible par le prémier $aby - aax$, le quotient étant $\frac{x}{a}$. Donc la Courbe a un Point d'Inflexion à l'Origine. Mais c'est une Inflexion simple. Car le prémier Rang $aby - aax$, qui divise le second $bxy - axx$, ne divise pas le troisiéme xyy.

Exemple III. Il s'agit de la Courbe représentée par l'éq: $xxy - aby + a^2x = 0$. PL. XX. Fig. 148.

Le prémier Rang, qui est le plus bas, égalé à zéro, donne $aby - aax = 0$, ou $by - ax = 0$: ce qui détermine la Tangente [§. 185]. Et comme, indépendamment de toute substitution, le second Rang manque, le Point de l'Origine est un Point d'Inflexion, mais d'Inflexion simple, puisque le troisiéme Rang n'est pas divisible par la racine $by - ax = 0$ du prémier.

Pl. XX. Fig. 149. *Exemple IV.* On propose la Courbe exprimée par l'éq: $y^4 + 2xxyy + x^4 - 4ay^3 - 4axxy + 8aayy - 8a^3y = 0$. Ch. XI. §. 186.

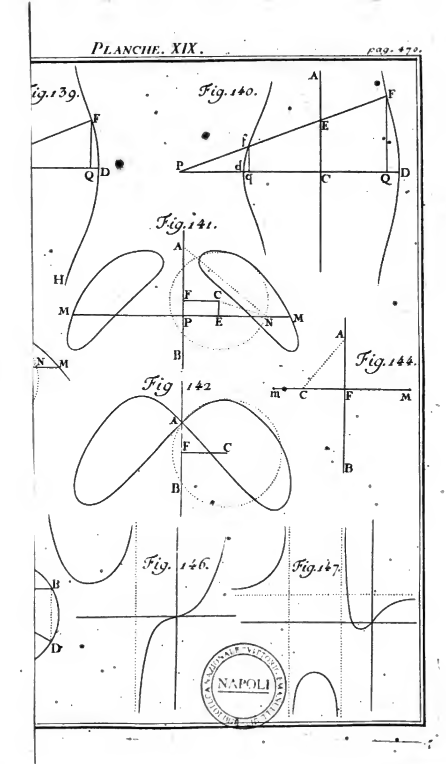
Le prémier Rang, $-8a^3y$, égalé à zéro, donne $y = 0$. Donc l'Axe des abscisses touche la Courbe à l'Origine [§. 184], qui est un Point simple [§. 170]. Cette valeur d'y, substituée dans les Rangs supérieurs, fait disparoitre le second, $+8aayy$, & le troisiéme, $-4ay^3 - 4axxy$, mais non le quatriéme $y^4 + 2xxyy + x^4$. Le Point en question est donc un Point de double Inflexion, ou de Serpentement.

Exemple V. Quel est le Point situé à l'Origine de Fig. 150. la Courbe représentée par l'éq: $y^4 - aayy + aaxx = 0$?

Le plus bas Rang est le second. L'Origine est donc un Point double. Egalé à zéro, il donne $yy - xx = 0$, réductible en ces deux équations $y - x = 0$, $y + x = 0$. Il y a donc deux Tangentes qui partagent chacune en deux également l'angle des coordonnées. Le troisiéme Rang manque, indépendamment de toute substitution. Mais les valeurs d'y, sç. $+x$, ou $-x$, substituées dans le quatriéme Rang, ne le font pas disparoitre. Donc l'une & l'autre des deux Branches, qui se croisent à l'Origine, y subit une Inflèxion simple.

Exemple VI. On propose l'éq: $x^4 - 2ax^3\sqrt{2} + 2aaxx - ay^3 - aayy = 0$, & l'on demande la nature du Fig. 151. Point qui est à l'Origine de la Courbe qu'elle représente.

Puisque le plus bas Rang est le second, ce Point est un Point double. L'éq: $2aaxx - aayy = 0$, qui détermine ses Tangentes, est réductible en ces deux, $x\sqrt{2} - y = 0$, $x\sqrt{2} + y = 0$. On aura donc les Tangentes AM, AN des deux Branches, en donnant à l'ordonnée AQ $= \sqrt{2}$, les abscisses QM $= 1$, QN $= -1$. La prémiére


Fig. 139.
F
Q
D
H
Fig. 140.
A
F
E
f
P
d
q
C
Q
D
Fig. 141.
A
F
C
M
P
E
N
M
B
N
M
Fig. 144.
A
m
C
F
M
B
Fig 142
A
F
C
B
Fig. 146.
Fig. 147.
B
D

CH. XI. §. 186. re valeur d'y, qui eſt $x\sqrt{2}$, ſubſtituée dans le ſecond Rang, $-2ax^3\sqrt{2}-ay^3$, ne le fait pas diſparoitre. Ainſi la Branche touchée par AM ne ſubit aucune Inflexion au Point A. Mais la ſeconde valeur d'y, qui eſt $-x\sqrt{2}$, fait diſparoitre le ſecond Rang, quand elle y eſt ſubſtituée. Donc la Branche, que touche AN, eſt *infléchie* au Point A. PL. XX.

Exemple VII. On demande ſi la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4+x^2y^2-6axyy+aaxx=0$, ſubit quelque Inflexion à ſon Origine. PLANCHE XVIII. Fig. 134.

Le ſecond Rang étant le plus bas, le Point de l'Origine eſt un Point double. Ses Tangentes ſont déterminées par l'éq : $aaxx=0$, qui a deux racines égales $x=0$, $x=0$. Donc les deux Branches qui paſſent par l'Origine, y ont une Tangente commune, qui eſt l'Axe des ordonnées. Elle s'y touchent donc l'une l'autre : & cette Tangente commune eſt cenſée y rencontrer quatre fois la Courbe [§. 181]. En effet, la valeur o d'x réduit toute l'équation à $y^4=0$, qui a quatre racines égales à $y=0$. Donc, de ce que cette valeur d'x fait diſparoitre le troiſiéme Rang, $-6axyy$, on ne doit pas conclure qu'il y a une Inflexion à l'Origine, mais ſeulement que deux Branches s'y touchent. Ce qui eſt aſſez évident par la Conſtruction de la Courbe donnée au §. 173, *Exemp.* V.

187. SI LE Point, dont on cherche les Tangentes & les Inflexions, n'eſt pas l'Origine ; on l'y tranſportera, en ſubſtituant $y+u$ à y, & $x+z$ à x, dans l'équation propoſée, comme il a été pratiqué au §. 171. C'eſt-à-dire, qu'ayant poſé l'équation donnée en prémiére ligne, on calculera la ſeconde, qui contient les termes u & z. Et ſi la ſubſtitution des valeurs de x & y dans les coëfficients de

PL. XX. de ces termes ne les fait pas évanouir tous deux, ce prémier Rang donnera l'équation tangentielle. CH. XI. §. 187.

Exemple. On demande la Tangente d'un Point quelconque d'une Courbe du second Ordre, exprimée par l'éq: $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$.

On a vu [§. 174, *Ex. VI*] que le prémier Rang de la Transformée de cette équation, est $(b + 2dy + ex)u + (c + ey + 2fx)z$. Ce Rang égalé à zéro est l'équation tangentielle, d'où résulte [§. 185] cette Construction.

Fig. 152. AP étant l'abscisse x, & PM l'ordonnée y, on prolongera celle-ci en Q, desorte que MQ soit égal à $c + ey + 2fx$, & on ménera par le Point M, la Droite MN parallèle à AP, & égale à $b + ex + 2dy$. On tirera la Droite QN, & par le point M sa parallèle MR, qui sera la Tangente.

188. En général, pour mener la Tangente d'un Point simple quelconque M d'une Courbe, dont l'équation est donnée: On prolongera, au-delà du Point M, l'ordonnée PM & l'abscisse pM. On multipliera chaque terme de l'équation par l'exposant de la puissance de l'abscisse, & on divisera tous ces produits par l'abscisse même: puis on prendra MQ égale à ce quotient, sur le prolongement de l'ordonnée si le quotient est positif, sur l'ordonnée même s'il est négatif. De même, on multipliera chaque terme de l'équation de la Courbe par l'exposant de la puissance de l'ordonnée, & on divisera tous ces produits par l'ordonnée: puis on prendra MN égale à ce quotient, sur le prolongement de l'abscisse si le quotient est positif, sur l'abscisse même s'il est négatif. Enfin on ménera la Droite QN, & sa parallèle MR, qui sera la Tangente requise.

Ainsi, l'équation donnée étant l'équation générale des Lignes

CH. XI. §. 188. Lignes du 3e. Ordre, $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ixxy + lx^3 = 0$, on doit prendre $MQ = c + ey + 2fx + hyy + 2ixy + 3lxx$, & $MN = b + 2dy + ex + 3gyy + 2hxy + ixx$. Dont la raison est, que si on porte l'Origine du Point A au Point M, en substituant, dans l'équation, $y + u$ à y & $x + z$ à x, le prémier Rang de la transformée sera [§. 29] $(b + 2dy + ex + 3gyy + 2hxy + ixx)u + (c + ey + 2fx + hyy + 2ixy + 3lxx)z$. Ce prémier Rang est l'équation de la Droite qui touche la Courbe au Point M [§. 182], u & z étant les coordonnées. Mais MR, parallèle à QN, est la Droite que représente cette équation [§. 185, ou §. 40, 11]. Donc MR est la Tangente de la Courbe au Point M. PL. XX.

189. Si on prolonge la Tangente MR jusqu'à-ce qu'elle rencontre en R la Ligne des abscisses, ou en r la Ligne des ordonnées; la partie PR, ou pr, de ces Lignes qui est interceptée entre la Tangente rMR, & l'ordonnée MP, ou l'abscisse Mp, se nomme la *Soûtangente.* C'est l'usage des Geométres de déterminer les Tangentes par la grandeur des Soûtangentes. On voit, en effet, que le Point M étant donné, la position de la Tangente est donnée par celle du point R, ou du point r, c'est-à-dire, par la grandeur de PR, ou de pr. Or la Soûtangente PR est la quatriéme proportionelle à MQ, MN & MP, & la Soûtangente pr est la quatriéme proportionelle à MN, MQ & Mp. Donc, pour avoir PR, on multipliera la fraction $\frac{MN}{MQ}$ par MP, & pour avoir pr, on multipliera la fraction $\frac{MQ}{MN}$ par Mp. Le Numérateur MN de la prémiére fraction est l'équation même de la Courbe, divisée par l'ordonnée MP, après que chaque terme aura été multiplié

PL. XX. par l'expoſant de l'ordonnée. Mais comme il faut enſuite multiplier cette fraction $\frac{MN}{MQ}$, ou ſon numérateur MN, par l'ordonnée MP ; la diviſion par MP eſt compenſée par cette multiplication. On peut donc omettre l'une & l'autre, & diviſer ſimplement par MQ ce qui réſulte quand on multiplie chaque terme de l'équation par l'expoſant de l'ordonnée. De même, puiſque MQ eſt l'équation diviſée par l'abſciſſe AP, après que tous ſes termes auront été multipliés par l'expoſant de l'abſciſſe ; on peut, & cela ſera ordinairement plus commode, au lieu de diviſer par l'abſciſſe le dénominateur de la fraction, multiplier par cette même abſciſſe le numérateur, ou, ce qui eſt la même choſe, la fraction. CH. XI. §. 189.

On aura donc la Soûtangente ſur l'Axe des abſciſſes, en multipliant, par l'abſciſſe, la fraction qui a pour numérateur la ſomme des produits qui ſe ſont quand on multiplie chaque terme de l'équation de la Courbe par l'expoſant de l'ordonnée dans ce terme-là, & pour dénominateur la ſomme des produits qui réſultent quand on multiplie chaque terme de l'équation par l'expoſant de l'abſciſſe dans ce terme-là.

Mais ſi on renverſe cette même fraction, en mettant le numérateur à la place du dénominateur & réciproquement ; on aura, en la multipliant par l'ordonnée, la Soûtangente ſur l'Axe des ordonnées.

Ainſi, dans les Lignes du 2e. Ordre, $PR = \frac{by + exy + 2dyy}{cx + exy + 2fxx} x = \frac{b + ex + 2dy}{c + ey + 2fx} y$, & $pr = \frac{cx + exy + 2fxx}{by + exy + 2dyy} y = \frac{c + ey + 2fx}{b + ex + 2dy} x$; & dans celles du 3e. Ordre, $PR = \frac{by + exy + 2dyy + 3gy^3 + 2hxy^2 + ix^2y}{cx + exy + 2fxx + hxy^2 + 2ix^2y + 3lx^3} x$
$= b$

CH. XI. §. 189. PL. XX.

$$= \frac{b + ex + 2dy + 3gyy + 2hxy + ix^2}{c + ey + 2fx + hyy + 2ixy + 3lx^2} y, \text{ \& } pr = \frac{cx + exy + 2fxx + hxyy + 2ix^2y + 3lx^3}{by + exy + 2dyy + 3gy^3 + 2hxyy + ix^2y} y = \frac{c + ey + 2fx + hyy + 2ixy + 3lxx}{b + ex + 2dy + 3gyy + 2hxy + ixx} x,$$

& de même dans les Ordres supérieurs.

190. On peut aussi, sans s'astreindre à multiplier les termes de l'équation de la Courbe, d'abord par les exposants de l'ordonnée, ensuite par ceux de l'abscisse, les multiplier successivement par deux progressions arithmétiques quelconques, dont la différence sera l'unité. Ainsi la Régle pour calculer la Soûtangente soit celle-ci.

On ordonnera l'équation de la Courbe selon les dimensions de l'ordonnée, & on multipliera ses termes par une progression arithmétique, dont les termes croissent ou décroissent de l'unité, comme les exposants des puissances de l'ordonnée. On disposera ensuite la même équation selon les puissances de l'abscisse, & on multipliera ses termes par une progr: arithm: dont les termes croissent ou décroissent de l'unité, comme les exposants des puissances de l'abscisse. On divisera le prémier de ces deux produits par le second, & on multipliera cette fraction par l'abscisse, pour avoir la Soûtangente sur l'Axe des abscisses. Ou bien, on divisera le second de ces produits par le prémier, & on multipliera cette fraction par l'ordonnée, pour avoir la Soûtangente sur l'Axe des ordonnées.

Cette Régle, par la variété des progressions arithmétiques qu'on peut choisir, fournit une infinité d'expressions pour les Soûtangentes, entre lesquelles il est bien difficile qu'il ne s'en trouve quelcune qui soit simple, & d'une

 cons-

PL. XX. construction commode ; parce que le zéro peut être un CH. XI.
des termes de ces progressions , qu'on fera tomber sur le §. 190.
terme qu'on voudra de l'équation.

Il suffira, pour la démontrer, d'en faire l'application à un Exemple. Choisissons l'équation générale, $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$, des Lignes du 2e. Ordre. Si on l'ordonne par y, on aura $a + cx + fxx$, $+ by + exy$, $+ dyy = 0$, dont les termes étant multipliés par la progression m, $m+1$, $m+2$, il vient $ma + mcx + mfxx + (m+1)by + (m+1)exy + (m+2)dyy$. Qu'on l'ordonne ensuite par x, & qu'on multiplie ses termes par la progression n, $n+1$, $n+2$, on aura $na + nby + ndy^2 + (n+1)cx + (n+1)exy + (n+2)fxx$. Je dis que la Soûtangente sur l'Axe des abscisses sera
$$\frac{ma + mcx + mfxx + (m+1)by + (m+1)exy + (m+2)dyy}{na + nby + ndyy + (n+1)cx + (n+1)exy + (n+2)fxx}x,$$ & que $$\frac{na + nby + ndyy + (n+1)cx + (n+1)exy + (n+2)fxx}{ma + mcx + mfxx + (m+1)by + (m+1)exy + (m+2)dyy}y$$
exprime la Soûtangente sur l'Axe des ordonnées.

Car si on multiplie l'équation proposée par $x^n y^m$, on aura $ax^n y^m + bx^n y^{m+1} + cx^{n+1} y^m + dx^n y^{m+2} + ex^{n+1} y^{m+1} + fx^{n+2} y^m = 0$ qui représente la même Courbe avec les deux Axes [§. 20]. Si on cherche la Soûtangente par cette équation, selon la Régle du §. préc. on aura pour celle de l'Axe des abscisses

$$\frac{max^n y^m + (m+1)bx^n y^{m+1} + mcx^{n+1} y^m + (m+2)dx^n y^{m+2} + (m+1)ex^{n+1} y^{m+1} + mfx^{n+2} y^m}{nax^n y^m + nbx^n y^{m+1} + (n+1)cx^{n+1} y^m + ndx^n y^{m+2} + (n+1)ex^{n+1} y^{m+1} + (n+2)fx^{n+2} y^m}x$$

qui, divisant le numérateur & le dénominateur par $x^n y^m$, se réduit à $$\frac{ma + (m+1)by + mcx + (m+2)dyy + (m+1)exy + mfxx}{na + nby + (n+1)cx + ndyy + (n+1)exy + (n+2)fxx}x$$
précisément comme on la trouve par la Régle du présent §.

On

CH. XI. §. 190. On trouvera le même accord, en cherchant la Soûtangente sur l'Axe des ordonnées. PL. XX.

191. Cette Régle, ou celle du §. 188, donnera toûjours la Tangente d'un Point simple quelconque d'une Courbe dont l'équation est donnée. Mais si le Numérateur & le Dénominateur de la fraction $\frac{MN}{MQ}$, se trouvent devenir égaux à zéro, par la substitution des valeurs de x & de y pour un Point donné; ces deux termes, qui sont les coëfficients de u & de z dans le prémier Rang de la Transformée qui nait de la substitution de $y+u$ à y & de $x+z$ à z, étant zéro, ce prémier Rang disparoit, & par conséquent, le Point assigné est un Point multiple [§. 171]. Ses Tangentes, car il en a au moins deux qui peuvent à la vérité coïncider, ne sauroient être déterminées par une équation du prémier dégré [§. 183]. Il faut donc proceder à chercher le second Rang de la Transformée; lequel égalé à zéro donne une équation du second dégré, composée des termes uu, uz, zz; dont, à moins que les trois coëfficients ne soient zéro, on déduira deux valeurs de $\frac{u}{z}$, ou $\frac{MQ}{MN}$, par lesquelles on détermine les deux Tangentes.

Exemple I. On propose de trouver les Tangentes de la Courbe représentée par l'éq: $y^4 - 6ay^3 + 14aayy - 16a^3y - x^4 + 4aaxx\sqrt{2} = 0$. Fig. 153.

Si on substituë $y+u$ à y & $x+z$ à x dans cette équation, le prémier Rang de la Transformée sera $(4y^3 - 18ayy + 28aay - 16a^3)u + (4x^3 + 8aax\sqrt{2})z$, lequel, égalé à zéro, détermine la Tangente de chaque Point de la Courbe, qui sera un Point simple. En supposant

PL. XX. posant $y = 2a$, l'équation proposée se réduit à $-8a^4 - x^4 + 4aaxx\sqrt{2} = 0$, qui a deux racines $x = + a\sqrt{2\sqrt{2}}$, $x = - a\sqrt{2\sqrt{2}}$. D'où il paroit que l'ordonnée $AB = 2a$ a deux abscisses $BC = + a\sqrt{2\sqrt{2}}$ & $Bc = - a\sqrt{2\sqrt{2}}$, moyennes proportionelles entre AB [$2a$] & BD [$a\sqrt{2}$]. Si on cherche les Tangentes de la Courbe en ces Points C, c, on substituera $2a$ à y & $\pm a\sqrt{2\sqrt{2}}$ à x, dans le prémier Rang de la Transformée, ce qui le réduit à $(32a^3 - 72a^3 + 56a^3 - 16a^3)u + (\mp 16a^3\sqrt{\sqrt{2}} \pm 16a^3\sqrt{\sqrt{2}})z$, ou $(0)u + (0)z$. Ainsi les Points C & c sont des Points multiples. Pour en avoir les Tangentes, il faut donc chercher le sécond Rang de la Transformée [§. 183], qui sera $(6yy - 18ay + 14aa)uu + (0)uz + (-6xx + 4aa\sqrt{2})zz$, ou, mettant pour y & x leurs valeurs $2a$ & $\pm a\sqrt{2\sqrt{2}}$, $(2aa)uu - (8aa\sqrt{2})zz$. Ce Rang, égalé à zéro, a deux racines $u = + 2z\sqrt{\sqrt{2}}$, & $u = - 2z\sqrt{\sqrt{2}}$. On déterminera donc les Tangentes des Points C, c, en donnant aux ordonnées des prolongements CE, ce, égaux à $2a\sqrt{\sqrt{2}}$, ou moyens proportionels entre 2AB [$4a$] & BD [$a\sqrt{2}$], & prenant, sur les Droites FG, fg parallèles aux abscisses, les parties EF, ef, égales à a, & les parties EG, eg égales à $-a$. Les Droites CF, cf, CG, cg sont les Tangentes cherchées. CH. XI. §. 191.

Fig. 154. *Exemple II.* Si on cherche les Tangentes de la Courbe dont la nature s'exprime par l'éq: $xyy + 2aay - axx - 3aax - 3a^3 = 0$; on trouvera pour le prémier Rang de la Transformée, $(2xy + 2aa)u + (yy - 2ax - 3aa)z$, lequel, égalé à zéro, donne l'équation qui détermine les Tangentes de tous les Points simples de la Courbe. Mais si l'on cherche la Tangente du Point M, qui a l'abscisse $AP = -a$ & l'ordonnée $PM = a$, [ce Point est un de ceux de la Courbe, puisque, mettant,

CH. XI. §. 191. tant, dans son équation, $-a$ pour x & a pour y, on la réduit à $o = o$], on trouvera pour le prémier Rang, $(-2aa + 2aa)u + (aa + 2aa - 3aa)z$, ou $(o)u + (o)z$; ce qui n'aprend autre chose sinon que le Point M est un Point multiple. On calculera donc le second Rang de la Transformée, & on trouvera $(x)uu + (2y)uz + (-a)zz$, ou, mettant $-a$ pour x & a pour y, $-auu + 2auz - azz$. Ce qui étant égalé à zéro donne $uu - 2uz + zz = o$, soit $u - z = o$. D'où l'on voit que les deux Tangentes du Point double M coïncident, & que cette double Tangente coupe en deux également l'Angle des coordonnées. Pl. XX.

Exemple III. Les Tangentes de la Courbe désignée par l'éq: $x^4 - 2aaxx - 4ay^3 + a^4 = o$ se déterminent par l'équat: $\frac{u}{z} = \frac{4x^3 - 4aax}{12aay}$, qui se forme en égalant à zéro le prémier Rang $(-12ayy)u + (4x^3 - 4aax)z$ de la Transformée. Mais si l'on fait $y = o$, on réduit l'équation de la Courbe à $x^4 - 2aaxx + a^4 = o$, qui n'a que deux racines, mais chacune double, $x - a = o$, $x + a = o$. Donc les abscisses $AP = a$ & $Ap = -a$ ont des ordonnées zéro. Si on cherche les Tangentes de ces Points P, p, en mettant o pour y & $\pm a$ pour x, dans l'équation $\frac{u}{z} = \frac{4x^3 - 4aax}{12aay}$, on la réduit à $\frac{u}{z} = \frac{o}{o}$. La valeur de cette fraction étant indéterminée, on n'en sauroit conclure autre chose si ce n'est que le prémier Rang $(-12ayy)u + (4x^3 - 4aax)z$ de la Transformée disparoit, ou se réduit à $(o)u + (o)z$; & que par conséquent P, p sont des Points doubles. On cherchera donc le second Rang, qui sera $(-12ay)uu$ Fig. 155.

$+ (o)uz$

PL. XX. $+(0)uz + (6xx - 2aa)zz$, ou mettant $= a$ pour x CH. XI. & o pour y, $(0)uu + (0)uz + (4aa)zz$. Ce Rang, §. 191. égalé à zéro, donne $z = 0$. D'où l'on conclura que les Tangentes des Points doubles P, p sont les ordonnées mêmes PM, pm.

192. Si l'évanouissement des coëfficients de u, z, & de uu, uz, zz, fait disparoitre le prémier & second Rang de la transformée; c'est une preuve que le Point dont on cherche les Tangentes est un Point triple. On calculera donc le troisiéme Rang, & ce Rang, égalé à zéro, donne une équation du 3ᵉ. dégré, dont les trois racines déterminent les trois Tangentes du Point triple. Mais si les coëfficients des termes u^3, uuz, uzz, z^3, qui composent le troisiéme Rang, déviennent tous zéro par la substitution des valeurs de x & de y qui conviennent au Point assigné; ce Point est quadruple, & pour avoir ses Tangentes, il faut égaler à zéro le quatriéme Rang, qui contient les termes u^4, u^3z, $uuzz$, uz^3, z^4; & ainsi de suite.

Fig. 156. *Exemple.* On propose la Courbe représentée par l'éq: $y^4 - 4ay^3\sqrt{2} + 8aayy - 2xxyy + 4axxy\sqrt{2} + 6axyy - 12aaxy\sqrt{2} + 2x^4 - 10ax^3 + 14aaxx - 2a^3x = 0$.

Si l'on cherche en général la Tangente de cette Courbe pour un Point quelconque, on trouvera que le prémier Rang de la Transformée donne cette équation $(4y^3 - 12ayy\sqrt{2} + 16aay - 4xxy + 4axx\sqrt{2} + 12axy - 12aax\sqrt{2})u + (-4xyy + 8axy\sqrt{2} + 6ayy - 12aay\sqrt{2} + 8x^3 - 30ax^2 + 28aax - 2a^3)z$. Mais si l'on demande en particulier la Tangente du Point qui répond à l'abscisse a & à l'ordonnée $a\sqrt{2}$, [car a substitué pour x dans l'équation proposée la change en $y^4 - 4a^3y\sqrt{2} + 12aayy - 8a^3y\sqrt{2} + 4a^4 = 0$, qui n'a qu'une seule racine,

Ch. XI. ne, mais quadruple, $y - a\sqrt{2} = 0$] on ſubſtituera ces Pl. XX.
§. 192. valeurs d'x & d'y dans l'équation tangentielle qu'a donné le prémier Rang. Comme cette ſubſtitution la réduit à $(0)u + (0)z$, on conclura que le Point aſſigné eſt multiple. On calculera donc le ſecond Rang de la Transformée, qui ſera $(6yy - 12ay\sqrt{2} + 8aa - 2xx + 6ax)uu + \left(\begin{matrix} -4xy + 4ax\sqrt{2} + 6ay - 6aa\sqrt{2} \\ -4xy + 4ax\sqrt{2} + 6ay - 6aa\sqrt{2} \end{matrix}\right) uz + (-2yy + 4ay\sqrt{2} + 12xx - 30ax + 14aa)zz$. Et en ſubſtituant dans ce Rang a pour x & $a\sqrt{2}$ pour y, on le réduit à $(0)uu + (0)uz + (0)zz$; ce qui montre que le Point propoſé eſt plus que double ; mais qui n'indique point encore la poſition de ſes Tangentes. Il faut donc pouſſer le Calcul juſqu'au 3e. Rang $(4y - 4a\sqrt{2})u^3 + \left(\begin{matrix} -\frac{4}{3}x + 2a \\ -\frac{8}{3}x + 4a \end{matrix}\right) uuz + \left(\begin{matrix} -\frac{8}{3}y + \frac{8}{3}a\sqrt{2} \\ -\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}a\sqrt{2} \end{matrix}\right) uzz + (8x - 10a)z^3$, ou, ſubſtituant à x & y leurs valeurs a & $a\sqrt{2}$, $(0)u^3 + (2a)uuz + (0)uzz + (-2a)z^3$. Ce Rang égalé à zéro donne, en diviſant par $-2a$, $z^3 - uuz = 0$, qui a trois racines $z = 0$, $z = u$, $z = -u$, dont la prémiére fait connoitre que l'Axe des ordonnées eſt une Tangente, & les deux autres indiquent des Tangentes qui coupent en deux également les angles des coordonnées.

193. Il seroit inutile de multiplier les Exemples. Mais il eſt à propos de remarquer, que, ſelon le Principe du §. 186, ce même Calcul nous met en état de juger ſi un Point, aſſigné ailleurs qu'à l'Origine, eſt un Point d'Inflexion ſimple, double, triple, ou &c. par le nombre des Rangs ſupérieurs à celui qui a donné l'équation tangentielle, leſquels s'évanouiſſent par la ſubſtitution des valeurs de u & z; ou ce qui revient au même, par le nom-

 bre

PL. XX. bre des Rangs que cette équation peut divisér. CH. XI. §. 193.

Fig. 157. *Exemple I.* La Courbe désignée par l'éq : $x^3 - 3axx - ayy = 0$ porte à l'extrémité de l'abscisse $x = 4a$ deux ordonnées, égales l'une à $4a$, l'autre à $-4a$. On demande si ces Points sont Points d'Inflexion ? On cherchera d'abord l'équation tangentielle générale, qui est $-(2ay)u + (3xx - 6ax)z = 0$, qu'on rendra particuliére à ces Points, en mettant pour x sa valeur $4a$, & pour y ses valeurs $\pm 4a$. Par cette substitution elle se réduit à $\mp 8aau + 24aaz = 0$, ou $u \mp 3z = 0$. Donc, en ces Points, la position de la Tangente est telle que le Sinus de l'angle qu'elle fait avec les abscisses est triple du Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ordonnées. Ensuite, pour savoir si ces Points sont Points d'Inflexion, on calculera le second Rang de la Transformée, qui est $-(a)uu + (0)uz + (3x - 3a)zz$, ou, mettant $4a$ pour x, $-auu + 9azz$. Or ce Rang est divisible par l'équation tangentielle $u \mp 3z = 0$, ou, ce qui est la même chose, il disparoit si au lieu de u on substitue sa valeur $\pm 3z$, prise de l'équation tangentielle. Donc les Points dont il s'agit ont une Inflexion. Mais c'est une Inflexion simple, puisque le troisiéme Rang de la Transformée ne consiste que dans le seul terme z^3, qui n'est pas divisible par $u \mp 3z = 0$.

Fig. 158. *Exemple II.* Soit la Courbe exprimée par l'équat. $xxy - bbx - a^3 = 0$. On en détermine la Tangente en général par l'éq : $(xx)u + (2xy - bb)z = 0$, que fournit le prémier Rang de la Transformée. Mais si on prend l'abscisse $x = -\frac{3a^3}{bb}$, à laquelle répond l'ordonnée $y = [\frac{bbx + a^3}{xx} =] - \frac{2b^4}{9a^3}$, l'équation tangentielle se réduit

pour

 pour ce Point-là, à $\frac{9a^6}{b^4}u + \frac{1}{3}bbz = 0$, ou $z + \frac{27a^6}{b^6}u = 0$. On demande, si, à ce Point, la Courbe a une Inflexion? On cherchera donc le second Rang. C'est $(0)uu + (2x)uz + (y)zz$, qui s'évanouït quand on écrit $-\frac{3a^3}{bb}$ pour x, $-\frac{2b^4}{9a^3}$ pour y, & $-\frac{27a^6}{b^6}u$ pour z; ou, ce qui revient au même, ce Rang $(0)uu + (2x)uz + (y)zz$, en mettant pour x & y leurs valeurs, se réduit à $-\frac{6a^3}{bb}uz - \frac{2b^4}{9a^3}zz$, qui est divisible par l'équation tangentielle $z + \frac{27a^6}{b^6}u = 0$. Dönc le Point assigné a une Inflexion. Mais c'est une Inflexion simple; puisque le troisiéme Rang qui n'a que le seul terme uzz, n'est pas divisible par l'équation tangentielle.

Exemple III. La *Fig.* 149. est celle de la Courbe désignée par l'éq: $y^4 + 2xxyy + x^4 - 4ay^3 - 4ax^2y + 8aayy - 8a^3y = 0$ [§. 186. *Ex. IV*]. On demande quelle est la Tangente & la nature du Point qui a 0 pour abscisse, & $2a$ pour ordonnée? Il est aisé de voir que ce Point est un de ceux de la Courbe.

Le prémier Rang de la Transformée est $(4y^3 + 4xxy - 12ayy - 4axx + 16aay - 8a^3)u + (4xyy + 4x^3 - 8axy)z$, lequel, mettant 0 pour x & $2a$ pour y, donne l'équation tangentielle $(8aa)u + (0)z = 0$, ou $8aau = 0$, dont la racine $u = 0$ montre que la Tangente est parallèle aux abscisses. Le second Rang $(6yy + 2xx - 12ay + 8aa)uu + \left(\begin{matrix}4xy - 4ax\\4xy - 4ax\end{matrix}\right)uz + (2yy + 6xx - 4ay)zz$, ou, écrivant 0 pour x & $2a$ pour y, $(8aa)uu + (0)uz + (0)zz$, soit $8aauu$, disparoit quand on

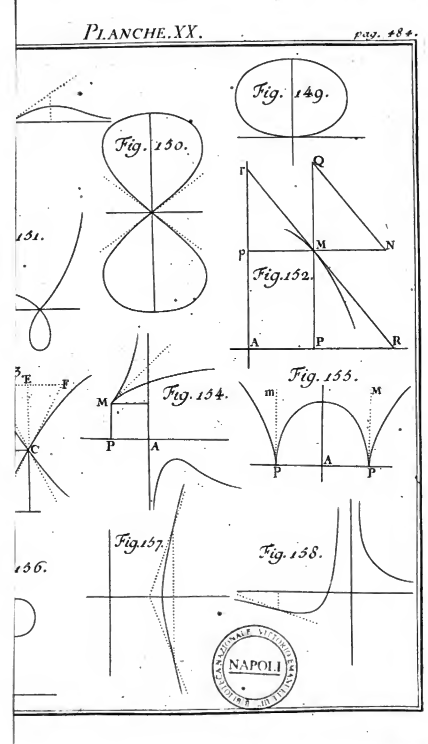
 substituë

PL. XXI. ſubſtituë à u ſa valeur o. Il en eſt de même du troiſiéme Rang $(4y - 4a)u^3 + \left(\begin{smallmatrix}\frac{4}{3}x \\ \frac{8}{3}x\end{smallmatrix}\right)uuz + \left(\begin{smallmatrix}\frac{8}{3}y - \frac{8}{3}a \\ \frac{4}{3}y - \frac{4}{3}a\end{smallmatrix}\right)uzz + (4x)z^3$, ou, $4au^3 + 4auzz$. Mais le quatriéme $(1)u^4 + (2)uuzz + (1)z^4$ ne diſparoit pas par la ſubſtitution de o pour u. Donc puiſque l'équation tangentielle $u = 0$ diviſe les deux Rangs ſupérieurs à celui qui donne cette équation, & ne diviſe pas le troiſiéme, le Point dont il s'agit eſt un Point de Serpentement. CH. XI. §. 193.

Exemple IV. On demande la nature des Points de la Courbe exprimée par l'éq: $y^4 - 4ay^3 - 8aayy + 4x^4 - 8aaxx\sqrt{2} + 8a^4 = 0$, qui ſont ſur l'Axe des abſciſſes. Fig. 159.

Si on fait $y = 0$, on réduit l'équation propoſée à $4x^4 - 8aaxx\sqrt{2} + 8a^4 = 0$, qui a deux racines doubles, $x = +a\sqrt{\sqrt{2}}$, $x = -a\sqrt{\sqrt{2}}$. Pour avoir les Tangentes des Points qui répondent à ces abſciſſes & à l'ordonnée zéro, on transformera l'équation de la Courbe [§. 187], & dans le prémier Rang $(4y^3 - 12ayy - 16aay)u + (16x^3 - 16aax\sqrt{2})z$, on mettra o pour y & $\pm a\sqrt{\sqrt{2}}$ pour x, ce qui le réduit à $(0)u + (0)z$. Les Points, dont il eſt queſtion, ſont donc des Points doubles; & pour en avoir les Tangentes, il faut calculer le ſecond Rang $(6yy - 12ay - 8aa)uu + (0)uz + (24xx - 8aa\sqrt{2})zz$ de la Transformée. En mettant, dans ce Rang, pour x & z leurs valeurs, on a l'équation tangentielle $-8aauu + 16aazz\sqrt{2} = 0$, ou $uu - 2zz\sqrt{2} = 0$, dont les racines $u - z\sqrt{2\sqrt{2}} = 0$, $u + z\sqrt{2\sqrt{2}} = 0$ déterminent les Tangentes. Mais puis qu'on demande ſi les Branches, qui ſe croiſent en ces Points doubles, y ſont infléchies; on cherchera le Rang ſupérieur, qui eſt le troiſiéme, $(4y - 4a)u^3 + (0)uuz + (0)uzz + (16x)z^3$, ou, mettant o pour y & $\pm a\sqrt{\sqrt{2}}$ pour x, $-4au^3 \pm 16az^3\sqrt{\sqrt{2}}$; & l'on examinera ce que ce Rang devient, quand,

au


Fig. 149.
Fig. 150.
151.
r
Q
p
M
N
Fig. 152.
A
P
R
3
E
F
C
M
Fig. 154.
P
A
Fig. 155.
m
M
A
P
P
156.
Fig. 157.
Fig. 158.

CH. XI. §. 193. au lieu de u on ſubſtituë ſes valeurs $+$ ou $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, données par l'équation tangentielle. On trouvera que ſi dans $-4au^3 + 16az^3\sqrt{\sqrt{2}}$, qui ſe raporte au Point A, dont l'abſciſſe eſt $+a\sqrt{\sqrt{2}}$, on ſubſtitue $+z\sqrt{2}\sqrt{2}$ à u, ce Rang s'évanouït, mais ſi l'on ſubſtituë $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, il ſe réduit à $32az^3\sqrt{\sqrt{2}}$. Au contraire, ſi, dans l'équation $-4au^3 - 16az^3\sqrt{\sqrt{2}}$ qui ſe raporte au Point a, dont l'abſciſſe eſt $-a\sqrt{\sqrt{2}}$, on ſubſtituë $+z\sqrt{\sqrt{2}}$, on aura $-32az^3\sqrt{\sqrt{2}}$, & en ſubſtituant $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, on a zéro. Donc au Point A, la Branche AB touchée par la Droite AC, qu'exprime la racine $u=+z\sqrt{2}\sqrt{2}$ ſubit une Inflexion; l'autre Branche AE, qui eſt touchée par la Droite AD qu'exprime la racine $u=-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, ne ſubit aucune Inflexion. Mais au Point a, la Branche aE, dont la Tangente aD ſe détermine par la racine $u=+z\sqrt{2}\sqrt{2}$, n'eſt point infléchie; mais la Branche ab, touchée par ac dont l'équation eſt $u=-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, ſubit une Inflexion. Au reſte les Inflexions des Branches AB, ab, ſont ſimples. Car le quatriéme Rang $(1)u^4+(0)u^3z+(0)uuzz+(0)uz^3+(4)z^4$, ne diſparoit point, lors qu'à u on ſubſtituë $+$ ou $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, mais il ſe réduit à $12z^4$. PL. XXI.

194. Les mêmes Principes ménent à la Solution des Problémes inverſes de ceux qu'on vient de réſoudre. Tel eſt celui-ci. L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver les Points de cette Courbe, où la Tangente fait, avec les abſciſſes ou avec les ordonnées, un angle donné. PL. XXI. Fig. 152.
L'Angle PMR, que la Tangente PR fait avec les ordonnées, ou l'angle pMr qu'elle fait avec les abſciſſes, dépend du raport des côtés PM, PR du triangle PMR, ou des côtés pM, pR du triangle pMr, c'eſt-à-dire, du raport des droites MQ, MN, lequel eſt le même que celui des variables u, z dans l'équation tangentielle générale de-

PL. XXI. de la Courbe [§. 187]. Si donc cet angle PMR, ou pMr, est donné, le raport de u à z est donné. Qu'on exprime ce raport donné par les lettres $b : l$. On substituera donc dans l'équation tangentielle b pour u & l pour z, & on aura une équation, qui, avec celle de la Courbe, détermine les valeurs de x & de y, c'est-à-dire, la position du Point, ou des Points, cherchez. CH. XI. §. 194.

Un seul *Exemple* éclaircira cette Règle. On demande
Fig. 160. les Points de la Courbe désignée par l'éq : $aayy + bbxx - aabb = 0$, où l'ordonnée est à la soûtangente comme b à l.

L'équation tangentielle est $(2aay)u + (2bbx)z = 0$, ou, mettant b pour u & l pour z, $2aaby + 2bblx = 0$; ce qui donne $y = -\frac{bbl}{aab}x$. Substituant cette valeur dans l'équation de la Courbe, on la transforme en $\frac{b^4ll}{aabb}xx + bbxx - aabb = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{aab}{\sqrt{(bbll + aabb)}}$. Donc $y = [-\frac{bbl}{aab}x =] \frac{-bbl}{\sqrt{(bbll + aabb)}}$. Ainsi $x : y = -aab : bbl = -\frac{aa}{l} : \frac{bb}{b}$. Si donc on méne dès l'Origine une Droite qui fasse avec les Axes des angles tels que $x : y = -\frac{aa}{l} : \frac{bb}{b}$, cette Droite rencontrera la Courbe aux Points demandés.

Mais si l'équation proposée eut été $aayy - bbxx - aabb = 0$; on auroit trouvé, par un Calcul semblable, $x = \frac{aab}{\sqrt{(bbll - aabb)}}$, & $y = \frac{bbl}{\sqrt{(bbll - aabb)}}$; valeurs qui deviennent impossibles, quand $aabb > bbll$, quand $b : l > b : a$. On ne sauroit donc mener à cette Courbe aucune

CH. XI. §. 196. aucune Tangente, qui fasse avec les abscisses un angle plus aigu que celui que fait la Droite représentée par l'éq. $lx = by$, qui est l'Asymptote de la Courbe. PL. XXI. Fig. 161.

195. LE CAS de ce Probléme, le plus important & le plus facile à résoudre, est celui où l'on cherche les Points de la Courbe, dont la Tangente est parallèle aux abscisses ou aux ordonnées. Ces Points se nomment des *Maxima* & des *Minima*; sçavoir des *Maxima* ou *Minima* d'ordonnées, quand la Tangente est parallèle aux abscisses; & des *Maxima* ou *Minima* d'abscisses, quand la Tangente est parallèle aux ordonnées. En effet, il arrive *d'ordinaire*, qu'en ces Points l'ordonnée ou l'abscisse est la plus grande ou la plus petite de toutes, ou du moins plus grande ou plus petite que celles des points voisins de part & d'autre. La seule vuë de la Figure fait voir que la Tangente AT étant parallèle aux abscisses [*n°*. 1 & 2], l'ordonnée AB est ou plus grande, ou plus petite, que les ordonnées ab, $\alpha\beta$ de part & d'autre; & que la Tangente At étant parallèle aux ordonnées [*n°*. 3 & 4], l'abscisse AC est ou plus grande, ou plus petite que les abscisses ac, $\alpha\varkappa$, de part & d'autre. Fig. 162.

J'ai dit que cela arrive *d'ordinaire*. Car il peut arriver que le Point, dont la Tangente est parallèle aux abscisses ou aux ordonnées, soit un Point d'Inflexion visible; & alors il n'est ni un *Maximum* ni un *Minimum*. Fig. 163.

196. La Tangente est parallèle aux abscisses, lorsque l'équation tangentielle, ou du moins une de ses racines, est $u = 0$; c'est-à-dire, lors qu'il manque le terme sans u au Rang qui, égalé à zéro, donne la position de la Tangente [§§. 184. 187]. Et de même, la Tangente est parallèle aux ordonnées, quand l'équation tangentielle a une racine $z = 0$, quand le Rang qui, égalé à zéro, donne

 donne cette équation, n'a aucun terme ſans z.

Ainſi pour avoir les *Maxima* ou les *Minima* des ordonnées, on cherchera le prémier Rang de la Transformée qui réſulte de la ſubſtitution d'$y+u$ à y, & d'$x+z$ à x, & on égalera à zéro le coëfficient de z dans ce prémier Rang. Cette équation combinée avec celle de la Courbe, donnera les valeurs d'x & d'y, qui répondent aux *Maxima* & *Minima* d'ordonnées.

Et pour avoir les *Maxima* & *Minima* d'abſciſſes, on égalera à zéro le coëfficient d'u dans le prémier Rang de la Transformée, & on combinera cette équation avec celle de la Courbe, pour avoir les valeurs cherchées d'x & d'y.

Ceci ſuppoſe que les coëfficients d'u & de z ne s'évanouiſſent pas enſemble. Car ſi les valeurs d'x & d'y, qui rendent l'un de ces coëfficients égal à zéro, ſont auſſi diſparoitre l'autre; le Point eſt un Point multiple [§. 171], dont l'ordonnée ou l'abſciſſe ne ſont pas des plus grandes ou des plus petites, ou ne le ſont que par hazard. Il faut donc examiner ſi la ſuppoſition qui anéantit un des deux coëfficients de u ou de z, n'anéantit point auſſi l'autre.

Il faut encore examiner ſi la racine $u=0$, ou $z=0$, ne diviſe point le ſecond Rang. Car alors le Point trouvé ſeroit un Point d'Inflexion [§§. 186, 193], & par conſéquent il ne ſeroit pas un *Maximum*, ni un *Minimum*, quoique la Tangente ſoit parallèle aux abſciſſes ou aux ordonnées. A moins que cette racine $u=0$, ou $z=0$, ne diviſe auſſi le troiſiéme Rang, ſans faire évanouïr le quatriéme; en quel cas le Point ſeroit un Point de double Inflexion ou de Serpentement, & en même tems un *Maximum* ou un *Minimum*. En général, ſi la racine $u=0$, ou $z=0$, de l'équation tangentielle, ne diviſe aucun des Rangs ſupérieurs, ou en diviſe un nombre pair; le Point dont la Tangente eſt parallèle à une des coor-

CH. XI §. 196. coordonnées, étant un Point ordinaire ou un Point de Serpentement, ce Point est un *Maximum* ou un *Minimum*. Il n'est ni l'un ni l'autre, mais un Point d'Inflexion visible, si la racine $u = 0$, ou $z = 0$, divise un nombre impair de Rangs supérieurs à celui qui a donné l'équation tangentielle. PL. XXI.

Faute d'avoir fait attention à ces deux Remarques, des Géométres ont pris pour des Points de *Maximum* ou de *Minimum*, des Points qui n'avoient pas ce Caractère, mais qui étoient ou des Points multiples ou des Points d'Inflexion ; & d'un autre côté, on a élevé des Objections contre une Méthode semblable à celle que nous proposons ici, lesquelles s'évanouissent par ces considérations.

Exemple I. On demande les *Maxima* ou les *Minima* de la Courbe exprimée par l'éq : $yy + xx + by - ax = 0$. Fig. 164.

Si on substituë $x+z$ à x & $y+u$ à y, le prémier Rang de la Transformée sera $(2y+b)u + (2x-a)z$. Le coëfficient de z, égalé à zéro, donne $x = \frac{1}{2}a$, & cette valeur d'x, substituée dans la Proposée, la change en $yy + by - \frac{1}{4}aa = 0$, d'où l'on tire $y = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)}$. Ces valeurs d'$y$, substituées dans le coëfficient de u, ne le font pas disparoitre. Donc l'abscisse $x = \frac{1}{2}a = AP$, & les ordonnées $y = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = PM$, $y = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = Pm$, donnent deux Points M, m, qui sont les *Maxima* des ordonnées.

Pour avoir ceux des abscisses, on égalera à zéro le coëfficient de u. Il donne $y = -\frac{1}{2}b$. Cette valeur substituée dans l'équation de la Courbe, la transforme en $xx - ax - \frac{1}{4}bb = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)}$. Et ces valeurs, substituées dans le coëfficient de z, ne le font pas évanouïr. Donc l'ordonnée $y = -\frac{1}{2}b = AQ$, & les abscisses $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = QN$,

PL. XXI. & $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = Qn$, donnent deux Points N, n, qui sont les *Maxima* des abscisses. CH. XI. §. 196.

Mais il faut, pour cela, que ces quatre Points M, m, N, n, ne soient pas des Points d'Inflexion ; comme en effet ils ne le sont pas. Car le second Rang de la Transformée, qui est $uu + zz$, ne peut se diviser par le prémier, qui est $(2y + b)u + (2x + a)z$, quelque supposition qu'on fasse sur les valeurs de y & de x. On sait d'ailleurs qu'une Courbe du second Ordre ne sauroit avoir d'Inflexions [§. 163]. Et comme la Courbe en question est un Cercle, [§. 185. *Ex. I*], on peut aisément s'assurer que le Calcul a véritablement déterminé les plus grandes abscisses & ordonnées.

Exemple II. Quels sont les *Maxima* & les *Minima* de la Parabole représentée par l'éq : $ay - xx = 0$. [§. 123]?

Le prémier Rang de la Transformée est $(-a)u - (2x)z$. Le coëfficient de z, égalé à zéro, donne $x = 0$, qui substitué dans la Proposée donne $y = 0$. Comme ces valeurs d'x & d'y ne font pas évanouir $(-a)$ le coëfficient d'u, on conclura qu'à l'Origine, la Tangente est parallèle aux abscisses : ce qui est, en quelque sorte, un *Minimum* d'ordonnées ; puisque l'ordonnée y est zéro, & qu'il n'y en a point de négatives.

Mais le coëfficient d'u, égalé à zéro, donneroit $a = 0$: ce qui est absurde. Donc la Parabole n'a point de Tangente parallèle aux ordonnées. Elle n'a donc point de plus grande, ni de plus petite abscisse. Elles vont, en effet, depuis le zéro en croissant jusqu'à l'infini positif, & en décroissant, jusqu'à l'infini négatif.

Fig. 165. *Exemple III.* On propose la Courbe que représente l'éq : $xxy - ayy - bbx = 0$.

Le

CH. XI. §. 196. Le prémier Rang de la Transformée étant $(x^2 - 2ay)u + (2xy - bb)z$; si on cherche les *Maxima* d'ordonnées, on égalera à zéro le coëfficient de z, & on aura $x = \frac{bb}{2y}$. Cette valeur, substituée dans l'équation de la Courbe, donne $\frac{b^4}{4y} - ayy - \frac{b^4}{2y} = 0$, ou $y = -\sqrt[3]{(b^4 : 4a)}$. Donc $x [= \frac{bb}{2y}] = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}abb}$. Ces valeurs, substituées dans $xx - 2ay$, coëfficient d'u, ne le font pas évanouir. Ainsi le Point qui a pour coordonnées $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}abb}$, & $y = -\sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}}$, n'est pas un Point multiple, mais un *Maximum* d'ordonnées, pourvû que ce ne soit pas un Point d'Inflexion. On cherchera donc le second Rang de la Transformée, ou du moins le coëfficient du terme zz, auquel ce Rang se réduit par la valeur d'u prise dans l'équation tangentielle $u = 0$. On trouvera que ce coëfficient est y, & qu'ainsi il ne s'évanouït pas par la substitution de $-\sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}}$ à y. Donc le Point trouvé n'est pas un Point d'Inflexion, mais un vrai *Maximum* d'ordonnées. PL. XXI.

Pour avoir les *Maxima* ou *Minima* d'abscisses, on égalera à zéro, $xx - 2ay$, qui est le coëfficient d'u, & on aura $y = \frac{xx}{2a}$; valeur qui transforme la Proposée en $\frac{x^4}{2a} - \frac{x^4}{4a} - bbx = 0$, ou $x^4 = 4abbx$, qui a deux racines, $x = 0$, $x = \sqrt[3]{4abb}$. Ces valeurs substituées dans l'éq: $y = \frac{xx}{2a}$, donnent, la prémiére $y = 0$, la seconde

PL. XXI. $y = \sqrt[3]{\frac{2b^4}{a}}$. Et ces valeurs d'$x$ & d'y, ſubſtituées dans $2xy - bb$, ne le font point diſparoitre. Subſtituées auſſi dans le ſecond Rang, que l'équation tangentielle $z = 0$ réduit à $auu = 0$, elles ne le font pas évanouir. Donc l'Origine, où $x = 0$, & $y = 0$, & le Point où $x = \sqrt[3]{4abb}$ & $y = \sqrt[3]{\frac{2b^4}{a}}$, ne font ni des Points multiples, ni des Points d'Inflexion, mais de véritables *Minima* d'abſciſſes. CH. XI. §. 196.

Exemple IV. On veut chercher les *Maxima* ou Fig. 166. *Minima* de la Courbe déſignée par l'éq : $ay^3 + bx^3 - c^2x = 0$.

Le prémier Rang de la Transformée eſt $(3ayy)\,u + (3bxx - c^2)\,z$. Si on égale à zéro le coëfficient de z, on aura $x = \pm\sqrt{\frac{c^2}{3b}}$, & par l'équation de la Courbe $y = \pm\sqrt[6]{\frac{4c^6}{27aab}}$, valeurs qui réduiſent l'équation tangentielle à $\pm u\sqrt[3]{\frac{4ac^6}{b}} = 0$ ou $u = 0$. Donc les Points qui ont, l'un pour abſciſſe $+\sqrt{\frac{c^2}{3b}}$ & pour ordonnée $+\sqrt[6]{\frac{4c^6}{27aab}}$; l'autre pour abſciſſe $-\sqrt{\frac{c^2}{3b}}$ & pour ordonnée $-\sqrt[6]{\frac{4c^6}{27aab}}$, ont leurs Tangentes parallèles aux abſciſſes. Ces Points ne ſont pas Points d'Inflexion. Car le ſecond Rang de la Transformée, réduit, [puiſque $u = 0$,] à $(3bx)\,zz$, ne diſparoit pas, lors qu'à x on ſubſti-

CH. XI. §. 196. substitué + ou $-\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$. Ce sont donc des *Maxima* d'ordonnées. PL. XXI.

Mais, si on égale à zéro le coëfficient d'u, pour avoir les *Maxima* ou *Minima* d'abscisses, on trouvera $y=0$, & par l'équation de la Courbe $bx^3-c^3x=0$, qui a trois racines $x=0$, $x=+\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, $x=-\sqrt{\frac{c^3}{b}}$. Ainsi l'Axe des abscisses rencontre la Courbe à l'Origine & à l'extrémité des abscisses $+\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, $-\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, & ces Points ne sont pas multiples, puisque ces valeurs d'x n'anéantissent pas le coëfficient $3bxx-c^3$ de z. Donc dans ces Points la Tangente est parallèle aux ordonnées. On ne doit pourtant pas encore affirmer que ce sont des *Maxima* ou *Minima*, puisqu'ils peuvent être Points d'Inflexion visible; ni le nier, avant que de savoir si ce ne sont point des Serpentemens. On calculera dans le second Rang de la Transformée, réduit au terme uu, & on trouvera $(3ay)uu$, que $y=0$ fait disparoitre. Ainsi les Points assignés sont Points d'Inflexion. Et ce ne sont pas des Serpentemens; car le troisiéme Rang $(a)uu$ ne s'anéantit point, par la substitution des valeurs d'x & d'y. Les Points en question sont donc des Points d'Inflexion visible, & non pas des *Maxima* ou des *Minima* d'abscisses, quoiqu'ils ayent leur Tangente parallèle aux ordonnées.

Exemple V. On propose la Courbe, que les Anciens ont apellée *Cissoïde*, dont l'équation est $xyy+x^3-3axx+3aax-a^3=0$. Fig. 167.

Le prémier Rang de la Transformée est $(2xy)u+(yy+3xx-6ax+3aa)z$. Si on cherche la plus grande ordonnée, on trouvera, en égalant à zéro le coëffi-

 cient

PL. XXI. cient de z, $yy + 3xx - 6ax + 3aa = 0$; & substituant, dans l'équation de la Courbe, au lieu de yy, sa valeur $-3xx + 6ax - 3aa$, on aura $-3x^3 + 6axx - 3aax + x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0 = (x - a)^2 (-2x - a)$, qui a trois racines $x = -\frac{1}{2}a$, $x = a$, $x = a$. La première substituée dans $yy + 3xx - 6ax + 3aa = 0$, donne $yy = -6\frac{3}{4}aa$, où y est imaginaire. Ce Point n'est donc pas même un des Points de la Courbe. On pourroit le nommer un *Maximum imaginaire*, mais la considération de ces *Maxima* n'aboutit à rien, que je sache. L'autre racine $x = a$, qui est double, substituée dans $yy + 3xx - 6ax + 3aa = 0$, donne $y = 0$, & cette valeur d'y anéantit le coëfficient $2xy$ de u. Donc elle indique un Point multiple à l'extrémité de l'abscisse $x = a$. CH. XI. §. 196.

On connoitra les Tangentes de ce Point multiple, en cherchant le second Rang, qui est $(x)uu + (2y)uz + (3x - 3a)zz$, & y substituant à x & y leurs valeurs a & 0, ce qui le réduit à auu. Puisque ce Rang ne s'anéantit pas, le Point en question n'est qu'un Point double [§. 171], & en l'égalant à zéro, on a une équation, qui n'a qu'une seule racine double $u = 0$. D'où l'on conclut [§. 181] que ce Point n'a qu'une Tangente, mais qui touche deux Branches. Ainsi, quoique cette Tangente soit parallèle aux abscisses, le Point qu'elle touche n'est ni un *Maximum*, ni un *Minimum* d'ordonnées.

197. LA RÉSOLUTION du Problème *de Maximis & Minimis* est une des plus utiles & des plus agréables inventions de l'Analyse. Elle sert à trouver, entre une infinité de grandeurs qui ont entr'elles un raport déterminé par une Loy constante & qui peut s'exprimer par une équation, celle qui est la plus grande, ou la plus petite, & en général celle qui remplit le mieux certaines vûës. Toutes ces grandeurs, ou ce qui en résulte suivant

B
C
Fig. 160.
Fig. 161.
A
Fig. 162.
N.° 2.
N.° 3.
N.° 4.
T
a
A
α
T
b
B
b
c
a
C
A
x
α
t
c
a
C
A
x
α
t
63.
M
A
P
Fig. 164.
n
Q
N
m
Fig. 166.
Fig. 167.

CH. XI. §. 197. vant le but proposé, peuvent être représentées par les ordonnées d'une Courbe, qui sera algébrique si la Loy de leurs raports s'exprime par une équation algébrique; & il ne s'agit que de déterminer la plus grande ou la plus petite de ces ordonnées. PLANCHE XXII.

Ceci s'éclaircira par deux Exemples, l'un très simple, l'autre un peu plus composé.

Exemple I. On demande quel est le plus grand Rectangle qu'on puisse inscrire dans un Cercle donné ADBE. *Fig. 168.*

Soit QRST le Rectangle cherché. Si on mène les diamétres AB, DE parallèles aux côtés du Rectangle, il est clair qu'ils le diviseront en quatre Rectangles égaux & semblables, tels que CPQN. Donc le quadruple de CPQN est le plus grand Rectangle qu'on puisse inscrire dans le Cercle : c'est un *Maximum.* Et CPQN est mesuré par le produit de CP & de PQ, qui sont les coordonnées perpendiculaires du Cercle, l'Origine étant prise au centre C. Soit r le raïon, x l'abscisse CP, l'ordonnée PQ sera $\sqrt{(rr - xx)}$ [§. 7]. Ainsi $x\sqrt{(rr - xx)}$, produit des coordonnées CP, PQ, représente le Rectangle CPQN, & son quadruple $4x\sqrt{(rr - xx)}$ le Rectangle QRST. Cette grandeur $4x\sqrt{(rr - xx)}$ doit donc être la *plus grande* entre ses semblables, c'est-à-dire, qu'on cherche la valeur d'x qui rend $4x\sqrt{(rr - xx)}$ un *Maximum.* Pour la trouver, on supposera une lettre y proportionelle à $4x\sqrt{(rr - xx)}$, égale, par exemple, à $\frac{4x\sqrt{(rr - xx)}}{4a}$, & on imaginera la Courbe CMB représentée par l'éq : $y = \frac{4x\sqrt{(rr - xx)}}{4a}$, ou $aayy - rrxx + x^4 = 0$, desorte que l'ordonnée PM sera proportionelle

PLANCHE XXII. nelle au Rectangle QRST dont le côté QT passe par l'extrémité P de l'abscisse CP [x]. Ainsi l'abscisse CP qui donne la plus grande ordonnée PM, détermine le plus grand Rectangle QRST. Pour avoir cette abscisse, on transformera l'éq : $aayy - rrxx + x^4 = 0$, en substituant $x + z$ à x & $y + u$ à y. Le prémier Rang de cette Transformée est $(2aay)u + (-2rrx + 4x^3)z$. Egalant à zéro le coëfficient de z, on aura $4x^3 - 2rrx = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = +\sqrt{\frac{1}{2}rr}$, $x = -\sqrt{\frac{1}{2}rr}$. La prémiére, substituée dans l'équation de la Courbe, donne $y = 0$. Mais cette valeur d'y fait aussi évanouïr le coëfficient d'u dans le prémier Rang de la Transformée. Elle marque donc, non un *Maximum*, mais un Point multiple à l'Origine [§. 171]. Les deux autres valeurs d'x, sç. $+$ & $-\sqrt{\frac{1}{2}rr}$, substituées dans la proposée, donnent $yy = \frac{\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4}r^4}{aa} = \frac{r^4}{4aa}$, ou $y = \frac{rr}{2a}$. Cette valeur d'y n'anéantit point le coëfficient d'u. Elle donne donc le *Maximum* M, dont l'ordonnée $PM = \frac{rr}{2a}$, & l'abscisse $CP = \pm\sqrt{\frac{1}{2}rr}$. Ainsi le plus grand Rectangle qu'on puisse inscrire dans un Cercle, c'est le Quarré. Car CP [x] étant $= \sqrt{\frac{1}{2}rr}$, PQ [$\sqrt{(rr - xx)}$] est aussi $= \sqrt{\frac{1}{2}rr}$. Donc CPQN, & par conséquent QRST, est un Quarré. Ce qu'on démontre aussi facilement dans la Géométrie élémentaire. CH XI. §. 197.

Fig. 169.

Exemple II. Les deux Points A, B étant donnés à égales distances du centre C, sur le diamétre HI du demi-cercle HLI ; on demande quel est le Point E de la demi-circonférence, duquel menant les trois droites EA, EC, EB, la différence des angles AEC, BEC est la plus grande ?

Soit

CH. XL §. 197. Soit E le Point cherché, & si on mène la Droite EF, qui fait avec EC l'angle CEF égal à CEA, l'angle FEB sera la différence des angles AEC, BEC; & doit par conséquent être un *Maximum*. Mais comme la grandeur d'un angle ne se calcule pas aisément, & que le plus grand angle a le plus grand Sinus & réciproquement, on cherchera le Point E, qui donne l'angle BEF dont le Sinus est *le plus grand*. Abaissant du Point B sur EF la perpendiculaire BG, elle est le Sinus de l'angle BEF, BE étant le Sinus total. Il faut donc que la raison de BG à BE, ou la fraction $\frac{BG}{BE}$ soit un *Maximum*. PLANCHE XXII.

Soit le raïon $CE = r$, CA ou $CB = a$, CD [l'abscisse du Point cherché E] $= x$, son ordonnée $DE = \sqrt{(rr - xx)}$. Soit de plus $CF = t$. Donc $AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)} = \sqrt{(aa + rr + 2ax)}$, $BE = \sqrt{(BD^2 + DE^2)} = \sqrt{(aa + rr - 2ax)}$, $EF = \sqrt{(FD^2 + DE^2)} = \sqrt{(rr + tt - 2xt)}$. Et puisque CE coupe en deux également l'angle AEF, on aura [EUCL. VI. 3] $AE : EF = AC : CF$, ou $AE^2 : EF^2 = AC^2 : CF^2$, &, mettant les valeurs analytiques, $aa + rr + 2ax : rr + tt - 2xt = aa : tt$ ou, égalant le produit des extrêmes à celui des moyennes, $aatt + rrtt + 2axtt = aarr + aatt - 2aaxt$, soit $2axtt + 2aaxt = aarr - rrtt$, &, divisant de part & d'autre, par $a + t$, $2axt = arr - rrt$, ou $t = \frac{arr}{rr + 2ax}$. Donc BF $[a - t] = \frac{2aax}{rr + 2ax}$, & EF^2 $[= rr + tt - 2xt] = \frac{aa + rr + 2ax}{(rr + 2ax)^2} r^4$. BG étant perpendiculaire à EF, les triangles rectangles BFG, DFE, qui ont l'angle commun F, sont semblables, & donnent cette proportion $EF^2 \left[\frac{aa + rr + 2ax}{(rr + 2ax)^2} r^4\right] : ED^2 \,[rr - xx]$

 $= BF^2$

PLANCHE XXII. $= BF^2 \left[\frac{4a^4xx}{(rr+2ax)^2} \right] : BG^2$. Donc $BG^2 = \frac{4a^4rrxx - 4a^4x^4}{(aa+rr+2ax)r^4}$ CH. XI. §. 197.

& $\frac{BG^2}{BE^2} = \frac{4a^4rrxx - 4a^4x^4}{r^4(aa+rr+2ax)(aa+rr-2ax)} = \frac{a^4}{r^4} \times$ $\frac{4rrxx - 4x^4}{(aa+rr)^2 - 4aaxx}$, qui doit être un *Maximum*. Car ſi la fraction $\frac{BG}{BE}$ eſt un *Maximum*, comme le ſuppoſe la Queſtion propoſée, ſon quarré $\frac{BG^2}{BE^2}$ ſera auſſi un *Maximum.* Et il le ſera pareillement en le diviſant par la quantité conſtante $\frac{a^4}{r^4}$, puiſque le *Maximum* dépend uniquement de la variable x. Il s'agit donc de détermi-miner la variable x, qui rend la fraction $\frac{4rrxx - 4x^4}{(aa+rr)^2 - 4aaxx}$ un *Maximum.*

Pour cela, on ſuppoſera cette fraction égale à une fraction $\frac{y}{a}$, & on cherchera la plus grande ordonnée de la Courbe repréſentée par l'éq: $\frac{y}{a} = \frac{4rrxx - 4x^4}{(aa+rr)^2 - 4aaxx}$, ou $(aa+rr)^2 y - 4aaxxy - 4arrxx + 4ax^4 = 0$. Le prémier Rang de la Transformée ſera $((aa+rr)^2 - 4aaxx)u + (-8aaxy - 8arrx + 16ax^3)z$. Si on égale à zéro le coëfficient de z, on aura $y = \frac{2xx - rr}{a}$; & cette valeur ſubſtituée dans l'équation de la Courbe la change en $-4aax^4 + 2(aa+rr)^2 xx - rr(aa+rr)^2 = 0$, dont les racines ſont les valeurs d'x qui donnent le *Maximum* cherché. Or cette équation du 4e. dégré ſe réduit en deux autres $2xx - (aa+rr) = 0$, &

$-2aaxx$

Ch. XI. §. 197. $-2aaxx + rr(aa + rr) = 0$. Ainsi ses quatre racines sont $x = +\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$, $x = -\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$, $x = +\sqrt{(\frac{1}{2}rr + \frac{r^4}{2aa})}$, $x = -\sqrt{(\frac{1}{2}rr + \frac{r^4}{2aa})}$. Les ordonnées qui répondent à ces abscisses, sont $y = a$, $y = a$, $y = \frac{r^4}{a^3}$, $y = \frac{r^4}{a^3}$. Les deux prémiéres abscisses & les deux prémiéres ordonnées donnent deux *Maxima*; les deux derniéres donnent deux *Minima*, comme on le voit par la Figure de la Courbe tracée dans la *Fig.* 170. Mais ces *Minima* n'apartiennent point au Problème proposé, & ne viennent ici que parce que l'équat: $\frac{y}{a} = \frac{4rrxx - 4x^4}{(aa + rr)^2 - 4aaxx}$ représente toute la Courbe. Pour la Question proposée, il suffit d'en considérer la portion qui est comprise dans le Cercle HLI, puisque le Point E, devant être pris sur la circonférence, ne peut avoir une abscisse CD plus grande que le raïon. Les *Maxima* cherchez sont donc ceux qui ont l'abscisse $x = +$ ou $-\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$, & qu'on peut trouver ainsi. Qu'on décrive sur le raïon CI le quarré CINL; qu'on mène la diagonale CN, & qu'on prenne sur cette diagonale, la partie CM égale à AL, hypothenuse du triangle ACL, qui a pour base AC [a], & pour hauteur CL [r]. Ensuite, qu'on abaisse du Point M sur le raïon CI la perpendiculaire MD. Elle coupera la circonférence au Point cherché E. Car CN [$\sqrt{2rr}$]: CI [r] = CM [$\sqrt{(aa+rr)}$]: CD [$\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$]. On trouve de même, dans l'autre quart de cercle HLC, le Point e, qui est le *Maximum* dont l'abscisse Cd $= -\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$.

Planche XXII.

PLANCHE XXII. 198. CES deux Exemples suffisent pour faire entendre la maniére d'employer cette Méthode dans les Cas où on doit l'appliquer. Les Livres qui en traittent en sont pleins, & il est aisé de s'en proposer un grand nombre. Remarquons seulement que la détermination des *Maxima* & des *Minima* sert beaucoup dans l'examen du cours d'une Ligne, parce que ces Points, lors même qu'ils n'ont rien de singulier en eux-mêmes, ne laissent pas d'être des Points remarquables de la Courbe raportée à ses Axes. Car c'est à ces Points que viennent se réunir deux Branches de la Courbe, & souvent ceux où l'une des coordonnées cesse d'être réelle & devient imaginaire, ou réciproquément. Ayant donc trouvé les *Maxima* & les *Minima* d'abscisses, on peut les regarder comme des limites, entre lesquelles prenant des abscisses, on examinera quelles sont celles dont les ordonnées sont réelles, & puisque le cours d'une Courbe est continu [§. 19], on sera sûr que toutes les abscisses, qui se terminent dans le même intervalle, ont aussi des ordonnées réelles. Que si, au contraire, une seule abscisse d'un de ces intervalles a ses ordonnées imaginaires, toutes celles du même intervalle ont aussi leurs ordonnées imaginaires. Et il en est de même, *mutatis mutandis*, des *Maxima* & *Minima* d'ordonnées *. CH. XI. §. 198.

Fig. 170. Le *Ier.* *Exemple* sera celui de la Courbe que nous avons déja considérée au §. préced. *Ex. II.* Son équation est $4ax^4 - 4arrxx - 4a^2xxy + (aa + rr)^2 y = 0$. Puisqu'$y$ n'y monte qu'au prémier dégré, chaque abscisse a une ordonnée: mais pour savoir les abscisses de chaque ordonnée, on cherchera les *Maxima* & *Minima* d'ordonnées. On a trouvé ci-dessus que c'étoient les Points qui ont pour abscisses & pour ordonnées $x = \pm \sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$

* ROLLE, *Mem. de l'Acad.* 1703. pag. 152.

 $+\frac{1}{2}rr$) & $y = a$; $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}rr + \frac{r^4}{2aa})}$ & $y = \frac{r^4}{a^3}$. On

partagera donc l'Axe des ordonnées en quatre intervalles. Le prémier depuis l'Origine, ou le zéro, à l'infini du côté négatif. Le second depuis l'Origine jusqu'à l'ordonnée $y = a$. Le troisiéme depuis l'extrémité de l'ordonnée $y = a$ jusqu'à l'extrémité de l'ordonnée $y = \frac{r^4}{a^3}$. Et le quatriéme depuis l'extrémité de cette ordonnée $y = \frac{r^4}{a^3}$, jusqu'à l'infini du côté positif. On prendra une ordonnée dans chacun de ces quatre intervalles, & on examinera combien elle a d'abscisses.

Ainsi prenant du côté négatif $y = -a$, l'équation de la Courbe se change en cette égalité $4ax^4 - 4arrxx + 4a^3xx - a(aa + rr)^2 = 0$, ou, divisant par $4a$, $x^4 - (rr - aa)xx - a(rr + aa)^2 = 0$, qui n'a que deux racines réelles, comme on le voit par le §. 60, ou simplement par la résolution de cette équation à la maniére de celles du second dégré. On lui trouve quatre racines, deux réelles $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}(rr - aa) + \sqrt{(\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}a^4)})}$ & deux imaginaires $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}(rr - aa) - \sqrt{(\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}a^4)})}$. Donc du côté des ordonnées négatives, chaque ordonnée n'a que deux abscisses, la Courbe n'a que deux Branches.

Si on prend, du côté positif, dans l'intervalle entre o & a, une ordonnée $y = \frac{1}{2}a$, l'Egalité sera $x^4 - (rr + \frac{1}{2}aa)xx + \frac{1}{4}(rr + aa)^2 = 0$, qui a quatre racines réelles $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(2rr + aa \pm \sqrt{(2r^4 - a^4)})}$. Donc les ordonnées positives moindres qu'a ont quatre abscisses: la Courbe, dans cet intervalle, a quatre Branches.

Dans l'intervalle entre a & $\frac{r^4}{a^3}$, on peut prendre l'ordonnée

Planche XXII. donnée $y = \frac{1}{2}a + \frac{r^4}{2a^3}$, & l'équation de la Courbe sera Ch. XI. §. 198.
changée en cette Egalité $x^4 - (\frac{1}{2}aa + rr + \frac{r^4}{2aa})xx + \frac{1}{4}(rr + aa)^2(\frac{r^4}{a^4} + 1) = 0$, dont toutes les racines $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2}aa + rr + \frac{r^4}{2aa} \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}r^4 - \frac{r^8}{4a^4})})}$ sont imaginaires. Car la grandeur $-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}r^4 - \frac{r^8}{4a^4}$, qui est sous le signe radical, est essentiellement imaginaire, étant la négative du quarré de $\frac{1}{2}aa - \frac{r^4}{2aa}$. Donc, dans l'intervalle entre les ordonnées a & $\frac{r^4}{a^3}$, il n'y a point d'abscisses & par conséquent point de Courbe. Ce qui fait voir que les extrémités des ordonnées a sont des *Maxima*, & les extrémités des ordonnées $\frac{r^4}{a^3}$ des *Minima*.

Qu'on prenne enfin, au-delà de la limite $\frac{r^4}{a^3}$, une ordonnée $a + \frac{r^4}{a^3}$; &, pour cette ordonnée, l'Egalité sera $x^4 - (aa + rr + \frac{r^4}{aa})xx + \frac{1}{4}(rr + aa)^2(\frac{r^4}{a^4} + 1) = 0$, qui a quatre racines réelles $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{r^4}{2aa})}$, & $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}aa + rr + \frac{r^4}{2aa})}$. Donc dès l'ordonnée $\frac{r^4}{a^3}$ jusqu'à l'infini, chaque ordonnée a quatre abscisses.

Ainsi la Courbe a six Branches infinies, deux du côté

négatif

CH. XI. §. 198. négatif & quatre du côté positif, desquelles il est aisé de voir, par les §§. 141 & 142, que deux sont Paraboliques, & deux Hyperboliques, ayant pour Asymptotes les ordonnées des abscisses $\pm\frac{aa+rr}{2a}$, le long desquelles se glissent aussi les deux Branches qui se jettent du côté des ordonnées négatives. PLANCHE XXII.

Exemple II. Si on cherche les limites d'abscisses & d'ordonnées de la Courbe désignée par l'éq : $xxy - 2ayy - aax = 0$, on aura, pour le prémier Rang de la Transformée, $(xx - 4ay)u + (2xy - aa)z$. Qu'on égale à zéro le coëfficient d'u, pour avoir les limites d'abscisses, on trouvera $y = \frac{xx}{4a}$;, valeur, qui change l'équation de la Courbe en $\frac{x^4}{8a} - aax = 0$, qui n'a que deux racines réelles $x = 0$, & $x = 2a$. Ainsi les limites des abscisses sont 0 & $2a$, auxquelles répondent les ordonnées 0, & a, comme le fait voir l'éq: $y = \frac{xx}{4a}$. Donc l'Origine A, & le Point D [qui a pour ordonnée $DC = a$ & pour abscisse $CA = 2a$] sont les Points de la Courbe desquels la Tangente est parallèle aux ordonnées. *Fig. 171.*

Qu'on prenne des abscisses hors & entre ces limites 0 & $2a$. Qu'on prenne d'abord, par ex. $x = -a$, & l'équation de la Courbe sera transformée en $aay - 2ayy + a^3 = 0$, ou $yy - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}aa = 0$, qui a deux racines réelles $-\frac{1}{2}a$ & $+a$. Donc chaque abscisse négative a deux ordonnées : la Courbe jette deux Branches infinies du côté des abscisses négatives.

Qu'on prenne ensuite une abscisse entre 0 & $2a$, comme,

PLANCHE XXII. me, par ex. a; ce qui transforme l'équation de la Courbe en $yy - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}aa = 0$, dont les racines $+\frac{1}{4}a \pm \frac{1}{4}a\sqrt{-7}$ font imaginaires. Donc toute abſciſſe poſitive, moindre que $2a$, n'a que des ordonnées imaginaires, & la Courbe manque entiérement entre l'Axe des ordonnées & l'ordonnée CD. CH. XI. §. 198.

Enfin ſi on prend une abſciſſe plus grande que $2a$, comme $4a$, on réduira l'équation de la Courbe à $yy - 8ay + 2aa = 0$, qui a deux racines réelles, $4a \pm a\sqrt{14}$. Donc toute abſciſſe plus grande que $2a$ a deux ordonnées. Ainſi il part du Point D deux Branches qui s'étendent à l'infini du côté poſitif.

On aura les limites des ordonnées, en égalant à zéro le coëfficient de z, ce qui donne $x = \frac{aa}{2y}$, & par la ſubſtitution dans la Propoſée $a^3 = -8y^3$, qui n'a qu'une ſeule racine $y = -\frac{1}{2}a$. Il n'y a donc qu'une limite, AE $= -\frac{1}{2}a$, dont l'abſciſſe EF $= -a$ [puiſque $y = -\frac{1}{2}a$ donne x [$= \frac{aa}{2y}$] $= -a$], touche la Courbe.

Qu'on prenne deux ordonnées de part & d'autre de cette limite $-\frac{1}{2}a$, par ex. a & $-a$, & l'équation de la Courbe ſe réduira à ces deux Egalités $xx - ax - 2aa = 0$, & $xx + ax + 2aa = 0$. Les racines $2a$ & $-a$ de la prémiére ſont réelles : Les racines $-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-7}$ de la ſeconde ſont imaginaires. Donc toute ordonnée qui deſcend au-deſſous de AE $= -\frac{1}{2}a$ n'a point d'abſciſſes. Mais toute autre ordonnée a deux abſciſſes réelles. Ce qui s'acorde très-bien avec ce qu'on peut démontrer d'ailleurs ſur le cours de cette Ligne.

Fig. 172. *Exemple III.* Les limites de la Courbe déſignée par l'éq: $x^3yy - aaxxy + b^5 = 0$ ſe déterminent en égalant

CH. XI. §. 198. lant successivement à zéro les coëfficients d'u & de z dans le prémier Rang de la Transformée, qui est $(2x^3y - aaxx)u + (3xxyy - 2aaxy)z$. L'éq: $2x^3y - aaxx = 0$, qui donne les limites des abscisses, a deux racines, $x = 0$, & $y = \frac{aa}{2x}$. La prémiére suppose y infinie, ce qui montre que l'Axe des ordonnées est une Asymptote [§. 138]. L'autre, substituée dans l'équation de la Courbe, la réduit à $x = \frac{4b^5}{a^4}$, d'où l'on tire $y [= \frac{aa}{2x}] = \frac{a^6}{8b^5}$. Ainsi l'Origine A, & l'ordonnée CD $[= \frac{a^6}{8b^5}$, qui a son abscisse AC $= \frac{4b^5}{a^4}]$ sont les limites des abscisses. PLANCHE XXII.

Si on prend, au-delà de la prémiére limite, $x = -b$, on aura l'Egalité $yy + \frac{aay}{b} - bb = 0$, qui a deux racines réelles $\frac{-aa \pm \sqrt{(a^4 + 4b^4)}}{2b}$. Donc toute abscisse négative a deux ordonnées.

Si on prend, entre les deux limites, $x = \frac{2b^5}{a^4}$, on aura l'Egalité $yy - \frac{a^6}{2b^5}y + \frac{a^{12}}{8b^{10}} = 0$, dont les racines $\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{4} \times \frac{a^6}{b^5}$ sont imaginaires. Donc la Courbe manque entre l'Axe AB & l'ordonnée CD.

Enfin, si on prend, au-delà de la seconde limite, $x = \frac{5b^5}{a^4}$, on aura l'Egalité $yy - \frac{a^6}{5b^5}y + \frac{a^{12}}{125b^{10}}$, qui a deux racines réelles $\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{10} \times \frac{a^6}{b^5}$. Donc au-delà de l'or-

PLANCHE XXII. donnée CD la Courbe a deux Branches infinies. CH. XI. §. 198.

L'éq. $3xxyy - 2aaxy = 0$, qui détermine les limites des ordonnées, a trois racines $y = 0$, $x = 0$, & $x = \frac{2aa}{3y}$. Les deux prémiéres indiquent que les Axes sont des Asymptotes, & la troisiéme donne, par l'équation de la Courbe, $y = \frac{4a^6}{27b^5}$, d'où l'on tire $x = \frac{9b^5}{a^4}$. Ainsi l'Origine A & le point E, [dont l'abscisse $BE = \frac{9b^5}{a^4}$ & l'ordonnée $AB = \frac{4a^6}{27b^5}$] sont les limites des ordonnées.

Qu'on prenne, hors de la prémiére, $y = -b$; on aura l'égalité $-b^3 = 0 + \frac{aa}{b}xx + x^3$, qui n'a [§. 59. V. 1] qu'une seule racine réelle. Donc toute ordonnée négative n'a qu'une abscisse.

Si on prend, entre les deux limites, $y = \frac{a^6}{27b^5}$, on aura l'Egalité $-\frac{729b^{15}}{a^{12}} = 0 - \frac{27b^5}{a^4}xx + x^3$, qui a trois racines réelles [§. 59. V. 3]. Donc toute ordonnée positive, moindre que AB, a trois abscisses.

Mais si on prend, au-delà de la seconde limite AB, $y = \frac{a^6}{b^5}$, on aura l'Egalité $-\frac{b^{15}}{a^{12}} = 0 - \frac{b^5}{a^4}xx + x^3$, qui n'a [§. 59. VI. 1] qu'une racine réelle. Donc les ordonnées positives, plus grandes que AB, n'ont qu'une abscisse.

Cela s'acorde parfaitement avec ce qui a été déterminé d'une toute autre maniére [§. 22] sur cette Courbe.

Exemple

Ch. XI. § 198. *Exemple IV.* Joignons encore l'Exemple de la Courbe que représente l'éq: $y^4 - 2axyy - 3aaxx + x^4 = 0$. PLANCHE XXII. Fig. 173.

Le prémier Rang de la Transformée est $(4y^3 - 4axy)u + (-2ayy - 6aax + 4x^3)z$. Les limites des abscisses se déterminent donc par l'éq: $4y^3 - 4axy = 0$, qui a deux racines $y = 0$ & $yy = ax$. Celle-là transforme l'équation de la Courbe en $x^4 - 3aaxx = 0$, dont les racines sont 0, 0, $+a\sqrt{3}$, $-a\sqrt{3}$: Celle-ci la change en $x^4 - 4aaxx = 0$, dont les racines sont 0, 0, $+2a$, $-2a$. Les limites des abscisses sont donc $2a$, $a\sqrt{3}$, 0, $-a\sqrt{3}$, $-2a$, dont les ordonnées sont $\pm a\sqrt{2}$, 0, 0, 0, $\pm a\sqrt{-2}$. C'est hors & entre ces limites qu'il faut prendre des abscisses, pour voir quels sont les intervalles où elles ont des ordonnées réelles, quels sont ceux où elles en ont d'imaginaires.

Qu'on prenne d'abord une abscisse plus grande que $2a = AC$, comme $x = 3a$, & l'Egalité $y^4 - 6aayy + 54a^4 = 0$, qui résulte de cette supposition, n'ayant que des racines imaginaires $\pm a\sqrt{(3 \pm 3\sqrt{-5})}$, on conclura qu'au-delà de l'ordonnée DCd, la Courbe manque entiérement.

Qu'on prenne ensuite une abscisse $x = a\sqrt{\tfrac{7}{2}}$, moyenne entre $2a = AC$ & $a\sqrt{3} = AB$, & on aura l'Egalité $y^4 - 2aayy\sqrt{\tfrac{7}{2}} + \tfrac{7}{4}a^4 = 0$, dont les quatre racines $\pm a\sqrt{(\sqrt{\tfrac{7}{2}} \pm \sqrt{\tfrac{7}{4}})}$ sont réelles. Donc les abscisses, qui se terminent entre B & C, ont quatre ordonnées.

Après cela qu'on choisisse une abscisse $x = a$, positive, mais moindre que $AB = a\sqrt{3}$, & l'Egalité $y^4 - 2aayy - 2a^4 = 0$, qui lui convient, ayant deux racines réelles $\pm a\sqrt{(1 + \sqrt{3})}$ & deux racines imaginaires $\pm a\sqrt{(1 - \sqrt{3})}$, on conclura qu'entre l'Origine A & le Point B les abscisses n'ont que deux ordonnées.

PLANCHE XXII. Il en eſt de même des abſciſſes entre l'Origine A & le Point b. Car ſi on prend une abſciſſe $x = -a$, négative, & moindre que $Ab = -a\sqrt{3}$, on aura l'Egalité $yy + 2aayy - 2a^4 = 0$, qui a deux racines réelles $\pm a \sqrt{(-1 + \sqrt{3})}$, & deux racines imaginaires $\pm a \sqrt{(-1 - \sqrt{3})}$. CH. XI. §. 198.

Mais ſi l'on prend une abſciſſe $x = -a\sqrt{\frac{7}{2}}$, entre $Ab = -a\sqrt{3}$ & $Ac = -2a$, l'Egalité $y^4 + 2aayy\sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{7}{4}a^4 = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $\pm a \sqrt{(-\sqrt{\frac{7}{2}} \pm \sqrt{\frac{7}{4}})}$, fait voir que la Courbe manque dans l'intervalle bc.

Elle manque auſſi dès le Point c juſqu'à l'infini du côté négatif: comme on le voit en prenant une abſciſſe $x = -3a$ plus négative que $Ac = -2a$; l'Egalité qui en réſulte, $y^4 + 6aayy + 54a^4 = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $\pm a \sqrt{(-3 \pm 3\sqrt{-5})}$.

La Courbe eſt donc toute compriſe entre b & C. Ses abſciſſes, qui ſe terminent entre b & B, n'ont que deux ordonnées; celles, dont l'extrémité tombe entre B & C, en ont quatre.

Pour déterminer les limites des ordonnées, on a l'éq: $-2ayy - 6aax + 4x^3 = 0$. Si on ſubſtituë, dans l'équation de la Courbe, à yy ſa valeur $\frac{2x^3}{a} - 3ax$ tirée de cette équation-ci, on aura $\frac{4x^6}{aa} - 15x^4 + 12aaxx = 0$, dont les racines ſont $x = 0$, $x = 0$, $x = +\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$ = à peu près $1.61a$, $x = -\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$, $x = +\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}$ = à peu près $1.075a$, $x =$

$-\frac{1}{2}a$

CH. XI. §. 198. $-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}$, auxquelles répondent les ordonnées PLANCHE XXII.

$y=0$, $y=0$, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}=$ à peu près $1.875a$, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(-\frac{3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$, grandeur imaginaire, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$ aussi imaginaire, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+33}{2}})}=$ à peu près $0.872a$. Ainsi les limites des ordonnées sont $1.875a$, $0.872a$, 0, $-0.872a$, $-1.875a$, les mêmes du côté négatif que du côté positif. En effet, comme l'équation n'a point de puissance impaire d'y, l'Axe des abscisses est un Diamétre [§. 70]. Il suffira donc de prendre, dans leurs intervalles, des ordonnées positives; parce qu'on fera le même jugement de celles qu'on prendroit dans les intervalles des ordonnées négatives.

Soit donc $y=2a$, une ordonnée plus grande que $1.875a=$ AF. L'Egalité qui en résulte est $16a^4-8a^3x-3aaxx+x^4=0$, ou $-16a^4=-8a^3x-3aaxx+x^4$. Cette équation a d'abord deux racines imaginaires [§. 60], puisque 27 fois le quarré de $-8a^3$, plus 8 fois le cube de $-3aa$, fait une grandeur positive, $+1512a^6$. Mais les deux autres racines sont aussi imaginaires. Car si on calcule le coëfficient α de l'équation marquée P dans ce même §. 60, on trouvera aussi une grandeur positive, $+892a^{12}$. Donc les quatre racines de l'Egalité $16a^4-8a^3x-3aaxx+x^4=0$ sont imaginaires. Ainsi la Courbe manque au-delà de la limite FH. Et comme elle manque, par la même raison, au-delà de fh; elle est toute comprise entre les limites FH, fh.

Soit ensuite $y=a$ une ordonnée moyenne entre

 AF =

PLANCHE XXII. AF $=$ 1.875a & AE $=$ 0.872a, & on aura l'Egalité $a^4 - 2a^3x - 3aaxx + x^4 = 0$, ou $-a^4 = -2a^3x - 3aaxx + x^4$. Si, par les coëfficients de cette équation, on calcule ceux de l'Egalité $\alpha = \beta z + \gamma zz + z^3$ marquée P au §. 60, on aura $\alpha = -83a^{12}$. Ce coëfficient négatif fait voir que l'Egalité $a^4 - 2a^3x - 3aaxx + x^4 = 0$ a deux racines réelles & deux imaginaires. Donc les ordonnées, qui se terminent entre FH & EG, ou entre fh & eg, ont chacune deux abscisses. CH. XI. §. 198.

Enfin, si on prend l'ordonnée $y = \frac{1}{2}a$, plus petite que AE $=$ 0.872a, on trouvera l'Egalité $-\frac{1}{16}a^4 = -a^3x - 3axx + x^4$, doù l'on calcule pour l'égalité P, $\frac{2039}{4096}a^{12} = \frac{721}{256}a^8z + \frac{69}{16}a^4zz + z^3$, dont les trois coëfficients α, β, γ, étant tous trois positifs, il suit [§. 60] que l'Egalité $-\frac{1}{16}a^4 = -a^3x - 3axx + x^4$ a ses quatre racines réelles. Donc, toutes les ordonnées plus petite que AE, ou Ac, ont chacune quatre abscisses.

De tout cela il est aisé de voir que la Courbe est finie, & composée de deux Feuilles, dont l'une a presque la figure d'un cœur. De l'Origine A il part une Branche AH, qui va au Point H, *Maximum* d'ordonnées, dont l'abscisse HF $= \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$, & l'ordonnée FA $= \frac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}\right)}$. De là elle passe au Point D, *Maximum* d'abscisses, qui a pour abscisse AC $= 2a$, & pour ordonnée DC $= a\sqrt{2}$. Elle vient ensuite au Point B, autre limite d'abscisses, situé à l'extrémité de l'abscisse AB $= a\sqrt{3}$. Son cours BdhA est précisément semblable au-dessous de l'Axe des abscisses. Mais à l'Origine A elle se reléve au-dessus de cet Axe du côté des abscisses négatives; passe par le Point G, *Maximum* d'ordon-

CH. XI. §. 198. d'ordonnées, dont l'abſciſſe $GE = -\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}$, & PLANCHE XXII.

l'ordonnée $EA = \frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$; va de G en b, *Maximum* d'abſciſſes, qui ſe trouve à l'extrémité de l'abſciſſe $Ab = -a\sqrt{3}$; & décrit enfin, ſous l'Axe des abſciſſes, un arc bgA ſemblable à bGA.

199. ON PROPOSE de trouver & de déterminer les Points d'Inflexion d'une Courbe dont l'équation eſt donnée. Il eſt clair par les §§. 186 & 193, qu'il ne s'agit, l'Origine étant portée ſur un Point quelconque, que de déterminer x & y, de ſorte 1°. que ce Point ſoit un de ceux de la Courbe. 2°. que le prémier Rang de la Transformée diviſe le ſecond. On ſatisfait à la prémiére condition, en poſant l'Equation de la Courbe [§. 171]. Et pour ſatisfaire à la ſeconde, ſi $\beta u + \gamma z$ eſt le prémier Rang, & $\delta uu + \epsilon uz + \zeta zz$ le ſecond, on poſera l'éq: $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$. Car $\delta uu + \epsilon uz + \zeta zz$ étant diviſé par $\beta u + \gamma z$, il reſte $(\zeta - \frac{\epsilon\gamma}{\beta} + \frac{\delta\gamma\gamma}{\beta\beta})zz$, qui étant égalé à zéro, diviſé par zz, & multiplié par $\beta\beta$, donne $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$. On aura donc deux équations, par le moyen deſquelles on déterminera l'abſciſſe x & l'ordonnée y de chaque Point d'Inflexion, ſi la Courbe en a quelcun.

Mais comme ces Points peuvent être de double, triple, &c. Inflexion, il faut voir ſi le prémier Rang de la Transformée, qui diviſe le ſecond, n'en diviſe point d'ultérieurs. S'il diviſe un nombre impair de Rang ſucceſſifs, le Point ſubit une Inflexion viſible: mais elle eſt inviſible, c'eſt un Serpentement, ſi le nombre des Rangs ſucceſſifs, à commencer par le ſecond, qui ſont diviſés par le prémier, eſt

PLANCHE XXII. est un nombre pair [§§. 166, 186, 193]. CH. XI. §. 198.

Il faut encore examiner, si les valeurs d'x & d'y, qu'on a trouvées, ne sont point telles, qu'elles rendent β & γ égaux, chacun, à zéro. Alors le Point, qu'elles déterminent, est multiple. Or les valeurs d'x & d'y, qui donnent $\beta = 0$, & $\gamma = 0$, rendent nécessairement $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$. Ainsi les mêmes équations, qui donnent les Points d'Inflexion, donnent aussi les Points multiples; mais non pas réciproquement. Et c'est par-là qu'on les distingue.

Fig. 174. *Exemple I.* On demande, si la Courbe désignée par l'éq: $x^3 + bxx + aay = 0$, a des Points d'Inflexion, & où ils sont situés?

En substituant $x + z$ à x & $y + u$ à y, le prémier Rang de la Transformée sera $(aa)\,u + (3xx + 2bx)\,z$, & le second $(0)\,uu + (0)\,uz + (3x + b)\,zz$. On aura donc $\beta = aa$, $\gamma = 3xx + 2bx$, $\delta = 0$, $\epsilon = 0$, $\zeta = 3x + b$. Ainsi l'éq: $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$ se réduit à $(3x + b)\,a^4 = 0$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{3}b$; valeur, qui substituée dans l'équation de la Courbe, donne $y = -\frac{2b^3}{27aa}$. La Courbe proposée n'a donc qu'un seul Point d'Inflexion, dont l'abscisse est $-\frac{1}{3}b$ & l'ordonnée $\frac{-2b^3}{27aa}$.

Ce Point n'est pas multiple, puisque ces valeurs d'x & d'y n'anéantissent ni $\beta\,[= aa]$, ni $\gamma\,[= 3xx + 2bx]$. Et ce n'est pas un Point de Serpentement, ni d'Inflexion multiple, puisque le prémier Rang $(aa)\,u + (3xx + 2bx)\,z$, réduit ici à $aau - \frac{1}{3}bbz$, ne divise pas le troisiéme $(0)\,u^3 + (0)\,u^2z + (0)\,uz^2 + (1)\,z^3$.

PLANCHE XXIII. Fig. 175. *Exemple II.* On propose la Courbe que représente l'éq: $ax^3 + by^3 + c^4 = 0$, & on demande où sont situés

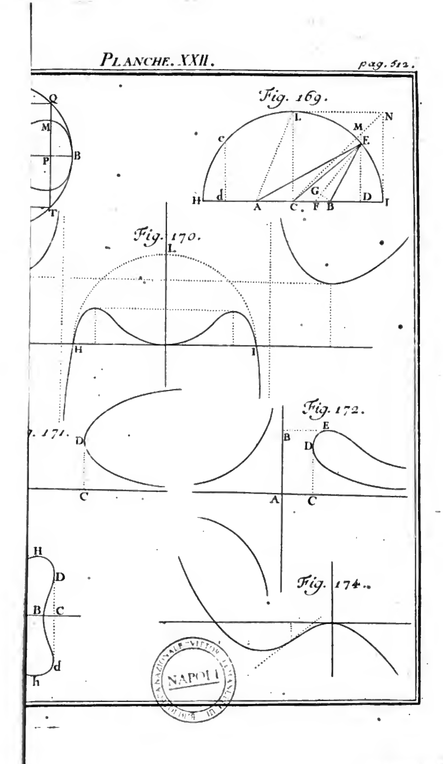


Fig. 169.
Q
M
B
P
T
L
N
M
E
c
G
H
d
A
C
F
B
D
I
Fig. 170.
L
H
I
. 171.
D
C
Fig. 172.
E
B
D
A
C
H
D
B
C
d
h
Fig. 174.

CH. XI. §. 199. situés les Points d'Inflexion qu'elle peut avoir ? PLANCHE XXIII.

Les deux prémiers Rangs de la Transformée sont $(3by^2)u + (3ax^2)z$ & $(3by)uu + (0)uz + (3ax)zz$. L'équation, qu'il faut combiner avec celle de la Courbe, est donc $3by(3ax^2)^2 + 3ax(3by^2)^2 = 0 = 27aabx^4y + 27abbxy^4$, ou, divisant par $27ab$, $ax^4y + bxy^4 = 0$. Si on ôte cette équation de celle de la Courbe multipliée par xy, il restera $c^4xy = 0$, qui a deux racines $x = 0$, & $y = 0$. La prémiére substituée dans la Proposée donne $by^3 + c^4 = 0$, ou $y = -c\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$. La seconde donne $ax^3 + c^4 = 0$, ou $x = -c\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$. Ainsi la Courbe a deux Points d'Inflexion, l'un à l'extrémité de l'ordonnée $AB = -c\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, l'autre à l'extrémité de l'abscisse $AC = -c\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$. Car il est aisé de voir que ces Points ne sont ni Points multiples, ni Points de Serpentement.

Exemple III. Soit proposée la Courbe, dont l'équation est $axy^2 + bx^2y + c^4 = 0$. On demande, si elle a des Points d'Inflexion ? Fig. 176.

On cherchera, pour cet effet, les deux prémiers Rangs de la Transformée. Ce sont $(2axy + bxx)u + (ayy + 2bxy)z$ & $(ax)uu + (2ay + 2bx)uz + (by)zz$. Donc $\beta = 2axy + bxx$, $\gamma = ayy + 2bxy$, $\delta = ax$, $\epsilon = 2ay + 2bx$, $\zeta = by$; & l'éq: $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$ est $by(2axy + bxx)^2 - (2ay + 2bx)(2axy + bxx)(ayy + 2bxy) + ax(ayy + 2bxy)^2 = 0 = -3a^2xy^4 - 6aabxxy^3 - 6abbx^3yy - 3b^3x^4y = 0$, qu'il faut combiner avec la Proposée. Cela se peut faire en diverses maniéres. On peut, par ex. multiplier la Proposée par $-3aayy - 3abxy - 3bbxx$, & ôtant le produit $-3c^4aayy - 3c^4abxy$

PLANCHE XXIII. $3c^4abxy - 3c^4bbxx - 3a^3xy^4 - 6aabx^2y^3 - 6abbx^3y^2 - 3b^3x^4$, qui est égal à zéro, de l'éq : $-3a^3xy^4 - 6aabx^2y^3 - 6abbx^3yy - 3b^3x^4 = 0$, le reste $3c^4aayy + 3c^4abxy + 3c^4bbxx$ sera aussi $= 0$, & divisant par $3c^4$, $a^2y^2 + abxy + b^2x^2 = 0$, équation qui n'a que des racines imaginaires $ay = bx(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3})$. La Courbe n'a donc aucun Point d'Inflexion. CH. XI. §. 199.

Exemple IV. L'équation proposée est $xyy + axx + b^3 = 0$. Elle représente deux Courbes assez différentes, selon que a & b ont les mêmes ou différents signes. Si a & b sont positifs cette équation représente la Courbe
Fig. 177. dessinée au $n°$. 1, & elle exprime aussi la même Courbe, mais dans une situation renversée, $n°$. 2, lorsque a & b sont tous deux négatifs. Cette même équation exprime une autre Courbe, $n^{os.}$ 3 & 4, lorsque a & b ont différents signes. Le n°. 3 marque sa position, quand a est négatif & b positif. Sa position est celle du $n°$. 4, quand a est positif & b négatif. On demande les Points d'Inflexion de ces Courbes?

Les deux prémiers Rangs de la Transformée étant $(2xy)u + (yy + 2ax)z$ & $(x)uu + (2y)uz + (a)zz$, l'équation à combiner avec la Proposée sera $a(2xy)^2 - (2y)(2xy)(yy + 2ax) + x(yy + 2ax)^2 = 0 = 4aax^3 - 3xy^4$. Qu'on ajoûte cette équation à $3xy^4 + 3b^3yy - 3aax^3 - 3ab^3x = 0$, produit de la Proposée par $3yy - 3ax$, on aura $3b^3yy + aax^3 - 3ab^3x = 0$. De cette équation multipliée par x, qu'on ôte la Proposée multipliée par $3b^3$, il restera $a^2x^4 - 6ab^3x^2 - 3b^6 = 0$, qui a quatre racines $\pm b\sqrt{(3 + \sqrt{12})\frac{b}{a}}$, & $\pm b\sqrt{(3 - \sqrt{12})\frac{b}{a}}$. Les deux prémiéres sont réelles, & les deux autres

CH. XI. §. 199. autres imaginaires, quand a & b, ont le même signe, parce qu'alors la fraction $\frac{b}{a}$ est positive, &, par la raison contraire, les deux prémiéres sont imaginaires & les deux derniéres réelles, quand a & b ont des signes contraires. PLANCHE XXII.

Ainsi, pour la Courbe des nos. 1 & 2, on prendra les abscisses AB & Ab égales à $+$ & à $-b\sqrt{(3+\sqrt{12})\frac{b}{a}}$: mais pour la Courbe des nos. 3 & 4, on prendra les abscisses AB & Ab égales à $+$ & à $-b\sqrt{(3-\sqrt{12})\frac{b}{a}}$. Les ordonnées de ces abscisses rencontreront ces Courbes dans leurs Points d'Inflexion.

On verra que ces Points ne sont ni multiples, ni Serpentements, en cherchant la valeur de leurs ordonnées. On a trouvé ci-dessus $4aax^3 - 3xy^4 = 0$, ou $y^4 = \frac{4}{3}aaxx =$ [en mettant pour xx ses valeurs $(3 \pm \sqrt{12})\frac{b^3}{a}$] $= (4 \pm \frac{8}{\sqrt{3}})ab^3$, soit $y = \pm\sqrt{(4 \pm \frac{8}{\sqrt{3}})ab^3}$. Ces valeurs d'$x$ & d'y substituées dans le prémier Rang de la Transformée $(2xy)u + (yy + 2ax)z$ ne l'anéantissent pas. Donc les Points qu'on a déterminés, ne sont pas multiples. Et comme ce prémier Rang ne peut diviser le troisiéme $(0)u^3 + (1)uuz + (0)uzz + (0)z^3$, ce ne sont pas des Points de Serpentement.

Exemple V. Quels sont les Points d'Inflexion de la Courbe, dont l'équation est $x^4 - aaxx + a^3y = 0$? Fig. 178.

Les deux prémiers Rangs de la Transformée étant $(a^3)u + (4x^3 - 2aax)z$, & $(0)uu + (0)uz + (6xx - aa)zz$; l'équation, qui détermine les Points d'Inflexion, sera $(6xx - aa)a^4 = 0$; d'où l'on tire $x = \pm a\sqrt{\frac{1}{6}}$,

PLANCHE XXIII. $\pm a\sqrt{\frac{1}{6}}$, & par l'équation de la Courbe $y = \frac{5}{36}a$. CH. XI. §. 199.

Exemple VI. Déterminer les Points d'Inflexion de la Conchoïde, dont l'équation est $xxyy + x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2ab^2x - aabb = 0$ [§. 174. *Ex. IV.*].

Le prémier & le second Rang de la Transformée sont $(2xxy)u + (2xyy + 4x^3 + 6axx + 2aax - 2bbx - 2abb)z$, & $(xx)uu + (4xy)uz + (yy + 6xx + 6ax + aa - bb)zz$. Donc pour déterminer les Points d'Inflexion, on aura l'éq: $(yy + 6xx + 6ax + aa - bb)(2xxy)^2 - 4xy(2xxy)(2xyy + 4x^3 + 6axx + 2aax - 2bbx - 2abb) + xx(2xyy + 4x^3 + 6axx + 2aax - 2bbx - 2abb)^2 = 0$, qui divisée par 4, se réduit à $-2x^4y^4 + (2x^4 - aaxx + bbxx + 2ab^2x)xxyy + 4x^8 + 12ax^7 + (13aa - 4bb)x^6 + (6a^3 - 10ab^2)x^5 + (a^4 - 8aabb + b^4)x^4 - (2a^3bb - 2ab^4)x^3 + aab^4xx = 0$. Qu'on y substituë $-x^4 - 2ax^3 - aaxx + bbxx + 2abbx + aabb$ à $xxyy$, qui est sa valeur prise dans l'équation de la Courbe, & qu'on divise par bb, on aura $x^6 + 6ax^5 + 12aax^4 + (10a^3 - 2abb)x^3 + (3a^4 - 6aabb)xx - 6a^3b^2x - 2a^4bb = 0$. Cette équation a une racine triple $x + a = 0$, qui donne le Point double de la Conchoïde, & divisée par le cube $x^3 + 3axx + 3aax + a^3$ de cette racine, elle a pour quotient l'éq: $x^3 + 3axx - 2abb = 0$. Ses racines sont les abscisses dont les ordonnées rencontrent la Courbe en ses Points d'Inflexion.

Exemple VII. On a déjà vû [§. 163] que les Courbes du second Ordre ne sauroient avoir d'Inflexion. C'est aussi ce que démontre le Calcul. L'équation générale $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ des Lignes de cet Ordre a, au prémier Rang de sa Transformée, $(b + ex + 2dy)u + (c + ey + 2fx)z$; & au second Rang, $(d)uu + (e)uz + (f)zz$. Donc l'équation pour détermi-

CH. XI. §. 199. terminer les Points d'Inflexion est $f(b+cx+2dy)^2 - e(b+cx+2dy)(c+ey+2fx)+d(c+ey+2fx)^2 = 0$, soit $bbf - bce + ccd + (4df - ee)(by + cx + dyy + exy + fxx) = 0$, d'où retranchant le produit de la Proposée par $4df - ee$, lequel est zéro, il restera $bbf - bce + ccd - (4df - ee)a = 0$. Afin qu'une Ligne du second Ordre eut des Points d'Inflexion, il faudroit que les coëfficients de son équation eussent entr'eux la rélation qu'exprime cette Egalité, $bbf - bce + ccd - (4df - ee)a = 0$, c'est-à-dire, que a fut égal à $\frac{bbf - bce + cdd}{4df - ee}$. Mais lorsque a a cette valeur, l'équation du second Ordre ne désigne pas une Courbe, parce que ses racines sont essentiellement imaginaires. Car en résolvant l'éq: $\frac{bbf - bce + cdd}{4df - ee} + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$, on trouve $2fx + ey + c = \pm\sqrt{-(y + \frac{2bf - ce}{4df - ee})^2} \times \sqrt{(4df - ee)}$. Or le quarré $(y + \frac{2bf - ce}{4df - ee})^2$ est nécessairement positif. Précedé du signe $-$, il est donc essentiellement négatif, & sa racine quarrée est absolument imaginaire. PLANCHE XXIII.

200. ON PEUT aussi résoudre tous ces Problèmes, directs & inverses, par la Méthode des Séries.

Soit Mμm une Courbe algébrique quelconque, dont la nature soit donnée par une équation entre les coordonnées AP[x] & PM[y]. Pour trouver la nature d'un Point quelconque M de cette Courbe, on portera l'Origine de A en P, de sorte que PM soit la prémiére ordonnée. Dans cette vuë, on substituera dans la Proposée u à y & $x+z$ à x [§. 28], & l'on aura une Trans- Fig. 179.

 formée

PLANCHE XXIII.

formée en u & z, où u représente une ordonnée quelconque pm, & z l'abscisse Pp comptée dès l'Origine P. La lettre x, qui reste dans la Transformée, comme une constante, exprime la Droite AP, comprise entre l'Origine primitive A & l'Origine nouvellement prise P. La lettre y, qui ne se trouve plus dans la Transformée, servira, dans l'occasion, à désigner la prémiére ordonnée PM. Ainsi x & y désignent ici des constantes, mais en telle sorte, pourtant, qu'elles indiquent que les Calculs qu'on va faire sur un Point donné M se peuvent également appliquer à tous les Points de la Ligne $M\mu m$.

CH. XI. §. 200.

Si, dans cette Transformée, on cherche les valeurs de u en z, par des Séries ascendantes ; ces Séries expriment les Branches de la Courbe que rencontre l'ordonnée PM, & les représentent d'autant plus exactement que z [Pp] est plus petite [§. 100]. Ces Branches sont réelles, si les Séries qui les représentent sont réelles : Si une de ces Séries a un terme imaginaire, elle est imaginaire, & la Branche qu'elle exprime est absolument imaginaire, c'est-à-dire, imaginaire de part & d'autre de l'ordonnée PM : Mais si une de ces Séries a un terme demi-imaginaire, elle est demi-imaginaire, & la Branche qu'elle désigne manque seulement d'un côté de PM, de l'autre côté elle est double [§. 95].

Il faut donc pour connoitre la nature du Point M, calculer tous les termes irréguliers [§. 109] des Séries ascendantes que fournit la Transformée en u & z : ce qui est encore nécessaire pour s'assurer du nombre de ces Séries ; parce qu'il peut arriver qu'une Série, qui paroissoit d'abord unique, vienne à se fourcher & en donne plusieurs. Mais, laissant le détail de ces irrégularités aux Chapitres suivants, supposons que la Série est réguliére dès son commencement.

Alors sa forme est $u = A + Bz + Czz + Dz^3 + \&c.$

Et

 Et cette valeur étant substituée dans l'équation, on déterminera les coëfficiens A, B, C, D, &c. en égalant successivement à zéro chaque terme de cette nouvelle Transformée [§. 112].

201. Dans cette Série, le prémier terme A est égal à l'ordonnée PM [y] de l'abscisse AP [x]. Car, faisant $z = o$, la Série $u = A + Bz$ &c. se réduit à $u = A$. Et z [Pp] $= o$ réduit l'ordonnée pm [u] à la prémiére ordonnée PM [y]. Donc $A = y$.

Le second terme Bz détermine la position de la Droite MO, qui touche la Courbe au point M. Car si on mène par ce Point M l'abscisse QMn, qui rencontre en n l'ordonnée pm, prolongée s'il le faut; on aura pn $=$ PM $= A$. Donc mn $=$ pm $-$ pn $= u - A = Bz + Czz + Dz^3$ &c. La Série tronquée de son prémier terme A, exprime donc la différence mn de la prémiére ordonnée PM & d'une autre ordonnée quelconque pm. Cette différence mn détermine la position de la Sécante Mm, qui retranche de la Courbe l'arc Mμm. Qu'on prenne, sur l'abscisse MQ, la partie MN égale à l'unité, & qu'on mène par le point N la Droite Nr parallèle à la Sécante Mm, elle retranchera de l'ordonnée PM, prolongée s'il le faut, une partie Mr égale à $B + Cz + Dz^2$ &c. Car, à cause des parallèles Mm, Nr, on aura Mn ou Pp [z]: mn [$Bz + Czz + Dz^3 +$ &c] $=$ MN [1]: Mr [$B + Cz + Dzz +$ &c]. Maintenant, si on imagine que la Sécante Mm vienne à tourner sur le Point M; quand elle aura passé dans la situation Mμ, elle ne retranchera de la Courbe que l'arc Mμ, d'autant plus petit que μ aproche plus de M. De sorte que, continuant à tourner, la Sécante Mm, ou Mμ, devient Tangente, lorsqu'elle est venuë dans la situation MO, où le second Point μ, qu'elle rencontre, coïncide avec le prémier M: une Sécante

I LA CHE XXIII. cante devenant Tangente, lorsque les deux Points de Section tombent l'un sur l'autre [§. 162]. Si l'on conçoit aussi que la Droite Nr tourne sur le Point N, avec la même vitesse que Mm sur M, en sorte que ces deux Droites Nr, Mm restent toûjours parallèles l'une à l'autre; & que Nr vienne dans la situation NR, quand la Sécante Mm devient la Tangente MO; on déterminera cette situation NR, [& par conséquent celle de la Tangente MO, qui lui est parallèle] en prenant MR égal à B coëfficient du second terme de la Série $A + Bz +$ &c. Car la Sécante Mm devient Tangente, au moment où le Point m tombe sur M, au moment où Mn[z] devient zéro. Mais quand z devient zéro, l'expression générale de Mr, qui est $B + Cz + Dz^2 +$ &c. se réduit à B. Donc, si on prend, sur l'abscisse, MN $= 1$, &, sur l'ordonnée, MR $= B$, & qu'on mène la Droite NR; elle sera parallèle à la Tangente MO. CH. XI. §. 201.

Ou, si l'on veut, & ce qui sera généralement plus commode, puisque B est communément une fraction, qu'on peut représenter par $\frac{\gamma}{\beta}$; on prendra, sur l'abscisse MQ, une partie Mν égale à β, & sur le prolongement de l'ordonnée une partie Mρ égale à γ, & la Droite $\nu\rho$ sera parallèle à la Tangente MO. Car, puisque Mν [β] est à Mρ [γ] comme MN [1] à MR [B ou $\frac{\gamma}{\beta}$], $\nu\rho$ est parallèle à NR, qui est elle même parallèle à MO. Donc ρ est parallèle à MO.

Le troisiéme terme de la Série $A + Bz + Cz^2 +$ &c indique la position de la Courbe par raport à sa Tangente. Car puisque MR $= B$, les triangles semblables NMR, MnO donnant NM [1] : MR [B] $=$ Mn [z] : nO, on aura nO $= Bz$. Mais mn $= Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c. Donc

mO

 $mO = mn - nO = Cz^2 + Dz^3 \cdot$ &c. Cette Série, quand z est infiniment petite, se réduit au prémier terme Cz^2. Donc le signe, $+$ ou $-$, de ce terme fait connoitre de quel côté de la Tangente passe la Courbe. Elle passe entre la Tangente & l'Axe des abscisses, lors que le signe du troisiéme terme Cz^2 est différent de celui du prémier A. Elle passe au-delà de la Tangente, quand le prémier & le troisiéme terme de la Série ont le même signe.

Ainsi, lorsque dans l'équation d'une Courbe on substituë d'abord $x + z$ à x, puis u à y, & ensuite $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c à u, ou simplement $A + Bz + Cz^2$ &c à y; & qu'égalant à zéro, 1°. tous les termes où l'on ne voit point de z; 2°. tous ceux où l'on ne voit que la prémiére puissance de z; 3°. ceux où l'on voit zz, &c. on fait autant d'équations pour déterminer les valeurs de A, B; C, D, &c: on connoitra par ces valeurs l'ordonnée PM d'un Point quelconque M, la position de sa Tangente MO, celle de la Courbe $M\mu m$ par raport à sa Tangente, &c. Mais les divers Cas, qui peuvent se présenter, demandent quelque détail.

202. Le prémier terme A de la Série $A + Bz + Cz^2 +$ &c. représente l'ordonnée PM de l'abscisse AP. Si la Courbe passe par l'extrémité P de cette abscisse, l'ordonnée PM est zéro. Donc, mettant dans la Série la valeur particuliére AP de x, on trouvera $A = 0$. Et réciproquement, si l'on fait $A = 0$, on aura une équation, dont les racines x sont les abscisses par l'extrémité desquelles passe la Courbe, c'est-à-dire, on aura les Points, où la Courbe rencontre l'Axe des abscisses.

Si au contraire l'ordonnée PM [y ou A] est une Asymptote, l'abscisse AP [x] a une ordonnée infinie. Donc, mettant dans la Série, pour x, sa valeur particuliére AP, on trouvera $A = \infty$. Et réciproquement, si

 on

PLANCHE XXIII. on fait $A=\infty$, [& pour cela il faut que A soit une fraction, dont on puisse égaler le dénominateur à zéro], on déterminera les abscisses dont les ordonnées sont Asymptotes. Ch. XI. §. 202.

Ce terme infini dans une Série, dénote quelque impossibilité, quelque absurdité dans les suppositions qui ont été faites. Cette absurdité consiste en ce qu'on a supposé que le prémier terme de la Série est une grandeur finie A. Car si l'on prend pour la Série cette forme générale $u=Az^h+Bz^i+ \&c$, que z infiniment petite réduit simplement à $u=Az^h$, on verra que, A étant finie, Az^h peut être infinie, si h est négatif [§. 79]. Donc, quand on suppose A, ou Az^0, pour le prémier terme de la Série qui donne u en z, & que quelque valeur particuliére de x donne A infinie; c'est une preuve que, pour cette valeur d'x, Az^0 n'est pas le prémier terme de la Série, mais qu'il doit être précedé de quelque terme qu'on avoit omis, & où l'exposant de z est négatif. On pourra donc, mettant pour x cette valeur particuliére qui donne $A=\infty$, chercher, par les Régles des §§. 102, 108, la Série de cette équation, & on trouvera que dans son prémier terme z a un exposant négatif; de sorte que, z étant infiniment petite, u est infinie.

203. Le second terme, Bz ou $\frac{\gamma}{\beta}z$, de la Série générale donne, comme on a vû, la position de la Tangente. Les valeurs particuliéres de x & de y, qui rendent $\gamma=0$, font connoitre qu'aux Points qui répondent à ces coordonnées, Mρ [γ] est nulle, & que $\nu\rho$, & la Tangente MO, parallèle à $\nu\rho$, tombent sur l'abscisse. De même, les valeurs particuliéres de x & de y, qui font $\beta=0$, indiquent les Points de la Courbe, où Mν [β] étant

CH. XI. §. 203. étant nulle, $\nu\rho$, & sa parallèle MO, tombent sur l'ordonnée. PLANCHE XXIII.

Ces Points, où les Tangentes sont parallèles aux abscisses ou aux ordonnées, sont les *Maxima* ou *Minima* des ordonnées & des abscisses, si ce ne sont pas des Points d'Inflexion. Donc les valeurs particuliéres de x & de y, qui donnent $\gamma = o$, indiquent les *Maxima* ou *Minima* des ordonnées, & celles qui donnent $\beta = o$, marquent les *Maxima* ou *Minima* des abscisses; à moins que ce ne soit des Points d'Inflexion [§. 196].

A moins encore que les mêmes valeurs d'x & d'y, qui donnent $\gamma = o$, ne donnent aussi $\beta = o$. Alors $M\nu$ & $M\rho$ étant nulles, les deux Points ν & ρ coïncident avec M, de sorte que la position de $\nu\rho$, & de sa parallèle MO, n'est pas déterminée par ce moyen. D'où l'on conclura que le Point M est un Point multiple.

Pour en comprendre la raison, il faut se rapeller la Méthode, indiquée au §. 112, de calculer les coëfficiens A, B, C, D, &c. En substituant $A + Bz + Cz^2$ &c. à u, on réduit l'équation à quelques termes & Séries ordonnées par z. Tous les termes sans z sont censés faire le prémier terme, lequel égalé à zéro se trouve être précisément l'équation proposée, si ce n'est qu'on a écrit A au lieu d'y. C'est pourquoi A se trouve égal à y [PM], comme on l'a remarqué [§. 201].

Le second terme est composé de ceux où z a pour exposant l'unité. Sa formule générale est $(\beta B - \gamma) z$, d'où l'on tire en l'égalant à zéro, $B = \frac{\gamma}{\beta}$. Mais si $\gamma = o = \beta$, cette équation se réduit à $oB - o = o$, qui n'aprend rien sur la valeur de B.

Il faut donc passer au troisiéme terme, qui comprend ceux où l'exposant de z est 2. La forme générale du coëfficient

PLANCHE XXIII. ficient de zz est $\beta C - \delta B^2 + \epsilon B - \zeta$, qui égalé à zéro serviroit à déterminer C. Mais quand $\beta = 0$, C disparoit, & l'équation se réduit à $\delta B^2 - \epsilon B + \zeta = 0$, qui, étant du second dégré, a deux racines. Puis donc que la valeur de B détermine la position de la Tangente, dans ce cas le Point M a deux Tangentes : c'est un Point double [§. 183]. CH. XI. §. 203.

Mais si l'on trouvoit $\delta = \epsilon = \zeta = 0$, on ne pouroit pas par cette équation déterminer B. On passeroit donc au quatriéme terme, dont la formule générale ($\beta D - (2\delta B - \epsilon) C + \eta B^3 - \vartheta B^2 + \iota B - \varkappa) z^3$ se réduit [à cause de $\beta = \delta = \epsilon = 0$] à $(\eta B^3 - \vartheta B^2 + \iota B - \varkappa) z^3$. Ce terme, égalé à zéro, donne donc une équation du 3e. dégré, qui fournit trois valeurs de B. Le Point M a donc trois Tangentes; c'est un Point triple [§. 183].

On voit de même que quand η, θ, ι, $\varkappa$ sont zéro, le Point M est, au moins, un Point quadruple.

Ainsi on reconnoitra les Points multiples d'une Courbe, à ce que le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{\gamma}{\beta}$ [$= B$] sont tous deux zéros. On aura le dégré de leur multiplicité par le dégré de l'équation qui donne les valeurs de B, & on déterminera leurs Tangentes par les racines de cette équation.

204. C'est par le troisiéme terme Cz^2 de la Série qu'on connoit si un Point de la Courbe est Point d'Inflexion, ou non. Car la Série tronquée de ses deux prémiers termes $A + Bz$, c'est-à-dire, la Série $Cz^2 + Dz^3$ &c. exprime la portion mO de l'ordonnée pm comprise entre la Courbe Mμm & la Tangente MO. Cette Série, lorsque z est infiniment petite, se réduit au seul prémier terme Cz^2, donc le signe fait connoitre de quel côté de la Tangente tombe la Courbe.

Mais.

CH. XI. § 204. Mais si ce terme Cz^2 manque, C étant zéro, la Série $Cz^2 + Dz^3$ &c. se réduit à $Dz^3 + Ez^4$ &c. dont le prémier terme Dz^3 vaut lui seul infiniment plus que tous les autres. C'est donc du signe $+$ ou $-$ de ce terme, que dépend la position de la Courbe par raport à la Tangente. Or, dans ce terme, l'exposant de z étant impair, le signe change quand à $+z$ on substitue $-z$. Donc si d'un côté de l'ordonnée la Courbe tombe au-dessus de la Tangente, de l'autre côté elle tombe au-dessous. Le Point est donc un Point d'Inflexion. On connoit donc les Points d'Inflexion d'une Courbe, par les valeurs particuliéres de x & de y, qui font évanouir le coëfficient C du troisiéme terme Czz de la Série générale. PLANCHE XXIII.

Bien entendu pourtant, que ces valeurs de x & de y, qui font disparoitre C, n'anéantissent pas en même tems le coëfficient D du 4e. terme. Car alors le prémier terme de la Série, qui exprime la valeur de mO, seroit Ez^4, où z a un exposant pair. La variation du signe de z ne fait donc point varier le signe de Ez^4. La Courbe, de part & d'autre de l'ordonnée, tombe donc d'un même côté de la Tangente. Le Point M n'est donc pas alors un Point d'Inflexion, mais un Point de Serpentement.

A moins que ces mêmes valeurs d'x & d'y qui anéantissent C & D, ne fassent aussi disparoitre E: en quel cas le prémier terme de la Série qui exprime mO, est Fz^5, où z a un exposant impair. Donc alors M est un Point de triple Inflexion, qui est une Inflexion visible.

On voit en général, que si, dans le terme qui suit Bz, z a un exposant pair, le Point M est un Point simple, ou d'Inflexion invisible, c'est-à-dire, de Serpentement. Mais si, dans ce terme, z a un exposant impair, le Point M est un Point d'Inflexion visible.

 205. Tout

205. Tout cela eſt également vrai, lors que le terme Bz manque, γ étant zéro & β n'étant pas zéro. Ce Cas eſt celui des *Maxima* & *Minima* des ordonnées [§. 203]; à moins que ce ne ſoit le Cas d'un Point multiple ou d'un Point d'Inflexion. C'eſt une Inflexion, lorſque dans le terme ſuivant, qui eſt le prémier terme où z a un expoſant plus grand que l'unité, cet expoſant eſt un nombre impair, ou une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſont impairs, parce que le ſigne de ce terme change avec celui de z. C'eſt un Point multiple, quand l'expoſant de z eſt une fraction de numérateur impair & de dénominateur pair, parce qu'alors ce terme eſt demi-imaginaire, c'eſt-à-dire, imaginaire d'un côté, & double de l'autre [§. 95]. Mais quand l'expoſant de z dans ce terme eſt un nombre pair, ou une fraction de numérateur pair & de dénominateur impair, le Point M eſt un vrai *Maximum* ou *Minimum* d'ordonnées.

On connoitra ſi c'eſt un *Maximum*, ou un *Minimum*, par le ſigne du coëfficient de ce terme qui eſt le prémier où z a un expoſant plus grand que l'unité. Car ſi ſon ſigne eſt le même que celui d'A, la Courbe paſſe au-delà de la Tangente; l'ordonnée PM eſt plus petite que les deux ordonnées voiſines, M eſt un *Minimum*. Mais ſi le ſigne de ce terme eſt contraire à celui d'A, la Courbe tombe entre l'Axe & la Tangente; PM ſurpaſſe les ordonnées voiſines, M eſt un *Maximum*.

206. Que ſi le terme Bz eſt infini, ce qui arrive lorſque la Tangente, parallèle aux ordonnées, rend Mν [β], c'eſt-à-dire, le dénominateur de la fraction $\frac{\gamma}{\beta}$ [$= B$] égal à zéro: c'eſt une marque [§. 202], que, pour ce Cas particulier, la Série n'a pas la même forme $A + Bz + Cz^2$

 + Cz^2 &c. que dans le Cas général : mais qu'avant le terme Bz il doit y en avoir un, ou plusieurs, qui ont été omis. On substituera donc à x & y leurs valeurs particuliéres ; on cherchera le prémier de ces termes par la Méthode des §§. 102, 108, & on jugera, par son exposant, de la position de la Courbe par raport à sa Tangente, qui est l'ordonnée. PLANCHE XXIII.

Car ce terme, qui, à supposer z infiniment petite ; vaut lui seul plus que tous ceux qui le suivent, exprime la différence de la prémiére ordonnée PM [A] & de l'ordonnée infiniment proche pm, dont la valeur est exprimée par toute la Série.

Si, dans ce terme, l'exposant de z est une fraction de numerateur & de dénominateur impair ; son signe change en changeant +z en —z. La différence de PM & des deux ordonnées qui l'avoisinent, est donc positive d'un côté, négative de l'autre : PM, ordonnée & Tangente de la Courbe au Point M, est donc plus grande qu'une de ses ordonnées voisines, plus petite que l'autre ; M est donc un Point d'Inflexion.

Si, dans ce terme, z a pour exposant une fraction de numérateur pair & de dénominateur impair, le terme conserve sa valeur, soit qu'on donne à z le signe +, ou le signe —. La différence de PM & des ordonnées voisines est donc la même de part & d'autre : PM est ou plus grande, ou plus petite, que les ordonnées qui la touchent. Le Point M est donc un *Maximum*, ou un *Minimum* d'ordonnées, quoique l'ordonnée soit Tangente. Donc, en ce Point M, la Courbe change de cours, & rebrousse, pour ainsi dire, en arriére. Aussi les Geométres nomment-ils ces Points, *Points de Rebroussement*. On en parlera plus en détail dans la suite, & on verra quelles exceptions souffre cette Remarque, par les irrégularités des termes qui suivent dans la Série. Mais quand M est Fig. 180.

PLANCHE XXIII. M eſt un Point de rebrouſſement, on voit s'il eſt un Maximum, ou un Minimum d'ordonnées, par la diſparité ou la parité des ſignes du prémier & du ſecond terme de la Série. CH. XI. §. 206.

Enfin, ſi dans le ſecond terme, [A, lors même qu'il ſeroit zéro, étant compté pour le prémier] l'expoſant de z eſt une fraction de numérateur impair & de dénominateur pair; ce terme eſt demi-imaginaire. Ainſi, d'un côté de l'ordonnée Tangente, la Courbe n'a que des ordonnées imaginaires; de l'autre elle en a deux, une plus grande & une plus petite que PM, à cauſe du ſigne ambigu $\pm$ de ce ſecond terme. M eſt donc une limite, où les ordonnées d'imaginaires deviennent réelles : c'eſt un vrai *Maximum* ou *Minimum* d'abſciſſes. Et on décidera s'il eſt l'un ou l'autre, en examinant de quel côté de PM les ordonnées ſont réelles, de quel côté elles ſont imaginaires.

Exemple I. On propoſe l'éq : $ayy + x^3 + bxx = 0$. Elle repréſente deux Courbes différentes, ſçavoir la Courbe *n°.* 1, quand b eſt poſitive, & la Courbe *n°.* 2, quand b eſt négative. On ſuppoſe a toujours poſitive. Fig. 181.

En ſubſtituant u pour y & $x + z$ pour x, l'équation ſera transformée en $auu + (x^3 + bxx) + (3xx + 2bx)z + (3x + b)zz + z^3 = 0$, où mettant $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c pour u, on aura

$$auu = aAA + 2aABz + 2aACzz + 2aADz^3 \text{ \&c.}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + aBB \quad + 2aBC$$

$$\left.\begin{matrix} + x^3 \\ + bx^2 \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} + x^3 \\ + bx^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} . \\ . \end{matrix} \quad \begin{matrix} . \\ . \end{matrix} \quad \begin{matrix} . \\ . \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} + 3xx \\ + 2bx \end{matrix}\right\} z = \left.\begin{matrix} + 3xx \\ + 2bx \end{matrix}\right\} z \quad \begin{matrix} . \\ . \end{matrix} \quad \begin{matrix} . \\ . \end{matrix}$$

$$+ 3x$$

Ch. XI. §. 206. Planche XXIII.

$$\left.\begin{matrix}+3x\\+b\end{matrix}\right\} zz = \qquad \left.\begin{matrix}+3x\\+b\end{matrix}\right\} zz$$

$$+z^3 = \qquad +1z^3$$

& pour chercher les valeurs d'*A*, *B*, *C*, *D*, *&c.* on aura ces équations

$$aAA + x^3 + bxx = 0$$
$$2aAB + 3xx + 2bx = 0$$
$$2aAC + aBB + 3x + b = 0$$
$$2aAD + 2aBC + 1 = 0$$

La prémiére, qui détermine la valeur d'*A*, est précisément la même chose que l'équation proposée $ayy + x^3 + bxx = 0$, en écrivant *A* pour *y*. Elle donne donc $A = y$ [§. 201].

La valeur d'*A*, prise dans cette équation, est $\pm\sqrt{\frac{x^3+bx^2}{a}}$, qui est zéro, 1°. quand $x = 0$, 2°. quand $x = -b$. Donc la Courbe rencontre l'Axe des abscisses, & à l'Origine A, & à l'extrémité B de l'abscisse AB $= -b$.

Cette même valeur d'*A* ne devient infinie que quand *x* est infinie. Car on ne peut la rendre infinie en égalant son dénominateur à zéro, puisque ce dénominateur est une quantité finie *a*. La Courbe n'a donc aucune ordonnée asymptote, & ses ordonnées ne sont infinies que quand les abscisses deviennent infinies.

La valeur de *B* se détermine par la 2e. équation $2aAB + 3xx + 2bx = 0$, qui donne $B = -\frac{3xx+2bx}{2aA} = -\frac{3xx+2bx}{2ay}$, puisque $A = y$. Cette valeur détermine en général la Tangente. Car si on prend, sur l'ab-

PLANCHE XXIII. scisse menée par un Point quelconque de la Courbe, une portion égale à $2ay$, & sur le prolongement de l'ordonnée, une portion égale à $-(3xx+2bx)$, c'est-à-dire, si on prend sur l'ordonnée dès son sommet une portion égale à $3xx+2bx$, & qu'on joigne les extrémitez de ces deux parties par une ligne droite, elle sera parallèle à la Tangente [§. 201]. CH. XI. §. 206.

On aura les *Maxima* & les *Minima* des ordonnées, en égalant à zéro le numérateur de B. Cette éq: $3xx+2bx=0$ a deux racines, $x=0$ & $x=-\frac{2}{3}b$. La prémiére se raporte à un Point double, car cette valeur d'x, substituée dans l'équation de la Courbe, donne $y=0$, ce qui anéantit le dénominateur de B [§. 203]. Nous reviendrons bientôt à ce Point double. L'autre racine $x=-\frac{2}{3}b$, mise dans l'équation de la Courbe, la transforme en $ayy+\frac{4}{27}b^3=0$, d'où l'on tire $y=\pm\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ racine imaginaire, quand b est positive, mais réelle quand b est négative. Ainsi la Courbe n°. 1 n'a ni *Maximum* ni *Minimum* d'ordonnées. Mais la Courbe n°. 2, a deux Points M, m, dont l'abscisse commune est $AP=-\frac{2}{3}b$, positive puisque b est négative, & dont les ordonnées sont $PM+\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}$, & $Pm=-\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}$; lesquels Points sont des *Maxima*.

Car 1°. ce ne sont pas des Points multiples. Les valeurs de $x\left[-\frac{2}{3}b\right]$ & de $y\left[\pm\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right]$, qui anéantissent le numérateur, $3xx+2bx$, de B, n'anéantissent pas son dénominateur $2ay$.

2°. Ce ne sont pas des Points d'Inflexion. Car ces mêmes valeurs d'x, d'y, & de B, n'anéantissent point C. Ce coëfficient est donné par la 3e. équation $2aAC+aBB$

$+3x$

CH. XI. §. 206. $+3x+b=0$, où, mettant $-\frac{2}{3}b$ pour x & o pour B, on a $2aAC-b=0$, soit $C=\frac{b}{2aA}$. PLANCHE XXIII.

Mais 3°. ce sont des *Maxima*. Car $C=\frac{b}{2aA}$, donnant le produit AC égal à $\frac{b}{2a}$, grandeur négative, puisque b est ici négative & a positive, le signe de C est différent du signe d'A. Donc [§. 205] les ordonnées PM, Pm surpassent celles qui en sont les plus voisines de part & d'autre, les Points M & m sont des *Maxima* d'ordonnées.

On déterminera les *Maxima* & les *Minima* d'abscisses, en égalant à zéro le dénominateur $2ay$ de B. La valeur o, qui en résulte pour y, mise dans l'équation de la Courbe donne $x^3+bxx=0$, dont les racines sont $x=0$ & $x=-b$. La prémiére porte, comme on l'a vu, à un Point double dont nous parlerons tout à l'heure. L'autre, donnant B infinie, & désignant le Point B où la Courbe rencontre l'Axe des abscisses, peut y donner un *Maximum* ou un *Maximum* d'abscisses.

Pour en juger, on mettra [§. 206], dans la Transformée $auu+x^3+bxx+(3xx+2bx)z+(3x+b)zz+z^3=0$, au lieu d'$x$ sa valeur $-b$, qui apartient au Point B, & cette Transformée se réduira à $auu+bbz-2bzz+z^3=0$; d'où tirant [§. 102] la Série ascendante qui donne u en z, on aura $u=\pm b\sqrt{-\frac{z}{a}}\pm z\sqrt{-\frac{z}{a}}$ &c. Cette Série, ou plutôt ces deux Séries, sont imaginaires quand z est positive, elles sont réelles quand z est négative. Donc [§. 206], la Courbe n'a ni ordonnées, ni Branches, du côté positif de B; mais du

PLANCHE XXIII. côté négatif elle a deux Branches qui touchent l'ordonnée au Point B. Donc, dans la Courbe n°. 1, où B est du côté négatif de l'Origine, ce point B est un *Minimum* d'abscisses. C'est au contraire un *Maximum* dans la Courbe n°. 2, où B tombe du côté positif de l'Origine. CH. XI. §. 206.

On déterminera les Points multiples de la Courbe, en égalant à zéro le numérateur & le dénominateur de B. Le dénominateur $2ay$ égalé à zéro, donne $y = 0$, ce qui transforme l'équation de la Courbe en $x^3 + bxx = 0$. Le numérateur, égalé à zéro, donne $3xx + 2bx = 0$. Et comme ces deux équations n'ont point d'autres racines communes que $x = 0$, on conclud que la Courbe n'a qu'un seul Point multiple, qui est à l'Origine, où $x = 0$, & $y = 0$.

Ces valeurs d'x & d'y substituées dans la 2e. équation des coëfficients, $2aAB + 3xx + 2bx = 0$, la réduisent à $0B + 0 = 0$ qui ne détermine rien. Mais, substituées dans la 3e. éq: $2aAC + aBB + 3x + b = 0$, elles la réduisent à $aBB + b = 0$, d'où l'on tire $B = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$. Où l'on voit que B a deux valeurs, parce que l'Origine est un Point double. Ces valeurs sont imaginaires dans la Courbe n°. 1, où a & b sont positives. Donc l'Origine de cette Courbe, quoiqu'un Point de la Courbe, & même un Point double, n'a point de Tangentes. Ce Paradoxe s'explique en considérant que par ce Point il ne passe aucune Branche de la Courbe, mais que c'est un de ces Points isolés, dont nous avons déjà donné un Exemple en parlant de la Conchoïde [§. 174, Ex. *IV*], & dont nous parlerons plus au long dans la suite.

Mais le Point, qui est à l'Origine de la Courbe n°. 2, a deux Tangentes déterminées par l'éq: $B = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, b étant

CH. XI. §. 206. étant négative & a positive. Il en résulte cette Construction. Qu'on prenne l'abscisse $AE = -1$, & les ordonnées $AD = +\sqrt{-\frac{b}{a}}$, $Ad = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$, ou, ce qui est la même chose, $AE = -a$, $AD = +\sqrt{-ab}$, $Ad = -\sqrt{-ab}$, & les Droites ED, Ed seront parallèles aux Tangentes. Ou bien, qu'on prenne l'abscisse $Ac = 1$, & qu'on lui donne les ordonnées $cF = +\sqrt{-\frac{b}{a}}$, $cf = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$; ou qu'on prenne $Ac = a$, $cF = +\sqrt{-ab}$, $cf = -\sqrt{-ab}$, & AF, Af seront les Tangentes. PLANCHE XXIII.

Veut-on savoir de quel côté de ces Tangentes tombent les Branches de la Courbe qui passent par le Point A; il faut chercher la valeur de C, qui convient à ce Point. On la trouvera dans la 4e. équation des coëfficients $2aAD + 2aBC + 1 = 0$, que $A = 0$ & $B = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ réduisent à $C = \mp\frac{1}{2\sqrt{-ab}}$. Le signe $-$, devenu supérieur, fait voir que la Branche touchée par GAF tombe dessous sa Tangente; & le signe $+$, inférieur, montre que la Branche touchée par gAf tombe au-dessus de la Tangente. Ainsi les Branches de la Courbe embrassent les jambes de l'angle GAg, & sont embrassée par les jambes de l'angle FAf.

On aura les Points d'Inflexion de ces Courbes, en faisant $C = 0$ [§. 204]. Alors la 3e. équation des coëfficients se réduit à $aBB + 3x + b = 0$, ou, [mettant pour B sa valeur générale, prise dans la 2e. équation, $-\frac{3xx + bx}{2ay}$] à $a\left(\frac{3xx + bx}{2ay}\right)^2 + 3x + b = 0$, soit $9ax^4 + 12abx^3 + 4abbxx + 12aaxyy + 4aabyy = 0$. Que dans cette équation,

PLANCHE XXIII. tion, on mette, pour ayy, sa valeur $-x^3 - bxx$, prise dans l'équation de la Courbe, on aura $9ax^4 + 12abx^3 + 4abbxx - 12ax^4 - 12abx^3 - 4abx^3 - 4abbxx = 0 = -3ax^4 - 4abx^3$, dont les racines sont $x = 0$, & $x = -\frac{4}{3}b$. La racine $x = 0$ donne, comme on a vû, les Points A & B, qui n'ont point d'Inflexion. Mais la racine $x = -\frac{4}{3}b$ donne, par l'équation de la Courbe, $y = \pm \frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$, qui est imaginaire, b étant négative, mais réelle & double, b étant positive. Ainsi la Courbe n°. 2 n'a aucun Point d'Inflexion. Mais la Courbe n°. 1 en a deux N, n, dont l'abscisse commune est $AC = -\frac{4}{3}b$, & les ordonnées $CN = +\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$, & $Cn = -\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$. CH. XI. §. 106.

Fig. 182. *Exemple II.* Soit proposée la Courbe, dont l'équation est $y^3 + 3xyy - 3ayy - 12axy - 4axx + 4aax = 0$.

En substituant u pour y, & $x + z$ pour x, dans cette équation, elle se transforme en $u^3 + 3uux + 3uuz - 3auu - 12aux - 12auz - 4axx - 8axz - 4azz + 4aax + 4aaz = 0$. Et mettant, dans cette Transformée, la Série $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c. pour u, on aura, pour déterminer les coëfficients, ces équations,

$$A^3 + 3xAA - 3aAA - 12axA - 4axx + 4aax = 0.$$
$$(3AA + 6xA - 6aA - 12ax)B + 3AA - 12aA - 8ax + 4aa = 0.$$
$$(3AA + 6xA - 6aA - 12ax)C + (3A + 3x - 3a)BB + (6A - 12a)B - 4A = 0.$$
$$(3AA + 6xA - 6aA - 12ax)D + (6A + 6x - 6a)BC + (6A - 12a)C + B^3 + 3BB = 0.$$

La conformité de la prémiére avec la Proposée montre que $A = y$. Comme la valeur d'A tirée de cette équa-

CH. XI. §. 206. cette équation n'est pas une fraction, puisque le prémier terme de l'équation cubique $A^3 + 3(x-a)AA + 12axA - (4axx - 4aax) = 0$ n'est point affecté, on ne sauroit rendre A, ou y, infinie en égalant son dénominateur à zéro. Ainsi la Courbe n'a point d'Ordonnées-asymptotes, & ses ordonnées ne deviennent infinies que quand les abscisses sont infinies. Mais, en faisant $A = 0$, on a $-4axx + 4aax = 0$, dont les racines sont $x = 0$ & $x = a$. Donc la Courbe rencontre l'Axe des abscisses à l'origine A, & à l'extrémité B de l'abscisse $AB = a$. PLANCHE XXIII.

En mettant y au lieu d'A, la seconde équation des coëfficients donne $B = -\frac{3yy - 12ay - 8ax + 4aa}{3yy + 6xy - 6ay - 12ax}$: ce qui donne en général les Tangentes de la Courbe. Si on veut, par ex. la Tangente du Point B, on mettra, dans cette valeur de B, a pour x & 0 pour y, & on aura $B = -\frac{-4aa}{-12aa} = -\frac{1}{3}$. On prendra donc, sur l'ordonnée, $BC = -\frac{1}{3}AB$, & AC sera parallèle à la Tangente BT.

Les *Maxima* & *Minima* d'ordonnées se trouveront en égalant à zéro le numérateur de B. De là on tire $x = \frac{3yy - 12ay + 4aa}{8a}$, & cette fraction, substituée à x dans la Proposée, la change en $9y^4 - 5ay^3 - 120aayy - 96a^3y + 16a^4 = 0$, qui se peut diviser par $y - 2a$, & donne au quotient $9y^3 - 38ayy + 44a^2y - 8a^3$. Ainsi l'équation, qui donne les limites des ordonnées, a cette racine $y - 2a = 0$, & les trois que renferme l'éq: $9y^3 - 38ayy + 44aay - 8a^3 = 0$, dont deux sont imaginaires [§. 59. III. 1] & la troisiéme réelle, & à peu près $y - \frac{21}{100}a = 0$.

La racine $y - 2a = 0$ se raporte à un Point multiple. Car

PLANCHE XXIII. Car mettant $2a$ pour y dans l'éq : $x = \frac{3yy - 12ay + 4aa}{8a}$, CH. XI. §. 206.
elle se réduit à $x = -a$. Et ces valeurs d'y & de x substituées dans la valeur de B, qui est $\frac{3yy - 12ay - 8ax + 4aa}{3yy + 6xy - 6ay - 12ax}$ la réduisent à $\frac{0}{0}$: ce qui marque un Point multiple [§. 203]. Nous en parlerons tout à l'heure.

La racine $y = \frac{11}{100}a$ à peu près, donne $x = \frac{17\frac{1}{2}}{100}a$ à peu près, & indique un vrai *Maximum* d'ordonnées. Car si on cherche la valeur de C dans la 3e. équation des coëfficients, laquelle [B étant zéro] est $(3yy + 6xy - 6ay - 12ax)C - 4a = 0$, on aura, [en mettant $\frac{17\frac{1}{2}}{100}a$ pour x & $\frac{11}{100}a$ pour y], $C = -\frac{4}{3a}$ a peu près; qui est une valeur négative, tandis que $A[y]$ est positive. Donc le Point M, qui a pour abscisse $AP = \frac{17\frac{1}{2}}{100}a$, à peu près, & pour ordonnée $PM = \frac{11}{100}a$ à peu près, est un *Maximum* d'ordonnées.

Si on égale à zéro le dénominateur $3yy + 6xy - 6ay - 12ax$ de B, on aura, pour déterminer les Points de la Courbe où la Tangente est parallèle aux ordonnées, une équation qui a deux racines, $y = 2a$, & $y + 2x = 0$. La prémiére racine donne le Point multiple indiqué cy-dessus, & dont nous parlerons plus amplement. La seconde réduit l'équation de la Courbe à $4x^3 + 8axx + 4aax = 0$ dont les racines sont $x = 0$, & $x = -a$. Celle-ci se raporte au Point multiple, & l'autre donnant $y[= -2x] = 0$, marque qu'à l'Origine l'Axe des ordonnées est Tangente. Pour avoir la position de la Courbe par raport à cette Tangente, on mettra, dans la Trans-

CH. XI. §. 206. Transformée en u & z, o pour x, ce qui la changera en $u^3 - 3uuz - 3auu - 12auz - 4azz + 4aaz = 0$. Si on cherche, par cette équation, les Séries ascendantes qui donnent u en z [§. 102], on aura $u = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}az$, &c. Ainsi u a deux valeurs réelles, z étant positive, qui deviennent imaginaires, quand on prend z négative. L'Origine est donc une limite où viennent s'unir deux Branches qui s'étendent du côté des abscisses positives. PLANCHE XXIII.

La racine $x = -a$, qui donne $y = 2a$, marque, comme nous l'avons dit, un Point multiple. Pour en connoitre la nature, on substituera $-a$ pour x dans la Transformée en u & z, ce qui la change en $u^3 + 3uuz - 6auu - 12auz - 4azz + 12aau + 12aaz - 8a^3 = 0$. Si on cherche [§. 102] les Séries ascendantes que fournit cette équation & qui donnent u en z, on trouvera $u = 2a + (4a)^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}$ &c. L'Ordonnée DE, de l'abscisse AD $= -a$, est donc égale à $2a$. Et les ordonnées voisines la surpassent de la quantité $(4a)^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}$ ou $\sqrt[3]{4azz}$, qui est toûjours positive, quelque signe qu'on donne à z. Le Point E est donc un *Minimum* d'ordonnées, quoiqu'en ce Point la Tangente touche la Courbe. En un mot, ce Point E est un Rebroussement [§. 206]; qui est un Point double, puisque deux Branches de la Courbe viennent s'y toucher.

Il ne nous reste qu'à voir si la Courbe a quelque Point d'Inflexion. On les détermine en faisant $C = 0$. Cette supposition réduit la 3e. équation des coëfficiens à $3(y + x - a)BB + 6(y - 2a)B - 4a = 0$. Qu'on y mette pour B sa valeur $-\frac{3yy - 12ay - 8ax + 4aa}{3yy + 6xy - 6ay - 12ax}$, & on aura une équation qui se réduit à $-81xy^4 - 27y^5 + 504axy^3 + 153ay^4 + 192a^2x^2y - 1080a^2xy^2 - 288a^2y^3 + 192a^3x^2 + 1248a^3xy + 216a^3y^2 - 336a^4x + 48a^4y - 48a^5$

PLANCHE XXIII. $48a^5 = 0$. De cette équation on peut ôter le produit de la Proposée $y^3 + 3xyy - 3ayy - 12axy - 4axx + 4aax = 0$ par $-27yy - 36ax - 72ay - 72aa$, lequel produit est zéro, & le reste divisé par $48aa$, est $x^3 + x^2y + ax^2 + 2axy - aax - a^3 = 0$, ou $(x+a)^2 \times (x + y - a) = 0$. La racine $x + a = 0$ désigne, comme on l'a vû, le Point double E. Et la racine $x = a - y$, substituée dans l'équation de la Courbe, la réduit à $2y^3 + 8ayy - 8a^2y = 0$, ou $2y(y - 2a)^2 = 0$. La racine $y = 2a$ se raporte encore au Point double E. Mais la racine $y = 0$ donne $x [= a - y] = a$. Le Point B, que ces coordonnées indiquent, est véritablement un Point d'Inflexion. Car si, dans la 3e. équation des coëfficients, on met o pour y ou A, a pour x, & $-\frac{1}{3}$ pour B, elle se réduira à $-12aaC = 0$, c'est-à-dire $C = 0$. Mais ces mêmes valeurs, substituées dans la 4e. équation, la réduisent à $-12aaD + \frac{8}{27} = 0$, ou $D = \frac{2}{81aa}$. Donc, au Point B, C est zéro & D n'est pas zéro : ce qui est le caractére d'un Point d'Inflexion. [§. 204]. CH. XI. §. 206.



CHAPI-

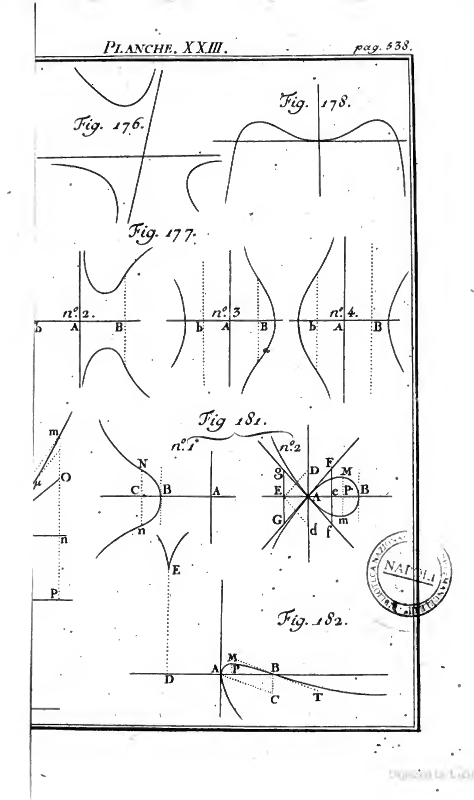
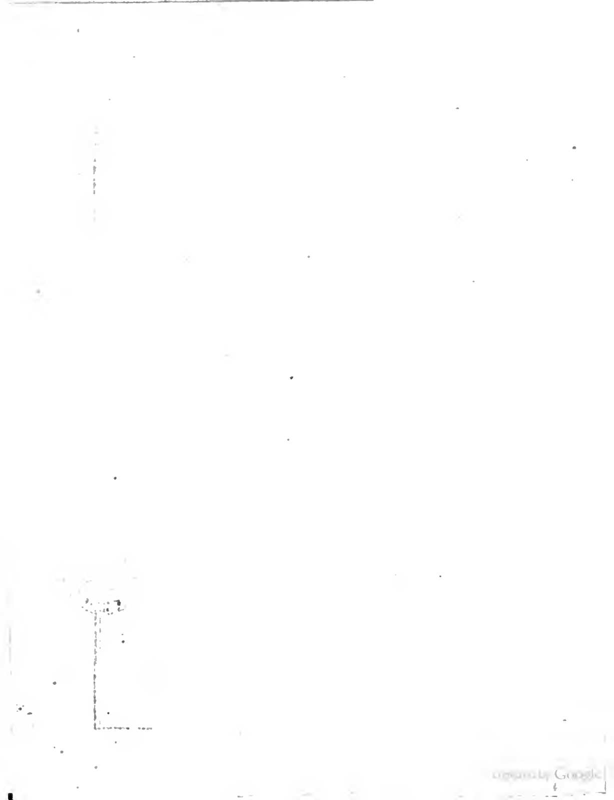


Fig. 176.
Fig. 178.
Fig. 177.
n.° 2.
b
A
B
n.° 3
b
A
B
n.° 4.
b
A
B
Fig 181.
n.° 1
n.° 2
m
μ
O
n
P
N
C
B
A
n
E
D
g
D
F
M
E
A
e
P
B
G
d
f
m
Fig. 182.
M
A
P
B
D
C
T



CHAPITRE XII.

De la Courbure des Lignes courbes en leurs différents Points.

207. LA DETERMINATION des Tangentes d'une Courbe indique quelle est sa direction en chacun de ses Points. Mais, pour en connoitre parfaitement la Nature, il faut savoir de plus combien la Courbe s'écarte de cette direction; il faut savoir mesurer sa courbure. Car une même Courbe n'est pas également courbe par tout; elle ne s'écarte pas toûjours également de sa Tangente; elle ne fait pas avec cette Droite des angles de contact égaux en tous ses Points. C'est le Cercle seul qui a par tout la même courbure, & qui est par-là très-propre à mesurer la courbure des autres Courbes. D'autant mieux que, quoiqu'un même Cercle soit également courbe en tous ses points, les différents Cercles ont des courbures différentes, & réciproquement proportionelles à leurs raïons, ou à leurs diamétres. Si on courbe circulairement deux Droites égales, mais qu'on fasse de l'une une circonférence entiére, & de l'autre une demi-circonférence; celle-ci sera deux fois moins courbe que celle-là, mais aussi le Cercle dont elle fait la demi-circonférence a un raïon double du Cercle dont l'autre Ligne fait toute la circonférence. En général, soient ABD, abd deux Cercles inégaux, dont les raïons AC, ac soient entr'eux en raison de *m* à *n*; & qu'on prenne sur sur ces Cercles des arcs égaux AB, ab; je dis que l'arc AB est moins courbe que l'arc ab dans la même raison

PLANCHE XXIV. Fig. 183.

 que

PLANCHE XXIV. que le raïon AC est plus grand que le raïon ac; desorte que si l'arc ab a une courbure de m dégrés, minutes, ou parties, l'arc AB a une courbure de n dégrés, minutes, ou parties proportionelles. Car, si on prend l'arc $A\beta$ semblable à l'arc ab, cet arc $A\beta$ est à l'arc ab, comme la circonf. ABD à la circonf. abd, ou comme le raïon AC au raïon ac, c'est-à-dire, comme m à n. Donc ab étant égal à AB, $A\beta$ est aussi à AB comme m à n. Ainsi $A\beta$, semblable à ab, étant un arc de m dégrés ou parties, AB est un arc de n dégrés ou parties. Donc la courbure de ab est à celle de AB comme m à n. On voit donc, que dans une même étenduë ab, AB, les Cercles abd, ABD ont des courbures qui sont entr'elles comme m à n, ou comme AC à ac; c'est-à-dire en raison réciproque de leurs raïons ou diamétres. CH. XII. §. 207.

Ainsi il est aisé de comparer la courbure de différents Cercles, en comparant leurs raïons ou diamétres. Et par conséquent pour comparer la courbure des différentes Courbes, ou celle d'une même Courbe en ses différents Points, il ne s'agit que de trouver le Cercle, qui a la même courbure qu'une Courbe donnée en un Point donné: c'est-à-dire, le Cercle, qui, touchant la Courbe au Point donné, s'applique si bien à cette Courbe, qu'entre elle & le Cercle on ne puisse faire passer aucun autre Cercle. Car comme, en augmentant ou diminuant le raïon d'un Cercle, on diminuë ou augmente sa courbure par tous les dégrés possibles; s'il n'y a aucun Cercle qui aproche plus de la Courbe que le Cercle trouvé, on peut conclure que le Cercle a la même courbure que la Courbe en ce Point-là. J'excepte le cas, où la courbure d'une Courbe est plus grande ou plus petite que celle d'aucun Cercle. On en parlera dans la suite.

208. Repre-

CH. XII. §. 208. 208. Reprenons la Figure du §. 200, où PM [y] est l'ordonnée d'un Point assigné M de la Courbe Mμm, Pp [z] une abscisse quelconque comptée dès l'Origine P, & dont l'ordonnée pm est exprimée par la Série $A + Bz + Czz + Dz^3$ &c. On a vû que le 1r. terme A de cette Série représente l'ordonnée PM ou la partie pn de l'ordonnée pm, que le 2d. terme Bz exprime la partie nO, comprise entre l'abscisse QMn & la Tangente MO, & & que le reste de la Série $Cz^2 + Dz^3$ &c. désigne la partie Om comprise entre la Tangente & la Courbe [§. 201]. PLANCHE XXIV. Fig. 184.

Qu'on imagine un Cercle Mmih, qui touche au Point M la Courbe Mμm [c'est-à-dire sa Tangente MO], & qui passe par le point m. Si le Cercle passe entre la Tangente & la Courbe, il se détourne de la Tangente moins que la Courbe, il est moins courbe qu'elle au Point M. Si, au contraire, la Courbe passe entre le Cercle & la Tangente, le Cercle se détourne de la Tangente plus que la Courbe, il est plus courbe qu'elle au Point M. Mais dans l'un & l'autre cas, plus le Point m, où le Cercle coupe la Courbe, est proche du Point M où il la touche, plus le Cercle aproche d'avoir la même courbure que la Courbe. Il en aproche infiniment, il se confond avec elle, & a précisément la même courbure, lorsque le point m vient à tomber sur le Point M.

On aura donc le Cercle MIH de même courbure que la Courbe au Point M, si l'on détermine la grandeur du Diamétre MH d'un Cercle, qui touchant la Courbe Mμm en M la coupe en un point m infiniment proche de M, ou coïncidant avec M. Le Diamétre MH, & le raïon MK de ce Cercle sont aussi apellés le *Diamétre* & le *Raïon de la Courbure* au Point M, & le centre K se nomme le *Centre de la Courbure*. L'on compare la courbure des différents Points d'une même Courbe, ou de

 diverses

PLANCHE XXIV. diverſes Courbes, par la raiſon inverſe des raïons de courbure en ces différents Points. CH. XII. §. 209.

209. Pour calculer le raïon de courbure, on ſuppoſera d'abord le Point m à une diſtance finie de M. En prolongeant pm juſqu'à-ce qu'elle rencontre en i la circonférence Mmh, on aura [EUCL. III. 36] le rectangle ſous mO & Oi égal au quarré de MO. Donc $Oi = \frac{MO^2}{mO}$. Mais $MO^2 = Mn^2 + nO^2 = zz + BBzz$, & $mO = Cz^2 + Dz^3$ &c. Donc $Oi = \frac{zz + BBzz}{Czz + Dz^3, \&c} = \frac{1 + BB}{C + Dz, \&c}$.

Maintenant, ſi on ſuppoſe que le Point m vient coïncider avec M, l'abſciſſe z [Pp] deviendra zéro, & l'expreſſion $\frac{1 + BB}{C + Dz, \&c}$ de Oi [qui dans ce cas eſt MI] deviendra $\frac{1 + BB}{C}$. Ainſi, MIH étant le Cercle de même courbure que la Courbe Mμm au Point M, la chorde MI eſt égale à $\frac{1 + BB}{C}$; ce qui ſuffit pour déterminer le diamétre MH, & par conſéquent auſſi le centre K de courbure; ſçavoir, èn menant par I la Droite IH parallèle aux abſciſſes, & qui coupe en H la Droite MH perpendiculaire à la Courbe.

L'on peut auſſi, ſi l'on veut, calculer le diamétre MH, en conſidérant que les triangles MnO, MIH ſont ſemblables, tous les côtés de l'un étant perpendiculaires à tous les côtés de l'autre. On aura donc Mn [z] : MO [$z\sqrt{(1 + BB)}$] = MI [$\frac{1 + BB}{C}$] : MH [$\frac{(1 + BB)\sqrt{(1 + BB)}}{C}$],

diamétre

CH. XII. §. 109. diamétre de courbure. Donc le raïon de courbure MK est $\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}$, & le centre de courbure K est déterminé, puisqu'il est sur la droite MH perpendiculaire à la Courbe, & à la distance donnée MK du Point M. PLANCHE XXIV.

Exemple I. On propose l'éq : $yy - ax - \frac{b}{c}xx = 0$, qui représente l'Hyperbole, si b est positive, ou l'Ellipse, si b est négative [§. 154]. Qu'on substitue, dans cette équation, u à y & $x+z$ à x, on aura la Transformée $uu - ax - az - \frac{b}{c}xx - 2\frac{b}{c}xz - \frac{b}{c}zz = 0$. Si on cherche la valeur d'u en z par une Série de cette forme $u = A + Bz + Czz$, *&c.* on trouvera $A = y$, $B = \frac{ac + 2bx}{2cy}$, $C = \frac{aacc + 4abcx + 4bbxx - 4bcyy}{8ccy^3}$, *&c.* Donc la Droite MI, dont l'expression est $\frac{1+BB}{C}$, est ici égale à $-2\frac{aacc + 4abcx + 4bbxx + 4ccyy}{aacc + 4abcx + 4bbxx - 4bcyy}y$, qui se réduit [en mettant yy pour $ax + \frac{b}{c}xx$, c'est-à-dire, $4bcyy$ pour $4abcx + 4bbxx$] à $-2\frac{aacc + 4(bc+cc)yy}{aacc}y = -2y - 8\frac{b+c}{aac}y^3$. Le signe négatif montre que cette Droite MI doit être prise sur l'ordonnée MP, au lieu que dans la Proposition générale on la supposoit prise sur son prolongement. Fig. 185. Fig. 186.

Le raïon de courbure MK, qui est $= \frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}$,

sera

PLANCHE XXIV. sera $-\frac{(aacc+4(bc+cc)yy)\sqrt{(aacc+4(bc+cc)yy)}}{2aac^3}$, grandeur négative, parce que la Courbe, qu'on avoit supposé, dans la Proposition générale, tourner sa convexité vers l'Axe des abscisses, tourne dans cet Exemple sa concavité vers cet Axe. CH. XII. §. 209.

On peut donc comparer la courbure de ces Courbes dans leurs différents Points. Ainsi à l'Origine, où $y=0$, le Raïon de courbure est $-\frac{aacc\sqrt{aacc}}{2aac^3}=-\frac{1}{2}a$: à l'extrémité de l'ordonnée $\frac{1}{2}a$, il est $-\frac{aa(2cc+bc)\sqrt{(aa(2cc+bc))}}{2aac^3}$ $=-\frac{(2c+b)\sqrt{(2c+b)}}{2c\sqrt{c}}a$, grandeur, qui sera imaginaire dans l'Ellipse, où b est négative, si $b>2c$. Aussi voit-on, par le calcul, que l'ordonnée $\frac{1}{2}a$ n'a que des abscisses imaginaires quand $b>c$, &, à plus forte raison, quand $b>2c$. Mais posons que $b<c$. Alors la courbure à l'Origine est à la courbure du Point qui est à l'extrémité de l'ordonnée $\frac{1}{2}a$, comme $\frac{(2c+b)\sqrt{(2c+b)}}{2c\sqrt{c}}a$ est à $\frac{1}{2}a$, ou comme $(2c+b)\sqrt{(2c+b)}$ à $c\sqrt{c}$.

Exemple II. L'éq: $y=ax^b$, qui exprime en général toutes les Paraboles & les Hyperboles [§. 128], se transforme, par la substitution de u, ou $A+Bz+Cz^2+Dz^3$ *&c*, pour y & de $x+z$ pour x, en $A+Bz+Czz+Dz^3$ *&c* $=ax^b+bax^{b-1}z+\frac{b.b-1}{1.\ 2}ax^{b-2}z^2+\frac{b.b-1.b-2}{1.\ 2.\ 3}ax^{b-3}z^3$, *&c*; ce qui donne, sans calcul, $A=ax^b=y$, $B=bax^{b-1}$, $C=\frac{b.b-1}{1.\ 2}ax^{b-2}$, *&c*.

CH. XII. §. 209. *&c.* Donc $= MI \left[\frac{1+BB}{C} = \right] \frac{1+bbaax^{2b-2}}{\frac{b.\,b-1}{1.\,2}ax^{b-2}} =$ PLANCHE XXIV.

$\frac{xx+bbaax^{2b}}{\frac{bb-b}{2}ax^{b}}$, & le raïon de courbure $MK =$

$$\left[\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C} = \right] \frac{(1+bbaax^{2b-2})\sqrt{(1+bbaax^{2b-2})}}{(bb-b)ax^{b-2}}.$$

Suppoſons qu'on ne cherche la courbure qu'à l'Origine, où $x=0$; il y a pluſieurs Cas à diſtinguer *. L'expoſant b peut être poſitif, ou négatif. S'il eſt négatif, la Courbe eſt une Hyperbole : s'il eſt poſitif, c'eſt une Parabole. Et dans ce dernier Cas, b eſt plus grand, égal, ou plus petit que l'unité.

1. Quand $b > 1$, l'expoſant $2b-2$ eſt poſitif. Donc la ſuppoſition de x infiniment petite rend $bbaax^{2b-2}$ infiniment petite ou zéro ; le numérateur de la fraction $\frac{(1+bbaax^{2b-2})\sqrt{(1+bbaax^{2b-2})}}{(bb-b)ax^{b-2}}$ ſe réduit à $1\sqrt{1}=1$,

& la fraction elle-même revient à $\frac{1}{(bb-b)ax^{b-2}} = \frac{x^{2-b}}{(bb-b)a}$,

qui eſt toujours poſitive. Auſſi la Parabole tourne-t-elle ſa convexité vers l'Axe des abſciſſes [§. 127].

Mais, x étant toujours infiniment petite, x^{2-b} eſt infiniment petite, finie, ou infinie, ſelon que $2-b$ eſt poſitif, nul, ou négatif, [§. 79]; c'eſt-à-dire, ſelon que b eſt plus petit, égal, ou plus grand que 2. Donc le raïon de courbure, à l'Origine de la Parabole, lequel eſt

* *Anal. des Infin. petits.* §. 87. 88.

désigné par la fraction $\frac{x^{2-b}}{(bb-b)a}$, est infiniment petit, si $b < 2$; fini, si $b = 2$; infini, si $b > 2$: & la courbure étant en raison inverse de son raïon [§. 207], est infinie, finie, ou infiniment petite, suivant que $b < 2$, ou $= 2$, ou > 2.

2. Quand $b = 1$, l'éq: $y = ax^b$ ne représente qu'une Droite, dont la courbure est infiniment petite, ou plutôt nulle. Aussi trouve-t-on le raïon de courbure infini; le dénominateur de la fraction qui exprime sa valeur, étant un multiple de $[bb - b = 1 - 1 =]\,o$.

3. Quand $b < 1$, mais pourtant positif, l'exposant $2b - 2$ est négatif. On peut reduire l'expression $\frac{(1 + bbaax^{2b-2})\sqrt{(1 + bbaax^{2b-2})}}{(bb-b)ax^{b-2}}$ du raïon de courbure à $\frac{(x^{2-2b} + bbaa)\sqrt{(x^{2-2b} + bbaa)}}{(bb-b)ax^{1-2b}}$, en multipliant les deux termes de la fraction par $x^{2-2b}\sqrt{x^{2-2b}}$ $= x^{3-3b}$. Donc le raïon de courbure à l'Origine, qui se trouve en supposant $x = o$, sera $\frac{bbaa\sqrt{bbaa}}{(bb-b)ax^{1-2b}}$ $= \frac{bbaa}{(b-1)x^{1-2b}} = \frac{bbaax^{2b-1}}{b-1}$, grandeur négative, puisque $b < 1$. Et cela doit être ainsi, puisque ces Paraboles sont concaves vers l'Axe des abscisses [§. 127].

Ce raïon est infini, fini, ou infiniment petit, selon que x^{2b-1} est infinie, finie, ou infiniment petite, c'est-à-dire, selon que b est $< \frac{1}{2}$, $= \frac{1}{2}$, ou $> \frac{1}{2}$. Ce qui s'accorde

Ch. XII. §. 209. corde avec ce qu'on a vu au §. 127, que les Paraboles concaves vers l'Axe des abscisses sont les mêmes que celles qui sont convexes vers cet Axe, qu'elles sont seulement dans une situation renversée ; ou, ce qui est la même chose, que les Paraboles dont l'équation est $y = ax^b$ sont les mêmes que celles dont l'équation est $y = ax^{\frac{1}{b}}$, en prenant pour les abscisses des unes les ordonnées des autres, & réciproquement. Planche XXIV.

4. Enfin si b est négatif, l'éq : $y = ax^{-b}$ représente les Hyperboles, dont le raïon de courbure s'exprime par la fraction $\frac{(x^{2+2b} + bbaa)\sqrt{(x^{2+2b} + bbaa)}}{(bb+b)\,ax^{1+2b}}$ toujours positive, parce que toutes les Hyperboles tournent leur convexité vers l'Axe des abscisses.

210. Ces deux Exemples suffisent pour faire voir la maniére de mesurer en un Point donné la courbure d'une Courbe donnée. Mais nous ne devons pas quitter ce sujet, sans dire un mot de diverses Questions qu'on peut proposer sur cette matiére.

1. On peut demander, par ex. En quel Point une Courbe donnée a une courbure donnée ? Cette courbure ne peut être donnée que par le moyen du Cercle qui a précisément ce dégré de courbure. Et ce Cercle est donné par son raïon. On égalera donc au raïon donné l'expression générale du raïon de courbure de la Courbe proposée; & cette équation, combinée, s'il le faut, avec celle de la Courbe, déterminera le Point cherché.

Ainsi, si l'on demandoit le Point de l'Hyperbole ou de l'Ellipse, représentée par l'éq : $yy - ax - \frac{b}{c}xx = 0$ [§.

 préc.

PLANCHE XXIV. préc. *Ex. I*], dont la courbure eſt la même que celle du Cercle décrit avec un raïon r: On égalera à r l'expreſſion générale du Raïon de courbure de ces Courbes, qui CH. XII. §. 210.

eſt $-\frac{(aacc + 4(bc+cc)yy)\sqrt{(aacc + 4(bc+cc)yy)}}{2aac^3}$, &

on aura $-2aac^3r = (aacc + 4(bc+cc)yy)\sqrt{(aacc + 4(bc+cc)yy)} = (aacc + 4(bc+cc)yy)^{3:2}$: ce qui, en quarrant & extraïant la racine cubique, donne $acc\sqrt[3]{4arr} = aacc + 4(bc+cc)yy$. Donc $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac(-a+\sqrt[3]{4arr})}{b+c}}$.

Cette grandeur devient imaginaire, 1°. quand $-a+\sqrt[3]{4arr}$ eſt négative, [c'eſt-à-dire, quand $r < \frac{1}{2}a$] & $b+c$ poſitive, [c'eſt-à-dire, quand b eſt poſitive, ou même négative, mais $< c$]. Ainſi & l'Hyperbole, & l'Ellipſe dans l'équation de laquelle $b < c$, n'ont nulle part une courbure moindre que celle du Cercle dont le raïon eſt $\frac{1}{2}a$.

2°. quand $-a+\sqrt[3]{4arr}$ eſt poſitive, & $b+c$ négative, c'eſt-à-dire, quand b négative eſt $> c$, & quand $r > \frac{1}{2}a$. Ainſi l'Ellipſe, dans l'équation de laquelle $b > c$, n'a nulle part une courbure plus grande que celle du Cercle qui a pour raïon $\frac{1}{2}a$.

211. II. On peut demander, en quels Points d'une Courbe ſa courbure eſt infinie? Ce ſera aux Points où le raïon de courbure eſt infiniment petit ou nul. On égalera donc à zéro l'expreſſion générale du raïon de courbure de la Courbe propoſée, & par cette équation, combinée, s'il le faut, avec celle de la Courbe, on déterminera les Points où la courbure eſt infinie, c'eſt-à-dire, plus grande que celle d'aucun Cercle donné. Telle eſt à l'Origine la courbure de toutes les Paraboles exprimées par

CH. XII §. 211. par l'éq : $y = ax^h$, lorsque b tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$ [§. 209. *Ex. II.* n°. 1 & 3]. PLANCHE XXIV.

212. III. On peut aussi demander en quels Points une Courbe a une courbure nulle, ou infiniment petite? Telle est à l'Origine la courbure des Paraboles représentées par l'éq : $y = ax^h$, lorsque b est > 2, ou $< \frac{1}{2}$. [§. 209. *Ex. II*]. Mais en général, si une Courbe a quelques Points où sa courbure soit infiniment petite, son raïon de courbure y doit être infini. Ainsi son expression générale doit être une fraction, dont le dénominateur puisse être égalé à zéro, sans contradiction. Il faut donc que l'une des variables x, y entre dans ce dénominateur. Et il faut de plus que la supposition qui le rend égal à zéro n'anéantisse pas le numérateur.

La formule générale $\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}$ du raïon de courbure fait voir qu'il ne peut être infini, que dans les Points où C est zéro, c'est-à-dire, dans les Points d'Inflexion ou de Serpentement [§. 204]. Mais cela n'est pas réciproque, & il y a des Points d'Inflexion, où la courbure, loin d'être infiniment petite, est infiniment grande. Telle est l'Origine des Paraboles, dans l'éq : $y = ax^h$ desquelles b est une fraction de numérateur & de dénominateur impair, laquelle tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$ [§. 209. *Ex. II*].

213. IV. On peut demander quel est le Point d'une Courbe, où sa courbure est la plus grande, ou la plus petite? Pour le trouver, on cherchera par la Méthode *de Maximis & Minimis*, en quel Point le raïon de courbure est le plus petit ou le plus grand [§. 197].

Prenons pour exemple les Paraboles, dont l'équation générale est $y = ax^h$ [b étant positif]. Le raïon de cour-

PLANCHE XXIV. courbure eſt $\frac{(1+hhaax^{2b-2})\sqrt{(1+hhaax^{2b-2})}}{h(h-1)ax^{b-2}} = \frac{(1+hhaax^{2b-2})^{3:2}}{h(h-1)ax^{b-2}}$. Soit ce raïon apellé r. On demande quelle eſt la valeur d'x qui rend r un *Minimum* : car il eſt bien clair, par la nature des Paraboles, qu'il n'y a point de *Maximum*, puiſque leur courbure va en diminuant à l'infini, dès qu'une fois x a paſſé certain terme. On a donc l'éq : $(1+hhaax^{2b-2})^{3:2} = h(h-1)ax^{b-2}r$, ou quarrant, $1+3hhaax^{2b-2}+3h^4a^4x^{4b-4}+h^6a^6x^{6b-6} = hh(h-1)^2aax^{2b-4}rr$, qui repréſente une Courbe, dont x eſt l'abſciſſe, & r l'ordonnée. Il s'agit de trouver l'abſciſſe qui a la plus petite ordonnée. Pour cela, on cherchera le prémier Rang de la Transformée qui réſulte de la ſubſtitution de $x+z$ à x, & de $r+u$ à r. Ce Rang eſt $+(-2hh(h-1)^2aax^{2b-4}r)u+((6b-6)hhaax^{2b-3}+(12b-12)h^4a^4x^{4b-5}+(6b-6)h^6a^6x^{6b-7}-(2b-4)hh(h-1)^2aax^{2b-5}rr)z$. On égalera à zéro le coëfficient de z & on aura $rr = \frac{(6b-6)hhaax^{2b-3}(1+hhaax^{2b-2})^2}{(2b-4)hh(h-1)^2aax^{2b-5}} = \frac{(3b-3)xx(1+hhaax^{2b-2})^2}{(b-2)(b-1)^2}$. D'un autre côté, l'éq : $(1+hhaax^{2b-2})^{3:2} = h(h-1)ax^{b-2}r$, montre que $rr = \frac{(1+hhaax^{2b-2})^3}{hh(b-1)^2aax^{2b-4}}$: valeur qui, comparée avec

CH. XII. §. 213.

 avec la précédente, donne $\frac{(1+bbaax^{2b-2})^3}{bb(b-1)^2aax^{2b-4}} = \frac{(3b-3)xx(1+bbaax^{2b-2})^2}{(b-2)(b-1)^2}$ ou $\frac{1+bbaax^{2b-2}}{bbaax^{2b-4}} = \frac{(3b-3)xx}{b-2}$, d'où l'on tire $x^{2b-2} = \frac{b-2}{(2b-1)bbaa}$, ce qui détermine la valeur d'x.

L'exposant $2b-2$ d'x, dans cette équation, étant un nombre pair, il en résulte pour x deux valeurs égales, mais l'une positive, l'autre négative; ce qui convient à la forme des Paraboles, qui ont des Branches semblables de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Ces valeurs d'x sont imaginaires, quand b tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$, parce qu'alors le numérateur $b-2$ est négatif, & le dénominateur $2b-1$ positif, ce qui rend la fraction $\frac{b-2}{(2b-1)bbaa}$ négative, & sa racine du dégré pair $2b-2$, qui est la valeur d'x, imaginaire. Mais ces valeurs d'x sont réelles quand $b > 2$, ou $b < \frac{1}{2}$, parce qu'alors la fraction est positive, ses deux termes étant, ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs. Et cela s'accorde très bien avec ce qu'on a vu [§. 209. *Ex. II*, & §. 212], que dans ce dernier Cas, le raïon de courbure est infini à l'Origine. Car comme il l'est aussi à l'extrémité de la Courbe qui est infiniment éloignée, il faut qu'il y ait entre deux un Point de la Courbe où le raïon de courbure est un *Minimum*.

Si on suppose b négatif, ce qui détermine l'éq : $y = ax^{-b}$ à représenter toutes les Hyperboles; l'expression du raïon de courbure est $\frac{(x^{2+2b}+bbaa)^{3:2}}{b(b+1)ax^{1+2b}}$, [§. 209. *Ex. II. n°.4*];

PLANCHE XXIV. *II. n°.* 4], lequel eſt un *Minimum*, quand $x^{2+2b} = \frac{1+2b}{2+b} bbaa$. La racine de cette équation eſt toujours réelle, parce que la fraction $\frac{1+2b}{2+b} bbaa$ eſt toujours poſitive. La Figure des Hyperboles fait voir auſſi que leur courbure diminuë de part & d'autre, à meſure qu'elles s'aprochent de leurs Aſymptotes. Elles ont donc un Point où leur courbure eſt la plus grande & le raion de courbure un *Minimum*. CH. XII. §. 213.

214. CE QU'IL importe le plus de remarquer ici, où il s'agit des Points ſinguliers d'une Courbe, c'eſt que la courbure des Points ordinaires étant finie, il y a des Points qui ont une courbure infinie, & d'autres une courbure infiniment petite. Le raion de courbure des prémiers eſt infiniment petit, celui des derniers infini; car il eſt toujours en raiſon inverſe de la courbure. On en a vû [§. 209. *Ex. II*] des Exemples dans les Paraboles de différents ordres repréſentées par l'éq: $y = ax^h$. Celles qu'exprime cette équation quand $h = 2$ ou $\frac{1}{2}$ [car c'eſt la même, mais dans une poſition renverſée,] ont partout une courbure finie, & à l'Origine cette courbure eſt la même que celle d'un Cercle dont le diamétre eſt $\frac{1}{a}$. Mais ſi h tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$ [pourvu qu'il ne ſoit pas égal à l'unité, en quel cas l'éq: $y = ax$ ne déſigne plus une Parabole, mais une Droite] la courbure à l'Origine eſt infinie. Au contraire, ſi h eſt > 2 ou $< \frac{1}{2}$, la courbure à l'Origine eſt infiniment petite.

Ces courbures infinies & infiniment petites varient entr'elles par des dégrés infinis. Si on ſuppoſe h ſucceſſivement égal à 2, 3, 4, 5, &c. on aura une ſuite de Paraboles,

CH. XII. §. 214. boles, dont la prémiére a, à l'Origine, une courbure finie, la seconde une courbure infiniment petite, la troisiéme une courbure infiniment plus petite que la seconde, la quatriéme une courbure infiniment plus petite que la troisiéme, & ainsi de suite à l'infini. Car si l'on suppose que AM est la Parabole désignée par l'éq: $y = ax^h$, & Am la Parabole exprimée par l'éq: $y = bx^h$, desorte que l'abscisse AP étant x, les ordonnées PM, Pm soient ax^h, bx^h; ces ordonnées seront entr'elles comme a à b. Donc, b étant supposé plus petit que a, Pm est plus petite que PM; la Parabole Am, dont le Paramétre b est plus petit, embrasse la Parabole AM, dont le Paramétre a est plus grand; elle est moins courbe. On peut donc, en diminuant le Paramétre à l'infini, avoir une suite de Paraboles, dont la courbure, à l'Origine, ira toujours en diminuant, & cela sans changer l'exposant h. Mais si l'on passe à un plus grand exposant, on aura une autre suite de Paraboles, dont la plus courbe, à l'Origine, sera moins courbe que celle de la précédente suite, qui a la plus petite courbure. Car si AQ est une Parabole dont l'ordonnée PQ soit cx^{h+1}, on aura $Pm : PQ = bx^h : cx^{h+1} = b : cx = \frac{b}{c} : x$. Quelque petit que soit b & quelque grand que soit c, la fraction $\frac{b}{c}$ sera finie, & on pourra prendre l'abscisse AP [x] plus petite que $\frac{b}{c}$. Alors PQ sera plus petite que Pm. C'est-à-dire, que la Parabole AQ dont l'exposant est $h+1$, embrasse la Parabole Am dont l'exposant est h, quelque petit que soit le Paramétre b de cette derniére, & quelque grand que soit le Paramétre c de la prémiére.

PLANCHE XXIV. Fig. 187.

Ainſi, chaque expoſant donne une ſuite infinie de Paraboles, dont les courbures, à l'Origine, vont en diminuant à l'infini, à meſure qu'on en diminuë le Paramétre. Et, en paſſant d'un expoſant à l'autre, la courbure change infiniment. Bien plus, entre les expoſants conſécutifs par ex. 2, 3, on peut en interpoſer une infinité ... $2\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$.... qui donneront de nouvelles ſuites de Paraboles, dont les courbures varient, dans chaque expoſant, ſelon la variation du Paramétre, & infiniment d'un expoſant à l'autre. Et entre ces expoſants interpoſés, par ex. $2\frac{1}{3}$ & $2\frac{1}{2}$, on en peut interpoſer de nouveau une infinité d'autres ; de ſorte que toutes ces courbures, infiniment petites, ont des varietés infinies.

Il en eſt de même des courbures infinies qu'on voit à l'Origine des Paraboles dont l'expoſant *b* tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$, ou ſimplement 2 & 1 ; car celles dont l'expoſant tombe entre 1 & $\frac{1}{2}$ ſont les mêmes que celles dont l'expoſant tombe entre 2 & 1 [§. 127]. Si on ſuppoſe *b* égal ſucceſſivement à 2 ou $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. on aura des ſuites de Paraboles de différents expoſants, dont celles de la prémiére ſuite ont toutes, à l'Origine, une courbure finie, mais qui augmente à l'infini à proportion de leurs Paramétres; ce qui fait que ces courbures varient ſelon toutes ſortes de raiſons données. Celles de la ſeconde ſuite ont, à l'Origine, des courbures infiniment plus grandes que celles de la prémiére ſuite; mais quoiqu'infinies, on peut, en variant le Paramétre, les faire varier ſelon toutes ſortes de raiſons données ; enſorte néantmoins que la Parabole de la ſeconde ſuite qui eſt la moins courbe, l'eſt plus que la Parabole de la prémiére ſuite qui eſt la plus courbe. Il y a donc ici, comme dans les courbures infiniment petites, des ſuites de Paraboles dont les courbures, dans une même ſuite, varient par tous les dégrés imaginables, en variant le Paramétre ; & dont la variation

devient

Ch. XII. §. 214. devient tout à coup infinie, si on passe d'un exposant à l'autre, en conservant le même Paramétre. Et entre ces suites, on peut en interposer une infinité d'autres, & encore d'autres entre celles-ci, & ainsi de suite à l'infini. Planche XXIV.

215. On se fera donc une idée plus exacte & plus complette de la courbure des Courbes, en regardant chacun de leurs Points comme le sommet d'une Parabole. Cette maniére de les considérer suit naturellement, de ce qu'en portant l'Origine sur un Point quelconque de la Courbe, ce qui rend son abscisse x & son ordonnée y infiniment petite, la Série ascendante $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \&c.$ qui donne y en x, se réduit, par l'évanouissement de tous les termes qui suivent le prémier [§. 102], à $y = Ax^h$, qui est l'équation d'une Parabole, [§. 126]. Car l'exposant h ne peut être que positif; puisque s'il étoit zéro, ou négatif, l'ordonnée primitive y ou Ax^h seroit ou finie ou infinie, x étant infiniment petite. La Branche de Courbe représentée par la Série $y = Ax^h + Bx^i + \&c.$ ne passeroit donc pas par l'Origine: ce qui est contraire à la supposition.

L'exposant h est positif, lorsque la déterminatrice, qui donne le terme Ax^h, coupe les deux Bandes extérieures du Triangle analytique [§. 96. 2°.]. Ainsi après avoir porté l'Origine [§. 29] sur le Point de la Courbe dont on veut chercher la courbure & la nature, on placera l'équation rélative à cette Origine sur le Triangle analytique, & on ménera toutes les déterminatrices inférieures qui coupent les deux Bandes extérieures du Triangle. Le nombre des équations, semblables à $y = Ax^h$, que donnent ces déterminatrices, est le nombre des Branches, réelles ou imaginaires, qui passent par l'Origine. Conséquemment, il exprime le dégré de la multiplicité du Point situé à l'Origine.

PLANCHE XXIV. 216. L'éq : $y = Ax^h$ de chaque Branche déterminera sa direction, c'est-à-dire, celle de la Tangente à l'Origine. CH. XII. §. 216.

Si $h > 1$, ce qui arrive quand la déterminatrice retranche une plus grande portion de la Bande sans y que de la Bande sans x, [§. 96. 2°]; la Branche touche à l'Origine l'Axe des abscisses. Car quand $h > 1$, x^h, & Ax^h, soit y, est infiniment plus petite que x, celle-ci étant infiniment petite [§. 79]. Donc la Courbe, à l'Origine, s'éloigne infiniment moins de l'Axe des abscisses que de celui des ordonnées : elle est comme collée sur l'Axe des abscisses, qui est sa Tangente.

Si $h < 1$, ce qui a lieu quand la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande sans y que de la Bande sans x [§. 96. 2°]; la Branche touche, à l'Origine, l'Axe des ordonnées. Car $h < 1$ rend x infiniment plus petite que x^h, ou Ax^h, soit y [§. 79]. La Courbe, à l'Origine, s'éloigne donc infiniment moins de l'Axe des ordonnées que de celui des abscisses : elle s'applique, pour ainsi dire, sur le prémier, & le touche.

Mais quand $h = 1$, c'est-à-dire, quand la déterminatrice couchée sur le Rang inférieur retranche des portions égales des deux Bandes extérieures du Triangle ; le raport de x infiniment petite à y infiniment petite est un raport fini de 1 à A, la Courbe partage l'angle des coordonnées, sa Tangente est oblique aux ordonnées & aux abscisses, & l'équation $y = Ax$ détermine sa position [§. 183].

217. Si l'exposant h est différent de l'unité, le prémier terme de la Série $Ax^h + Bx + \&c.$ fera connoitre quelle est la courbure de la Branche à l'Origine. Elle est finie, quand $h = 2$ ou $\frac{1}{2}$: Elle est infinie, quand h tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$: Elle est infiniment petite, quand h est, ou plus grande que 2, ou plus petite que $\frac{1}{2}$ [§. 209. *Ex. II*].

Dans

Ch. XII. §. 217. Dans ce même cas, le prémier terme Ax^h fait aussi connoitre la position des deux parties de la Branche deçà & delà de l'Origine. Mais pour cela, il vaut encore mieux prendre l'équation que donne la déterminatrice, sous la forme $y^l = \alpha x^k$ qu'elle présente d'abord, que sous la forme $y = Ax^h$, à laquelle elle se réduit, en faisant $A = \alpha^{1:l}$, & $h = \frac{k}{l}$. On a vû [§. 128] que cette équation $y^l = \alpha x^k$ représente toutes les différentes Paraboles, dont les deux Branches ont diverses situations, 1°. suivant la nature des exposants k, l, qui sont pairs ou impairs; 2°. suivant la nature du Paramétre α, qui peut être positif ou négatif. La Table que présente la *Fig.* 188, rapelle ce qui a été dit dans ce §. 128. Elle présente quatre dispositions différentes, tirées de la parité ou imparité de k & l, lesquelles se subdivisent chacune en quatre autres, selon que k est plus grand ou plus petit que l, & suivant que α est positif ou négatif. Planche XXIV.

La prémiére disposition, qui est celle des deux exposants impairs, donne tous les Points d'Inflexion visible, d'un dégré plus ou moins élevé, & en général d'un dégré égal à la différence de k & l diminuée d'une unité. Car l'éq: $y = \alpha x^h$ étant mise sur le Triangle analytique, il manquera autant de Rangs, entre le Rang où est y^l & celui où est αx^k, qu'il y a d'unités, moins une, dans la différence de k & l. Donc, cette différence diminuée d'une unité exprime le dégré de l'Inflexion du Point qui est à l'Origine [§. 186]. Mais, k & l étant tous deux impairs, leurs différence est paire, & diminuée de l'unité elle devient impaire. L'Inflexion est donc visible [§. 166].

La seconde disposition, qui est celle où le plus grand exposant est pair & le plus petit impair, donne les Points ordinaires, & les Points de Serpentement ou d'Inflexion invisi-

 invisible, de tous les dégrés. Car l'Inflexion s'il y en a une, sera, comme dans la disposition précédente, d'un dégré qui s'exprime par la différence de k & l diminuée de l'unité. Ainsi, k & l étant l'un pair & l'autre impair, leur différence, qui est impaire, diminuée d'une unité sera un nombre pair. L'Inflexion est donc invisible [§. 166]: c'est un Serpentement.

La troisiéme disposition est celle où le plus grand exposant est impair, & le plus petit pair. Elle donne des Points de Rebroussement [§. 206] de tous les dégrés, selon que le plus petit exposant est 2, 4, 6, 8, 10, ou &c. Le Rebroussement du prémier dégré est un Point double, celui du second dégré un Point quadruple, &c: le Rang le plus bas étant le second, ou le quatriéme, &c. [§. 171]. Les Branches, qui viennent se terminer à ces Points de Rebroussement, y peuvent subir des Inflexions, mais invisibles, parce que leur dégré, [qui est toujours la différence de k & l diminuée de l'unité] est un nombre pair, & que les Inflexions d'un dégré pair sont invisibles. [§. 166].

La quatriéme disposition, qui est celle des deux exposants pairs, donne une équation réductible, & qui peut être regardée comme la réduplication de l'une des trois précédentes. Quand a est positif, le Point que donne cette disposition est comme le Point de contact de deux Paraboles adossées l'une contre l'autre. Mais quand a est négatif, les Paraboles sont imaginaires, & le Point qui répond à cette supposition est un Point isolé, invisible, sans courbure; lequel pourtant apartient à la Courbe, parce que ses coordonnées ont entr'elles le raport qu'exprime l'équation de la Courbe.

218. Mais, lorsque $b = 1$, le prémier terme Ax de la Série ne détermine que la direction de la Branche à son

CH. XII. §. 118. son passage par l'Origine, ou la position de sa Tangente. A proprement parler, l'équation $y = Ax$ est l'équation de la Droite qui touche la Courbe à l'Origine, & qui toucheroit aussi toute autre Courbe tracée par l'Origine, & ayant en ce point-là la même direction. Dans cette équation, x & y n'étant que des infiniment petits du prémier ordre, elle n'exprime que leur raport; mais elle ne manifeste pas les différences infiniment plus petites qu'il y a de Courbe à Courbe, & qui ne deviennent sensibles que quand on descend à des infiniment petits de quelque ordre inférieur, comme on le fait quand $h >$ ou < 1. PLANCHE XXIV.

Ainsi pour connoitre, en ce Cas-là, la courbure de la Courbe; pour choisir entre toutes les Paraboles, qui peuvent avoir la même Tangente, celle qui *s'identifie*, pour ainsi dire, avec la Courbe, & que les Géométres nomment sa *Parabole osculatrice*, il faut, ou continuer la Série $y = Ax + \&c.$ & en chercher le second terme, ou prendre les abscisses sur la Tangente en conservant la position des ordonnées. Ces deux Méthodes reviennent presque au même.

On donne à l'Axe des abscisses une position quelconque, sans changer l'Origine ni l'Axe des ordonnées, en mettant dans l'équation de la Courbe pz pour x & $qz+u$ pour y [§. 25. III]. Soit AB l'Axe des abscisses x, AD celui des ordonnées y, AC la Tangente à l'Origine A. Cette Tangente est donnée par l'éq: $y = Ax$, que donne la déterminatrice qui traverse le Rang inférieur, ensorte que l'abscisse AB [1] de cette Droite AC porte l'ordonnée BC [A]. On veut raporter la Courbe AM aux coordonnées AQ [z], QM [u]. Les lettres $1:p:q$ exprimant le raport des côtés QA, AP, PQ du triangle APQ, & QA étant z, AP est pz & PQ, qz. Mais $x = AP = pz$ & PM [y] = PQ [qz] + QM [u]. Il faut donc substituer pz à x, & $qz+u$ à y. Les triangles Fig. 189.

PLANCHE XXIV. gles APQ, ABC étant semblables, la raison $p:q:1$ des côtés AP, PQ, QA du triangle APQ est la même que la raison des côtés AB[1]: BC[A]: CA[E] du triangle ABC. Ainsi $p = \frac{1}{E}$, & $q = \frac{q}{1} = \frac{A}{E}$. Après la substitution on écrira donc $\frac{1}{E}$ pour p & $\frac{A}{E}$ pour q; ou, conservant la lettre p pour désigner la fraction $\frac{1}{E}$, on écrira Ap au lieu de $q [= \frac{A}{E} = A \times \frac{1}{E} = Ap]$. CH. XII. §. 218.

La valeur de E [AC] dépend de l'angle ABC, ou APM, des coordonnées. Si G est le Sinus du complément de cet angle, 1 étant le Sinus total, E sera $= \sqrt{(AA \pm 2AG + 1)}$, le signe + ayant lieu, quand l'angle APM est obtus, & le signe —, quand il est aigu [§. 143]. Si APM est un angle droit, $G = 0$ & $E = \sqrt{(AA + 1)}$.

Le §. 30 donne la maniére de faire commodément la substitution de pz à x & de $qz + u$ à y. Et l'on démontre par la Remarque faite au §. 107, qu'autant de fois que l'éq: $y - Ax = 0$, ou $y - \frac{p}{q}x = 0$, soit $qy - px = 0$, divise un Rang quelconque de la Proposée, autant manque-t-il de termes au Rang homologue de la Transformée, du côté de la Bande sans y. Donc, puisque $y - Ax = 0$ est au moins une racine simple du Rang inférieur, il manquera au moins dans la Transformée le terme que ce Rang devroit avoir sur la Bande sans u. Il partira donc de ce Rang une déterminatrice oblique, qui donnera l'équation de la Parabole osculatrice de la Courbe à l'Origine.

Mais si cette racine, $y - Ax = 0$ est double, triple, ou multiple, du Rang inférieur; si elle divise aussi, une ou

CH. XII. §. 118. ou plusieurs fois, quelques-uns des Rangs immédiatement supérieurs; il manquera à la Transformée deux, trois, ou plusieurs termes du Rang inférieur, & un ou plusieurs termes des Rangs supérieurs. Par cet évanouissement, la déterminatrice inférieure prend une situation oblique, & donne l'équation de la Parabole osculatrice, d'un dégré plus ou moins élevé. PLANCHE XXIV.

On trouvera la même chose par la Méthode des Séries. Car l'ordonnée PM étant exprimée par une Série qui donne la valeur d'y en x, le prémier terme Ax exprime la partie PQ comprise entre l'Axe AP & la Tangente AC, dont il détermine par conséquent la position; & les termes suivans représentent la partie QM interceptée entre la Tangente & la Courbe. Mais AP [x] étant infiniment petite, tous les termes qui suivent Ax se réduisent au second terme de la Série. Donc ce terme donne l'expression de QM: ce qui suffit pour déterminer la position & la courbure de la Branche AM.

Mais si l'on veut exprimer la nature de AM, par une équation parabolique; il faudra prendre pour abscisse, non plus AP [x], mais AQ [$z = \frac{1}{p} x = Ex$]. On mettra donc, dans le second terme de la Série qui représente QM, au lieu de x sa valeur pz ou $\frac{1}{E} z$, & égalant ce terme ainsi transformé à une variable u, on aura l'équation parabolique qui exprime le raport des coordonnées AQ, QM, tout près d'un point quelconque A de la Courbe.

Exemple I. L'éq: $xx + yy - ax + by = 0$ représente la circonférence ADB, décrite, sur la chorde AB [b], du centre C éloigné de cette chorde de l'intervalle Fig. 190.

PLANCHE XXIV. CK $[\frac{1}{2}a]$. On demande la Parabole osculatrice au point A, où l'on a pris l'Origine ? CH. XII. §. 218.

La Série ascendante, par laquelle l'équation proposée donne la valeur d'y en x, est $y = \frac{a}{b}x - \frac{aa+bb}{b^3}x^2 -$ &c, dont le prémier terme $\frac{a}{b}x$ exprime la partie de l'ordonnée PQ comprise entre l'Axe AP & la Tangente AQ: le second terme $\frac{aa+bb}{b^3}xx$ marque la partie QM comprise entre la Tangente AQ & la circonférence AM, dans la supposition d'x infiniment petite. Ce terme est négatif, parce que de part & d'autre de A, la Courbe mAM tombe au-dessous de la Tangente tAT. Mais, sans avoir égard au signe, si on égale à u ce terme transformé par la substitution de $\frac{z}{E}$ à x, ou $\frac{zz}{EE} = \frac{bb}{aa+bb}zz$ à xx [car $E = \sqrt{(AA+1)}$, parce que l'angle des coordonnées est droit, & $\sqrt{(AA+1)} = \sqrt{(\frac{aa+bb}{bb})}$, parce que $A = \frac{a}{b}$, le prémier terme Ax de la Série étant $\frac{a}{b}x$], on aura $u = \frac{aa+bb}{b^3} \times \frac{bb}{aa+bb}zz = \frac{zz}{b}$ pour l'équation de la Parabole osculatrice du Cercle au point A. Où il est à remarquer que le paramétre b de cette Parabole, est la chorde ou ordonnée primitive AB.

On aura précisément la même chose par le Triangle analytique. Qu'on y place l'équation proposée $xx + yy - ax + by = 0$, elle n'aura qu'une déterminatrice inférieure, qui traverse le prémier Rang, & donne l'équation $-ax + by = 0$, ou $y = \frac{a}{b}x$. Donc $A = \frac{a}{b}$. Et si l'on sub-

stituë

Ch. XII.
§. 218.

PLANCHE XXIV.

$$\begin{array}{ccccc} & * & \circ & * & \\ — & * & — & * & — \\ & & \circ & & \end{array}$$

ſtituë pz à x & $qz+u$ à y, on aura l'équation $(pp+qq)zz+2quz+uu+(bq-ap)z+bu=0$, ou,

$$\frac{\frac{(pp+qq)zz+(-ap+bq)z}{\overset{0\quad 2}{}\qquad\overset{0\quad 1}{}}}{\frac{+2q\;uz+\quad bu}{\tfrac{1}{2}\qquad 0}}\quad +uu$$

mettant $Ap\left[=\frac{ap}{b}\right]$ pour q, $(1+\frac{aa}{bb})ppzz+2\frac{a}{b}puz+uu+(ap-ap)z+bu=0$, ſoit $\frac{aa+bb}{bb}ppzz+\frac{2a}{b}puz+uu+bu=0$. Cette Transformée, étant miſe ſur le Triangle anal. la caſe z reſte vuide & la déterminatrice in-

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ & * \quad \circ & \\ & \circ & \end{array}$$

férieure paſſant par les Caſes u & zz donne $bu+\frac{aa+bb}{bb}ppzz=0$, ſoit $u=-\frac{aa+bb}{b^3}ppzz=\frac{zz}{-b^3:(aa+bb)pp}$, qui eſt à la Parabole ordinaire [§. 123], mais dont le paramétre $-\frac{b^3}{(aa+bb)pp}$ eſt négatif, parce que ſes branches AM, Am, tombent du côté négatif de l'Axe tAT des abſciſſes. Ce paramétre, au reſte, ſe réduit à $-b$, en mettant pour pp ſa valeur $\frac{1}{EE}=\frac{bb}{aa+bb}$.

PLANCHE XXIV. Donc un Cercle ABD étant donné, & l'Origine A étant prise à volonté sur un Point de sa circonférence, on aura la Parabole osculatrice en ce Point-là, si on mène la Tangente AT, & une chorde quelconque AB. Car la Parabole décrite du sommet A, avec le paramétre AB, sur les Axes AT des abscisses & AB des ordonnées, est la Parabole demandée. CH. XII. §. 218.

Réciproquement, le paramétre d'une Parabole ordinaire mAM étant donné, on trouvera le Cercle osculateur, ou le Cercle de même courbure que la Parabole à l'Origine A, en prenant, sur l'Axe des ordonnées, AB égale au paramétre, & élevant BD perpendiculaire à AB, qui rencontre en D la droite AD perpendiculaire en A à l'Axe des abscisses tAT. Car AD est le diamétre du Cercle de même courbure.

En effet, le Cercle ABD de même courbure que la Parabole mAM au Point A, s'identifie, en quelque sorte, avec elle en ce Point: desorte que l'arc infiniment petit AM est commun au Cercle & à la Parabole. Qu'on mène par M l'ordonnée QMN, qui coupe la circonférence en M & en N. Et par la nature du Cercle, le quarré de la Tangente AQ est égal au rectangle sous QM & QN. Mais, par la nature de la Parabole [§. 223], le quarré de l'abscisse AQ est égal au rectangle sous l'ordonnée QM & sous le paramétre. Donc le paramétre est égal à QN, ou AB; puisque AM, étant un arc infiniment petit, QN & AB, qui sont infiniment proches l'une de l'autre, sont égales.

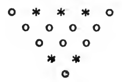
Ainsi, lors qu'on aura trouvé la Parabole osculatrice d'une Courbe en un Point quelconque, on aura le Cercle de même courbure, sans recourir aux Séries, par lesquelles nous l'avons trouvé au §. 208.

Mais ceci suppose que la Parabole osculatrice est une Parabole ordinaire, dont la courbure, à l'Origine, est finie.

Ch. XII. § 218. nie. Car si la courbure d'un Point de la Courbe, ou de sa Parabole osculatrice, est infinie ou infiniment petite, on ne sauroit trouver un Cercle de même courbure [§. 214]. Planche XXIV.

Exemple II. Soit proposée l'éq : $xy^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^3y - a^3y\sqrt{2} + a^3x = 0$, qui représente une Courbe, qui a quatre Branches hyperboliques, dont les Axes sont les Asymptotes [§. 138]. La Série ascendante, qui donne y en x, est $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4a^3}$, &c. Le prémier terme $\frac{x}{\sqrt{2}}$, qui détermine la position de la Tangente, donne $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, & par conséquent $E = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}G + 1)} = \sqrt{\frac{3 + 2G\sqrt{2}}{2}}$. Le second terme $\frac{x^4}{4a^3}$, égalé à u, après avoir mis $\frac{z}{E}$ pour x, donne, pour la Parabole osculatrice à l'Origine, l'éq : $(9 + 12G\sqrt{2} + 8GG)a^3u = z^4$, qui est du quatriéme dégré, & désigne que le Point de l'Origine est un Point de Serpentement [§. 168, III, ou §. 217] d'une courbure infiniment petite [§. 209. *Ex. II*]. Fig. 191.

Selon l'autre Méthode, l'opération se fait ainsi. L'éq : $xy^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^3y - a^3y\sqrt{2} + a^3x = 0$, mise sur le Tr : anal : a pour unique déterminatrice inférieure celle



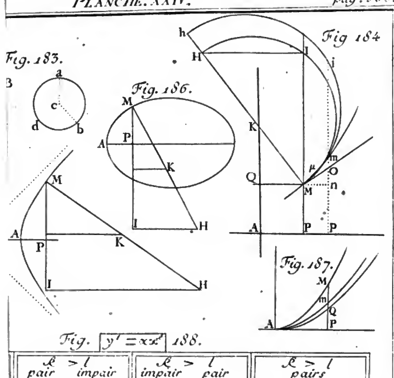
qui

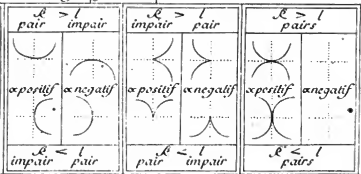
PLANCHE XXIV. qui traverse le prémier Rang, & donne l'équation $-a^3y\sqrt{2} + a^3x = 0$, ou $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$. En substituant pz à x, & $qz + u$ à y, l'équation proposée se transforme en $(pq^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}p^2q^2 + \frac{3}{2}p^3q)z^4 + (3pq^2 - 3p^2q\sqrt{2} + \frac{3}{2}p^3)uz^3 + (3pq - \frac{3}{\sqrt{2}}p^2)u^2z^2 + pu^3z + (-a^3q\sqrt{2} + a^3p)z - a^3u\sqrt{2} = 0$, ou, mettant $Ap [= \frac{p}{\sqrt{2}}]$ pour q, $\frac{p^4}{2\sqrt{2}}z^4 + pu^3z - a^3u\sqrt{2} = 0$. Cette Transformée étant mise sur le Triang: anal: on verra que la déterminatrice inférieure CH. XII. §. 218.

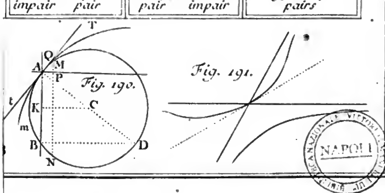
```
o * o o *
 o o o o
  o o o
   * o
    o
```

passe par les Cases u & z^4; & donne l'éq: $\frac{1}{2\sqrt{2}}p^4z^4 - a^3u\sqrt{2} = 0$, ou $u = \frac{p^4z^4}{4a^3} = [$ en mettant pour p sa valeur $\frac{1}{E} = \sqrt{\frac{2}{3 + 2G\sqrt{2}}}] = (9 + 12G\sqrt{2} + 8GG)a^3u = z^4$, comme par la Méthode des Séries.

219. MAIS lorsque le Point situé à l'Origine est un Point multiple, il peut fort bien arriver que pour connoitre sa nature il ne suffira pas de chercher le prémier & le second terme de la Série, qui représente une Branche passant par l'Origine. Les termes suivants y peuvent apporter de grandes modifications. Car le Point de l'Origine étant


Fig. 183.
a
c
d
b
B
Fig. 186.
M
P
A
K
I
H
Fig 184
h
H
I
j
K
Q
m
O
M
n
A
P
p
M
A
P
K
I
H
Fig. 187.
M
m
Q
A
P


Fig. $y^{l} = xx^{k}$ 188.
k > l
pair impair
x positif
x negatif
k < l
impair pair
k > l
impair pair
x positif
x negatif
k < l
pair impair
k > l
pairs
x positif
x negatif
k < l
pairs


T
Q
A
M
P
Fig. 190.
t
K
C
m
B
D
N
Fig. 191.

Ch. XII. §. 219. étant supposé multiple, l'équation qui donne le prémier terme de la Série, a plusieurs racines [§. 183]: elle peut donc avoir des racines égales, qui produisent des termes irréguliers [§. 109], lesquels peuvent faire que la Série, qui d'abord sembloit unique, se fourche & devienne multiple; ou bien qu'elle devienne imaginaire, soit entiérement, soit à demi [§. 104]. De sorte qu'une Branche, qui sembloit, à ne consulter que le prémier ou les deux prémiers termes de la Série, étendre un Rameau de part & d'autre de l'Origine, peut, à cause des termes suivants, en jetter deux ou plusieurs de part & d'autres, ou n'en jetter que d'un côté, ou devenir imaginaire. Il est donc nécessaire, pour avoir une idée complette d'un Point multiple d'une Courbe, d'avoir non-seulement le prémier ou second terme de toutes les Séries ascendantes que peut donner son équation, mais encore de continuer ces Séries jusqu'aux termes réguliers, auxquels quand on est parvenu, on n'a plus à craindre qu'une Branche, qui paroissoit simple, soit réellement multiple, ou disparoisse entiérement, ou d'un des côtés de l'Axe des ordonnées. Les Exemples qu'on va donner dans le Chapitre suivant, éclairciront assez ce qu'on vient de dire. Planche XXIV.



CHAPI-

CHAPITRE XIII.

Des différentes espéces de Points multiples dont peuvent être susceptibles les Courbes des six prémiers Ordres.

§. 220. *Des Points doubles.*

PLANCHE XXV. QUAND l'Origine est un Point double, le plus bas Rang de l'équation mise sur le Triangle analytique est le second Rang, $dyy + exy + fxx$. Ce Rang égalé à zéro donne une équation du second dégré, qui a deux racines.

I. Si elles sont imaginaires, les deux Séries qu'auroit pû donner la déterminatrice qui passe par le second Rang sont imaginaires. L'Origine est donc un *Point conjugué*, ou *isolé*, Point invisible, détaché du contour de la Courbe, & qui pourtant lui apartient, parce que ses coordonnées ont entr'elles la rélation exprimée par l'équation de la Courbe. Tel est le Pole de la Conchoïde, lorsqu'il n'y passe aucune Branche de cette Courbe. Voyez §. 174. *Ex. IV*, & ci-dessous *Ex. I. n°. 2*.

II. Si les racines de l'éq : $dyy + exy + fxx = 0$ sont réelles & inégales, qu'elles soient $y = Ax$ & $y = A'x$. Elles représentent deux Droites qui touchent la Courbe à l'Origine [§. 183], & les deux Séries $y = Ax + \&c$, $y = A'x + \&c.$ expriment deux Branches qui passent par l'Origine, & qui s'y croisent sous un angle fini, mesuré par celui que font leurs Tangentes. L'intersection de ces Branches fait le Point double, qu'on nomme par cette raison, *Point de*

Section

CH. XIII. §. 220. *Section*, ou *d'Interfection*, *Point de Croix*, & auffi *Nœud* [§. 10]. PLANCHE XXV.

Ce Point varie par les Inflexions & Serpentements de fes Branches. C'eft un *Nœud fimple*, quand fes Branches n'ont aucune Inflexion au point où elles fe coupent. Telles font les Branches de la Conchoïde, quand elles paffent par le Pole [§. 174. *Ex. IV.* Voyez auffi ci-deffous, *Ex. I. n°.* 3]. Dès le troifiéme Ordre les Courbes font fufceptibles de ce Nœud, où la Tangente n'eft cenfée rencontrer la Courbe que trois fois [§. 181].

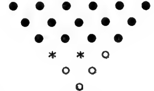
Si l'une des deux Branches, qui fe coupent, fubit une Inflexion au Point de Croix [comme §. 186. *Ex. VI*], on le nomme *Nœud avec une Inflexion.* Et fi cela arrive aux deux Branches, [§. 186. *Ex. V*] c'eft un *Nœud avec deux Inflexions.* Ce n'eft qu'au quatriéme Ordre que les Courbes commencent à être fufceptibles de ces Points-là, où la Tangente eft cenfée rencontrer quatre fois la Courbe [§. 181].

Si l'une des Branches *ferpente* au Point de fection, on l'apelle *Nœud avec un Serpentement*, & fi les deux Branches y ferpentent, *Nœud avec deux Serpentements*, ou enfin *Nœud avec Inflexion & Serpentement*, fi une des Branches ferpente & que l'autre foit infléchie au Point où elles fe croifent. On voit de-là les noms qu'on peut donner aux Nœuds, dont les Branches fubiffent au Point de fection des Inflexions ou des Serpentements de dégrés fupérieurs. Et quant à l'Ordre des Courbes fufceptibles de ces Points-là, on voit qu'il fera, au moins, $t + 3$, fi l'Inflexion [fous laquelle on comprend auffi le Serpentement] de la Branche, qui la fubit au plus haut dégré, eft du dégré t [§. 181].

Tout cela fe difcerne aifément, en examinant combien de Rangs, en remontant depuis le plus bas, font divifés

PLANCHE XXV. sans interruption par l'une ou l'autre des racines $y - Ax = 0$, $y - A'x = 0$ [§. 186]. CH. XIII. §. 210.

Ou bien, en cherchant le second terme des Séries $y = Ax + \&c.$ $y = A'x + \&c.$ On le trouve, en substituant à y d'abord $Ax + u$, & ensuite $A'x + u$, dans l'équation de la Courbe. Dans les transformées, le terme xx manque, parce que $y = Ax$, $y = A'x$ sont des racines de l'éq: $dyy + exy + fxx = 0$, mais le terme ux ne manque pas, parce que ce sont des racines simples [§. 107]. La déterminatrice, qui donne le terme u, partant de la Case ux, passera donc par la Case x^3, ou, si elle est vuide, par x^4, ou, si celle-ci est encore vuide, par x^5 &c. Elle donnera donc une équation telle que $u =$



Bx^2, ou $u = Bx^3$, ou $u = Bx^4$, &c. Si l'exposant de x, dans ce second terme, est 2; la Branche que représente cette Série ne subit aucune Inflexion. Si cet exposant est 3, ou un nombre impair; elle subit une Inflexion visible. Si c'est 4, ou un nombre pair plus grand que 2; la Branche serpente. Et le signe + ou — du coëfficient B, fait connoitre de quel côté de leurs Tangentes tombent les Branches qui font le Nœud, de quel coté elles tournent leur concavité. Voyez ci-dessous *Ex. I n°. 3.*

Ceci suppose que, dans l'équation proposée, le terme dyy ne manque pas. S'il manque, la Case xy ne sera pas vuide, puisqu'alors le second Rang, réduit à fxx, donneroit l'éq: $fxx = 0$, dont les deux racines $x = 0$, $x = 0$, seroient

CH. XIII. §. 219. seroient égales, & nous les supposons inégales. Ainsi, de la Case xy il partiroit une déterminatrice, qui passant par la Case y^3, ou y^4, ou y^5, &c. donneroit $x=ay^2$, ou $x=ay^3$, ou $x=ay^4$, &c. qui marque que l'Axe des ordonnées touche une Branche, sans Inflexion, si l'exposant d'y est 2; avec une Inflexion invisible, si c'est un autre nombre pair; ou avec une Inflexion visible, si c'est un nombre impair [§. 186]. PLANCHE XXV.

III. Si l'éq: $dyy+exy+fxx=0$ a deux racines égales, c'est-à-dire, une seule racine double $y\sqrt{d}+x\sqrt{f}=0$, le Point double est formé par deux Branches qui se touchent, & qui ont, au Point de contact, une Tangente commune, dont l'équation est cette racine double. Voilà pourquoi l'équation qui la détermine est du second dégré, parce qu'il y a deux Branches, & en quelque sorte deux Tangentes; mais cette équation n'a qu'une racine [double], parce que ces deux Tangentes coïncident & n'en font qu'une.

Les deux Branches, dont le contact fait le Point double, peuvent se terminer à ce Point, ou passer au-delà. Elle s'y terminent, quand les Séries qui les représentent sont demi-imaginaires; & alors ce Point est un *Rebroussement*: elles vont au-delà, quand ces Séries sont réelles; & alors ce Point est une *Osculation*.

Il y a plusieurs sortes d'Osculations. Quand les Branches qui se touchent tournent l'une contre l'autre leur convexité, comme deux Cercles qui se touchent en dehors; on dit que ces Branches *se baisent*, & leur contact se nomme proprement *Osculation*. Quand ces deux Branches tournent leurs convexités d'un même côté, comme deux Cercles qui se touchent par dedans; on dit qu'elles *s'embrassent*, & leur contact se nomme *Embrassement*. Si une des Branches subit une Inflexion visible & l'autre non, elles se baisent d'un côté & s'embrassent de l'autre; ce qui Fig. 192. Fig. 193.

 fait

PLANCHE XXV. Fig. 194. fait une *Osculation avec Inflexion*, ou pour abréger, *Osculinflexion*. Si les deux Branches ont une Inflexion visible, qu'elles s'embrassent des deux côtés, c'est un *Embrassement* CH. XIII. §. 110.
Fig. 195. *avec Inflexion*, ou une *Embrassinflexion*.

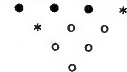
Ajoûtez les *Osculations imaginaires*, qui sont des Points isolés; mais différens de ceux que nous avons indiqué au N°. I. de ce §. en ce que ceux-là manifestent leur nature dès le prémier terme de la Série, lequel est imaginaire; au lieu que ceux-ci ne se découvrent que par les termes suivants. Ensorte que, quand on cherche leurs Tangentes, comme elles sont données par le prémier terme de la Série, on les trouves réelles, quoique les Branches de la Courbe soient imaginaires.

Il y a aussi deux sortes de Rebroussement. L'un, qui
Fig. 196. est le *Rebroussement* proprement dit, est une demi-Osculation formée par deux Branches qui tournant leurs convexités l'une contre l'autre, se terminent au Point de contact. L'autre, qui est un demi-Embrassement, est formé par deux Branches qui tournent leurs concavités d'un
Fig. 197. même côté & se terminent où elles se rencontrent. On peut le nommer *Rebroussement en bec*, ou simplement *Bec*.

On discernera toutes ces sortes de Points doubles, en continuant la Série $y = -x\sqrt{\frac{f}{d}}$ *&c*. On substituera donc $-x\sqrt{\frac{f}{d}} + u$, [ou faisant $-\sqrt{\frac{f}{d}} = A$] $Ax + u$ à y dans la proposée, & on aura une transformée, où la Case de la Pointe & celles du prémier Rang manqueront comme dans la proposée. Mais de plus les Cases xx & ux seront vuides, $y - Ax = 0$ étant une racine double du second Rang [§. 107]. La déterminatrice inférieure partira donc de la Case uu.

1. Si la Case x^3 est pleine, ce qui arrive quand $y - Ax$ ne

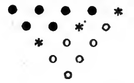
CH. XIII. §. 220. ne divise pas le troisiéme Rang de la proposée [§. 107]; la déterminatrice passe par les Cases uu & x^3, & donnera PLANCHE XXV.



une équation qui a deux racines demi-imaginaires, $u = + x\sqrt{Bx}$, $u = - x\sqrt{Bx}$. Les Séries $y = Ax + x\sqrt{Bx}$ *&c*, $y = Ax - x\sqrt{Bx}$ *&c.* marquent que la Tangente [représentée par l'équat: $y = Ax$] est touchée par deux Branches qui tombent de part & d'autre [ce qui est indiqué par les termes $+x\sqrt{Bx}$, $-x\sqrt{Bx}$] & se jettent d'un côté seulement de l'Axe des ordonnées [sç. du côté positif, si B est positif, & du côté négatif, si B est négatif]. Le Point est donc un *Rebroussement* tel que celui qui est à l'Origine de la Parabole exprimée par l'éq: $yy = ax^3$ [§. 217]. Voyez ci-dessous, *Ex. I. n°.* 4.

Ce Rebroussement est le seul Point double à simple Tangente, qui puisse convenir aux Courbes du troisiéme Ordre. Car si, dans leur équation, la Case x^3 étoit vuide, la transformée seroit divisible par u, & la proposée par $y - Ax [= u]$. Elle ne représenteroit donc plus une simple Courbe [§. 21].

2. Si la racine $y - Ax = 0$ divise le troisiéme Rang, & non le quatriéme, de la proposée; il manquera dans la transformée la Case x^3, & non pas x^4. La déterminatrice



 infé-

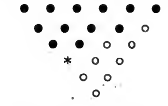
PLANCHE XXV. inférieure passe alors par les Cases uu, ux^2 & x^4. Ainsi elle donne une équation du second dégré, qui a deux racines $u = Bx^2$, $u = B'x^2$. On a donc deux Séries, $y = Ax + Bx^2$ *&c.* $y = Ax + B'x^2$ *&c.* CH. XIII. §. 220.

Il se peut faire que B & B' soient imaginaires. Alors les deux Séries, & les Branches qu'elles représentent, & l'*Osculation* de ces Branches, tout est *imaginaire*. Voyez *Ex. II. n°. 6.*

Si B & B' sont des grandeurs réelles de différents signes, les Branches de la Courbe tombent de part & d'autre de la Tangente commune, elles sont adossées l'une contre l'autre : elles font une véritable *Osculation*. Voyez *Ex. II. n°. 1 & 2.*

Si B & B' sont des grandeurs réelles inégales de même signe, les deux Branches tombent d'un même côté de la Tangente & font un *Embrassement*. Voyez *Ex. II. n°. 4.*

Mais, quand B & B' sont égales, on ne peut encore rien décider sur la nature du Point double, parce que la Série $Ax + Bx^2$ *&c.* n'est pas réguliére. Il faut donc substituer $Bx^2 + t$ à u dans la prémiére transformée, & on en aura une seconde, où il manquera le terme constant & les termes x, x^2, x^3, x^4, t, tx, tx^2. La déterminatrice partant de la Case tt, traversera donc la



Case x^5, si elle n'est vuide, & donnera une équation qui aura deux racines, $t = +\sqrt{C x^5}$, $t = -\sqrt{C x^5}$, ou $t = \pm xx\sqrt{Cx}$. Dans la double Série $y = Ax + Bx^2 \pm xx\sqrt{Cx}$

Ch. XIII. §. 220. $\pm' xx\sqrt{Cx}$ &c, le troiſiéme terme demi-imaginaire fait voir que les ordonnées ne ſont réelles que d'un côté de leur Axe. L'Embraſſement, déſigné par les deux prémiers termes, n'eſt donc qu'un demi-embraſſement, un *Bec*. Voyez *Ex. III*, & *IV*, 1. Planche XXV.

Mais ſi la Caſe x^5 de la ſeconde transformée eſt vuide; la déterminatrice traverſant les Caſes tt, tx^3, x^6 donnera une équation dont les deux racines, $t = Cx^3$, $t = C'x^3$, fourniſſent deux Séries $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c, $y = Ax + Bx^2 + C'x^3$ &c.

Si C & C' ſont imaginaires; les Branches ſont imaginaires, & l'Embraſſement, auſſi imaginaire, ſe réduit à un Point conjugué.

Si C & C' ſont réelles & de différents ſignes; le Point double eſt un Embraſſement. Voyez *Ex. II*, *n°.* 5, & *Ex. IV*, *n°.* 2.

Si C & C' ſont réelles, de même ſigne, & inégales; le Point double eſt encore un Embraſſement, plus intime.

Mais, ſi $C = C'$, la Série $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. n'eſt pas encore réguliére. On ſubſtituera donc $Cx^3 + s$ à t dans la ſeconde transformée, pour en avoir une troiſiéme, dont la déterminatrice inférieure, partant de la Caſe ss, paſſera par la Caſe x^7, ſi elle n'eſt vuide, & donnera $s = \pm\sqrt{Dx^7} = \pm x^3\sqrt{Dx}$. Il y aura donc deux Séries $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + x^3\sqrt{Dx}$ &c. $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 - x^3\sqrt{Dx}$ &c. qui, à cauſe du terme $\pm x^3\sqrt{Dx}$ demi-imaginaire, déſignent un Rebrouſſement en Bec.

Ou, ſi la Caſe x^7 eſt vuide, la déterminatrice inférieure paſſera par ss, sx^4, x^8, & donnera une équation à deux racines $s = Dx^4$, $s = D'x^4$, ſur leſquelles on fera les mêmes conſidérations que ci-deſſus.

Cela peut aller à l'infini, mais la Méthode ne varie point. Et il n'en réſulte jamais que des Embraſſemens, ſoit réels, ſoit imaginaires, ou des Rebrouſſements en Bec.

Il

PLANCHE XXV. Il eſt le plus ſouvent aiſé de connoitre, ſans calcul, ſi le Point double eſt un Embraſſement ou un Bec. C'eſt lorſque la racine double $u = Bx$, de l'équation que donne la déterminatrice de la prémiére transformée, ne diviſe pas la ſomme des termes du ſecond ordre, qui ſe trouvent ſur une Droite parallèle à cette déterminatrice. Alors [§. 113], ſi l'expoſant 2 de la multiplicité de la racine $u = Bx^2$ diviſe la différence des expoſants du prémier & du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, ſi cette différence eſt un nombre pair, [ce qu'on connoit, ſans calcul, lorſque le nombre des intervalles, qu'il y a entre la déterminatrice & ſa parallèle qui paſſe par les termes du ſecond ordre, eſt un nombre pair]: alors, dis-je, les deux Séries n'ont point de termes demi-imaginaires: elles ſont toutes réelles ou toutes imaginaires: elles déſignent un Embraſſement, réel ou imaginaire. Mais, au contraire, elles déſignent un Bec, elles ont un terme demi-imaginaire, lorſque le nombre des intervalles entre la déterminatrice & ſa prémiére parallèle eſt un nombre impair, lorſque la différence entre les expoſants du prémier & du ſecond ordre eſt impaire; c'eſt-à-dire, lorſque cette différence n'eſt pas diviſible par l'expoſant 2 de la multiplicité de la racine $u = Bx^2$ de l'équation que fournit la déterminatrice. [§. 113]. Voyez *Ex. III*, & *IV*, 1. CH. XIII. §. 110.

Tous ces Points peuvent ſe trouver ſur des Courbes du quatriéme Ordre: ceux qui ſuivent n'apartiennent qu'à des Courbes des Ordres ſupérieurs.

3. Si la racine double $y - Ax = 0$ du ſecond Rang diviſe le troiſiéme & le quatriéme, mais non le cinquiéme; il manquera à la Transformée les Caſes x^3 & x^4, mais non x^5, & il faut diſtinguer deux Cas. Ou la Caſe ux^2 eſt pleine, ce qui a lieu quand $y - Ax$ ne diviſe le troiſiéme Rang qu'une fois; ou elle eſt vuide, ce qui

CH. XIII. §. 220. qui a lieu quand $y - Ax$ divise plus d'une fois le troisiéme Rang [§. 107]. PLANCHE XXV.



Quand la Case ux^2 est vuide, la déterminatrice, passant par u^2 & x^5, donne $u = \pm\sqrt{Bx^5} = \pm x^2\sqrt{Bx}$. La double Série $y = Ax \pm x^2\sqrt{Bx}$ *&c.* marque un *Rebroussement à double Inflexion.* Cette Inflexion, quoiqu'invisible, distingue, dans le Calcul, ce Rebroussement du simple Rebroussement, *n°.* 1. Voyez *Ex. VI.*

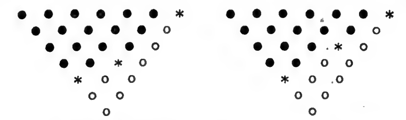
Quand la Case ux^2 est pleine, il y a deux déterminatrices inférieures. L'une, qui passe par u^2 & ux^2, donne $u = Bx^2$. L'autre, qui passe par ux^2 & x^5, donne $u = B'x^3$. On a donc deux Séries, $y = Ax + Bx^2$ *&c*, $y = Ax + B'x^3$ *&c.* La prémiére marque une Branche qui tombe toute d'un même côté de la Tangente. La seconde marque une Branche qui croise sa Tangente au Point de contact, comme la Parabole exprimée par l'éq : $y = ax^3$ [§. 217]. Le concours de ces deux Branches, qui ont une Tangente commune au Point où elles se croisent, forme une *Osculinflexion.* Voyez *Ex. V.*

Ces deux Points peuvent convenir aux Courbes du cinquiéme Ordre : ceux, dont on va parler, ne conviennent qu'aux Courbes des Ordres supérieurs.

4. Si la racine double $y - Ax = 0$ du second Rang, divise le troisiéme, le quatriéme, & le cinquiéme, mais non pas le sixiéme; il faut aussi distinguer deux Cas, selon

 que

PLANCHE XXV. que cette racine divise le troisiéme Rang une ou plusieurs fois. CH. XIII. §. 220.



Si elle ne le divise qu'une fois, il manque à la Transformée la Case de la Pointe, & les Cases x, x^2, x^3, x^4, x^5, u, & ux. Il y a donc deux déterminatrices, qui passent, l'une par uu & ux^2, l'autre par ux^2 & x^6. La prémiére donne $u = Bx^2$, la seconde $u = B'x^4$. On a donc deux Séries, $y = Ax + Bx^2$ *&c*, $y = Ax + B'x^4$ *&c*. Les exposants pairs de x dans le second terme marquent que chaque Branche tombe toute d'un même côté de la Tangente commune [§. 217]. Ainsi le Point double est une *Osculation*, ou un *Embrassement*, sçavoir un Embrassement quand B & B' ont un même signe, une Osculation quand ils ont différents signes.

Mais si $y - Ax$ divise plus d'une fois le troisiéme Rang de la proposée; il manquera encore à la transformée la Case ux^2, & il n'y a qu'une déterminatrice, qui passant par les Cases uu, ux^3, & x^6, donne une équation du second dégré, dont les racines soient $u = Bx^3$, $u = B'x^3$. En faisant sur ces racines les mêmes considérations qu'on a faites au *n°*. 2, on verra,

Que si B & B' sont imaginaires, le Point double est un Point isolé.

Que s'ils sont réels & de différents signes, les Séries $y = Ax + Bx^3$ *&c*. $y = Ax + B'x^3$ *&c*. marquent une *Oscula-*

CH.XIII. §. 120. *Osculation* semblable à celle de deux Paraboles cubiques, qui à la vuë ne différe presque pas des Osculations indiquées ci-dessus, à moins que B & B' étant fort inégaux, les deux Paraboles ne différent beaucoup en courbure. Voyez *Ex. VII.* 2. PLANCHE XXV. Fig. 198.

Que si B & B' sont réels, de même signe, mais inégaux, les Séries $y = Ax + Bx^3$ *&c.* $y = Ax + B'x^3$ *&c.* désignent un *Embrassement avec Inflexion*. Voyez *Ex. VII.* 1. Fig. 195.

Et si $B = B'$, la Série $y = Ax + Bx^3$ *&c.* n'est pas encore réguliére, il faut la continuer. Mais, par un raisonnement tout semblable à celui qu'on a fait au *n°.* 2 de ce §. on s'assurera que le Point double ne peut être qu'un Bec, ou une Embrassinflexion, ou un Embrassement imaginaire.

Ainsi l'on peut affirmer,

Que les Courbes du second Ordre ne peuvent avoir de Points doubles [§. 174. *Ex. VI*].

Que celles du troisiéme Ordre ne sont susceptibles que du Point conjugué, du Nœud simple, & du Rebroussement.

Qu'avec ces trois sortes de Points doubles, les Courbes du quatriéme Ordre peuvent avoir le Nœud avec une ou avec deux Inflexions, l'Osculation réelle & imaginaire, l'Embrassement, & le Rebroussement en Bec.

Ajoutez, pour les Courbes du cinquiéme Ordre, le Nœud avec un ou deux Serpentements, le Nœud avec Inflexion & Serpentement, & l'Osculinflexion.

Et, pour les Courbes du sixiéme Ordre, le Nœud avec une ou deux triples Inflexions, le Nœud avec une triple Inflexion & un Serpentement, le Nœud avec une triple & une simple Inflexion, & l'Embrassinflexion.

Il seroit aisé, mais superflu, de pousser ce détail plus loin. La méthode est générale, & l'on peut suivre cette

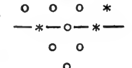
PLANCHE XXV. énumeration autant qu'on le voudra, ou autant que des Ch. XIII. §. 220. vuës particuliéres le demanderont. Il ne reste donc qu'à éclaircir tout ceci par des Exemples.

L'*Exemple I.* est propre à faire mieux connoitre tous les Points doubles dont les Courbes du troisiéme Ordre sont susceptibles.

Fig. 199. num. 1. 1. L'éq: $ayy - x^3 + (b - c)xx + bcx = 0$ représente une Courbe composée d'une Ovale, placée du côté des abscisses négatives, dont le diamétre AC est égal à c, & de deux Branches qui vont à l'infini du côté des abscisses positives, partant du Point B éloigné de l'Origine A d'une distance $AB = b$. On le voit clairement en donnant à l'équation cette forme $y = \pm\sqrt{(x^3 - (b-c)x^2 - bcx)} : \sqrt{a} = \pm\sqrt{(xx(x-b) \times (x+c) : a)}$. Car on y voit qu'$y$ a deux valeurs égales, mais dont l'une est positive & l'autre négative; lesquelles, x étant positive, sont imaginaires tant que $x - b$ est négative, c'est-à-dire, tant que $x < b$ [AB], & qui deviennent réelles dès que $x > b$ [AB]. Mais x étant négative, $x - b$ est aussi négative; ainsi le produit $xx(x-b)$ est positif, & $x(x-b) \times (x+c) : a$ est une grandeur du même signe que $x + c$, c'est-à-dire, positive si x [négative] $< c$ [AC], négative si $x > c$ [AC]. Mais selon que le produit $xx(x-b) \times (x+c) : a$ est positif ou négatif, y qui en est la racine quarrée, est réelle ou imaginaire. Donc, du côté des abscisses négatives, la Courbe ne s'étend pas au-delà de l'abscisse AC, & sa forme est celle d'une Ovale, qui, non plus que le reste de la Courbe, n'a aucun Point double [§. 175].

2. Si, dans cette équation, on fait $c = 0$; élle se réduit à $ayy - x^3 + bxx = 0$. Le diamétre de l'Ovale devenant zéro, C tombe sur A, & l'Ovale est réduite à un simple Point conjugué; lequel, quoiqu'invisible, & détaché du

CH.XIII. §. 220. du reste de la Courbe, ne laisse pas de lui apartenir. Car si on fait $y = 0$; on réduit l'équation à $-x^3 + bxx = 0$, qui a trois racines, $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. Donc [§. 15] la Courbe rencontre trois fois l'Axe des abscisses, une fois en B & deux fois en A, où est le Point conjugué. Ainsi, quand on met l'équation sur le Triangle analytique, le vuide de la Case de la Pointe & du prémier Rang montre qu'il y a un Point double à l'Origine. Mais si on veut en chercher la nature par la position de ses Tangentes, on trouvera, en égalant le second Rang à zéro, PLANCHE XXV.



l'éq: $ayy + bxx = 0$, dont les racines, étant imaginaires, marquent un Point sans Tangente, sans direction, un vrai Point isolé. [ci-dessus, n°. 1]. Fig. 199. num. 2.

3. Qu'au lieu de c, on fasse $b = 0$, l'éq: $ayy - x^3 + (b - c)xx + bcx = 0$ se réduit à $ayy - x^3 - cxx = 0$; AB [b] devenant nulle, B vient tomber sur A; les deux Branches de la Courbe viennent s'attacher à l'Ovale, qui ne fait plus qu'une Feuille, liée aux Branches, non par une Osculation, comme on pouroit d'abord le croire, mais par un simple Nœud. Car en cherchant les Tangentes de ce Point, on en trouvera deux, déterminées par l'éq: $ayy - cxx = 0$, qui a pour racines $y\sqrt{a} - x\sqrt{c} = 0$, & $y\sqrt{a} + x\sqrt{c} = 0$. On les construira, en prenant $AF = -\sqrt{a}$, $AE = +\sqrt{c}$ & $Ae = -\sqrt{c}$, & menant AD, Ad parallèles à EF, eF. num. 3.

Quoique la simple vuë de la Figure fasse assez connoitre de quel côté les Branches de la Courbe tournent leur concavité; on peut s'en assurer démonstrativement par le

 second

PLANCHE XXV. second terme de la double Série $y = \pm x\sqrt{\frac{c}{a}}$. On substituera donc $\pm x\sqrt{\frac{c}{a}} + u$ à y dans l'éq: $ayy - x^3 - cxx = 0$, & on aura la transformée $auu \pm 2ux\sqrt{ac} - x^3 = 0$. Celle-ci mise sur le Triang: anal: a une détermi- CH. XIII. §. 220.



natrice inférieure qui donne $\pm 2ux\sqrt{ac} - x^3 = 0$, ou $u = \pm \frac{xx}{2\sqrt{ac}}$. Les Séries, qui expriment les Branches qui se croisent en A, sont donc $y = + x\sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{xx}{2\sqrt{ac}}$ &c. $y = - x\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{xx}{2\sqrt{ac}}$ &c; par où l'on voit que la Branche touchée par AD tourne en haut sa concavité, & que la Branche touchée par Ad la tourne en bas.

Le second terme de l'une & de l'autre de ces Séries, renfermant la seconde puissance de x, on en conclurra [ci-dessus, *n°*. II] que le Nœud est simple: ce qu'on peut conclure aussi de ce que les racines $y\sqrt{a} - x\sqrt{c} = 0$, $y\sqrt{a} + x\sqrt{c} = 0$ du second Rang, ne divisent point le troisiéme, qui n'a que le seul terme x^3 [§. 186].

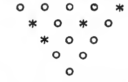
4. Dans cette même Courbe, il est clair que a restant toujours le même, plus c diminuë, & plus diminuent aussi le diamétre AC de la Feuille & l'angle DAd des Tangentes

Fig. 199. num. 4. au Point double. Si donc c diminuë à l'infini & devient zéro, l'éq: $ayy - x^3 - cxx = 0$, réduite à $ayy - x^3 = 0$, ne représente plus que la Parabole *semicubique*, où la Feuille disparoit, & les deux Branches venant à se toucher, forment

CH. XIII. §. 220. forment un Point de Rebroussement. Aussi le Rang inférieur, qui n'a que le terme ayy, donne, étant égalé à zéro, une équation qui a deux racines égales $y = 0$, $y = 0$; ce qui marque la coïncidence des deux Tangentes. Et la valeur, $\pm x \sqrt{\frac{x}{a}}$, demi-imaginaire de y, indique le Rebroussement [ci-dessus, *n°*. III. 1]. PLANCHE XXV.

Exemple II. On a vu au §. 186. *Ex. VI*, un Nœud avec Inflexion, & *Ex. V*, un Nœud avec deux Inflexions. Des Exemples de Nœud avec Serpentement & triple Inflexion n'auroient rien de plus instructif.

Mais on aura des Exemples d'Embrassement & d'Osculation, tant réelle qu'imaginaire, dans la Courbe, ou plutôt dans les Courbes, que désigne l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, suivant les différens raports de a à b. En mettant cette équation sur le Triangle analyt.



le Rang le plus bas, qui est le second, n'a que le seul terme $(aa - bb)yy$, qui égalé à zéro a deux racines égales $y = 0$, $y = 0$, lesquelles marquent que l'Origine est un Point double [§. 170], dont la Tangente unique est l'Axe des abscisses [§. 184]. Mais la déterminatrice inférieure donne l'éq: $x^4 - axxy + (aa - bb)yy = 0$, qui a ces deux racines $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)}}$, $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)}}$. Elles sont l'une positive & l'autre négative, si $\frac{1}{2}a < \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)}$, c'est-à-dire, si $a < b$;

elles

PLANCHE XXV. elles sont toutes deux positives, mais inégales, si $aa > bb$ & $bb > \frac{3}{4}aa$; positives & égales, si $bb = \frac{3}{4}aa$; imaginaires, si $bb < \frac{3}{4}aa$. Donc [ci-dessus, n°. III, 2], l'Origine de la Courbe est une Osculation réelle, quand $b > a$, & une Osculation imaginaire, quand $b < \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. C'est un Embrassement, quand b tombe entre a & $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Mais quand $b = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, il faut, pour determiner la nature de ce Point double, chercher le second terme de la Série CH. XIII. §. 220.

$y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a}$ &c. On trouve que ce second terme est $\pm \frac{4x^3\sqrt{2}}{aa}$. Et la Série $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a} \pm \frac{4x^3\sqrt{2}}{aa}$ &c. désigne un Embrassement.

Tout cela se voit sensiblement en examinant les divers contours que prend la Courbe désignée par l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, à mesure qu'on change le raport d'a à b.

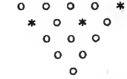
1. D'abord, si on suppose $a = 0$, ou infiniment petit par raport à b, les termes multipliez par a s'évanouïront, & l'équation se réduira à $x^4 - bbyy = 0$, qui désigne deux Paraboles égales, adossées l'une contre l'autre, leurs équations étant $xx - by = 0$, & $xx + by = 0$. Elles se
Fig. 200. num. 1. baisent à l'Origine A, qu'on peut regarder comme un Point d'Osculation.

2. Si $a > 0$, & $< b$, l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$ a quatre racines, $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay \pm y\sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)})}$, dont il y en a toujours deux imaginaires, sç. $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)})}$ quand on prend y positive, & $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay + y\sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)})}$ quand on prend y négative. Car, y étant positive & $b > a$, $ay + bb$ est $> aa$: donc $ay + bb - \frac{3}{4}aa > \frac{1}{4}aa$, & $\sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)} > \frac{1}{2}a$: ainsi $y\sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)} > \frac{1}{2}ay$, & $\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)}$ est une grandeur

CH. XIII. §. 220. deur négative, dont la racine quarrée est imaginaire. Et, y étant négative, ou $\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$ est imaginaire, ou elle est réelle. Si elle est imaginaire, $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay + y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$ est aussi imaginaire. Si $\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$ est réelle; comme on la prend positivement, on aura, en la multipliant par y négative, le produit $y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$ négatif, lequel ajouté au produit aussi négatif $\frac{1}{2}ay$ fait une somme négative, dont la racine quarrée est imaginaire. Ainsi la Courbe n'a que deux Branches du côté des ordonnées positives & deux autres Branches du coté des négatives. Les prémiéres vont à l'infini; les autres, qui s'écartent d'abord l'une de l'autre, se rapprochent ensuite, & se réunissent au Point B extrémité de l'ordonnée $AB = \frac{bb}{a} - a$. La Courbe est donc composée d'une Ovale AB, & de deux Branches paraboliques dont l'Asymptote est la Parabole DAd désignée par l'équation $x^4 - ay^3 = 0$ [§. 142]. Ces deux parties de la Courbe se joignent à l'Origine A par une Osculation. La Parabole osculatrice de l'Ovale est celle dont l'équation est $xx = (\frac{1}{2}a - \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)})y$. Celle des Branches CAc a pour équation $xx = (\frac{1}{2}a + \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)})y$ [§. 218]. Le Paramétre de la prémiére est positif, celui de la derniére négatif. Ainsi, les deux Paraboles se baisent au Point A; & il en est de même des portions de la Courbe, qui ont en A la même courbure que les Paraboles osculatrices. PLANCHE XXV. Fig. 200. num. 2.

3. Plus a augmente, plus diminuë le diamétre AB $[\frac{bb}{a} - a]$ de l'Ovale. Il s'anéantit quand $a = b$. Alors l'Ovale se réduit à un seul Point, mais non pas isolé, puisqu'il est traversé par les Branches CAc, sur le contour desquelles il se trouve en A. Il est invisible, parce qu'un num. 3.

PLANCHE XXV. Point est sans étenduë; mais il y est réellement, & le calcul fait voir que le Point A, qui ne semble à la vuë qu'un Point simple, est véritablement un Point triple. Car la supposition de $a=b$ réduit l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa-bb)yy = 0$ à $x^4 - ax^2y - ay^3 = 0$, qui, mise sur le Tr: anal: n'a point de plus bas Rang que le troi- CH. XIII. §. 220.



siéme: donc l'Origine est un Point triple. Quand on en cherche les Tangentes, on trouve, pour les déterminer, l'éq: $ay^3 + ax^2y = 0$, qui a une racine réelle $y=0$ & deux imaginaires $y = \pm x\sqrt{-1}$. La prémiére donne pour Tangente l'Axe des abscisses: & les deux autres indiquent que le Point A, quoique triple, n'a qu'une Tangente; parce qu'en effet il ne passe par A qu'une seule Branche qui traverse un Point sans Tangente. Mais ce n'est pas ici le lieu de parler des Points triples.

Fig. 100. num. 4. 4. Soit $a > b$ & $< 2b\sqrt{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire, soit bb moyenne entre aa & $\frac{1}{4}aa$, l'Ovale recommence à paroitre, mais du côté des ordonnées positives, & renfermé entre les Branches C A c. On le voit par l'analyse de l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa-bb)yy = 0$, & par l'examen de ses quatre racines $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay \pm y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$. Elles sont toutes quatre imaginaires, lorsque y est négative. Cela est évident, lorsque $\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$ est imaginaire, c'est-à-dire, quand y négative surpasse $\frac{3}{4}a - \frac{bb}{a}$. Mais cela est vrai encore, quand y est plus petite. Alors $\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$ étant réelle, $\frac{1}{2}a + \sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$

CH XIII. §. 220. $-\frac{3}{4}aa$) fait une somme positive, dont le produit par y négative est négatif. Ainsi ses racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay+y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ sont imaginaires. Les deux autres racines $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay-y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ le sont aussi, puisque aa étant $> bb$, aa sera aussi $> ay+bb$: car ay négative diminuë bb. Donc $\frac{1}{4}aa > ay+bb-\frac{3}{4}aa$ & $\frac{1}{2}a > \sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$. Ainsi $\frac{1}{2}a-\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$ est une grandeur positive, qui multipliée par y négative fait un produit négatif, dont les racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay-y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ sont imaginaires. On voit donc que les ordonnées négatives n'ont que des abscisses imaginaires. PLANCHE XXV.

Mais du côté des ordonnées positives, les racines $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay+y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ sont toujours réelles. Car $bb > \frac{3}{4}aa$ fait que $ay+bb-\frac{3}{4}aa$ est toujours positive, & sa racine positive, qui est réelle, ajoutée à $\frac{1}{2}a$ fait une somme positive, dont le produit par y positive, est positif, & a ses racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay+y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ toujours réelles. Elles représentent les Branches CAc. Mais les racines $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay-y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ ne sont réelles qu'autant que $y < a-\frac{bb}{a}$. Alors $ay < aa-bb$, & $ay+bb-\frac{3}{4}aa < \frac{1}{4}aa$. Donc $\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)} < \frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a-\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$ est positif, aussi bien que son produit par y positive. Les racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay-y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ sont donc réelles : comme au contraire, elles sont imaginaires, si $y > a-\frac{bb}{a}$. Ainsi les Branches représentées par ces deux racines font une Ovale, dont le diamétre $AB = a-\frac{bb}{a}$ est pris du côté des ordonnées positives. Cet Ovale fait avec les Branches CAc un Embrassement à l'Origine A.

 La

PLANCHE XXV. La Parabole osculatrice de l'Ovale a pour équation $xx = (\frac{1}{2}a - \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)})y$, & celle des Branches CAc, $xx = (\frac{1}{2}a + \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)})y$ [§. 218]. Les deux Paramétres sont positifs, mais celui de la Parabole osculatrice des Branches infinies est plus grand que celui de la Parabole osculatrice de l'Ovale. Donc cette Parabole embrasse l'autre [§. 214], & conséquemment les Branches embrassent l'Ovale. CH. XIII. §. 220.

5. Si l'on fait $b = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, ou $bb = \frac{3}{4}aa$, la figure de la Courbe reste à peu près la même. Seulement le contact des Branches infinies & de l'Ovale est plus intime, parce que les Paramétres $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)}$ deviennent égaux entr'eux & à $\frac{1}{2}a$.

6. Mais ce contact est sur le point de cesser. Car pour peu qu'on diminuë b, de façon qu'il devienne $< \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, les deux parties de la Courbe qui sont d'un côté de l'Axe des ordonnées, restant unies l'une à l'autre, se détachent de celles qui sont de l'autre côté, & qui restent aussi unies entr'elles; elles s'en détachent, dis-je, vers l'Origine en conservant leur continuité vers l'autre bout de l'Ovale, laquelle disparoit & se trouve rompuë, quoique la Courbe conserve un cours continu. *Fig. 200. num. 5.*

On le voit par l'examen des racines $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay \pm \sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)})}$, qui sont toutes quatre imaginaires quand y est négative, & même quand elle est positive, mais $< \frac{3}{4}a - \frac{bb}{a}$; qui deviennent toutes quatre réelles quand $y > \frac{3}{4}a - \frac{bb}{a}$ & $< a - \frac{bb}{a}$; & dont les deux $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - \sqrt{(ay + bb - \frac{3}{4}aa)})}$ redeviennent imaginaires quand $y > a - \frac{bb}{a}$. On le voit encore plus sensiblement en cherchant les *Maxima* & *Minima* de x & de

CH.XIII. §. 220. de y. Ceux de y sont donnez [§. 196] par l'éq : $4x^3 - 2axy = 0$, qui a deux racines $x = 0$ & $xx = \frac{1}{2}ay$. PLANCHE XXV.

La prémiére $x = 0$ donne $y = 0$ & $y = a - \frac{bb}{a}$; ce qui désigne le Point double de l'Origine, dont nous parlerons tout-à-l'heure, & l'extrémité B de l'ordonnée primitive $AB = a - \frac{bb}{a}$. La seconde $xx = \frac{1}{2}ay$ donne 1°. $y = 0$ & $x = 0$, qui se raporte aussi au Point de l'Origine, & 2°. $y = \frac{3}{4}a - \frac{bb}{a} = EF = ef$, & $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{3}{2}aa - bb)} = AE = Ae$. Il y a donc trois *Maxima* de y, qui sont les Points B, F, f. Ceux de x sont déterminés par l'éq: $axx = 2(aa - bb)y - 3ayy$, d'où l'on tire $y = \frac{5aa - 6bb + a\sqrt{(3bb - 2aa)}}{9a} = GI = gi$, pour les Points I, i, des *Maxima*, & $y = \frac{5aa - 6bb - a\sqrt{(3bb - 2aa)}}{9a} = HL = hl$, pour les Points L, l, des *Minima*.

Quand $bb = \frac{2}{3}aa$, les valeurs de GI, HL, & gi, hl deviennent égales entr'elles & à $\frac{1}{3}a$. Alors, les deux Points I & L, i & l de *Maximum* & de *Minimum* se réunissent en un seul point d'Inflexion K, k, [$n°. 6$] lequel disparoit avec les *Maxima* & *Minima* de x, lorsque $bb < \frac{2}{3}aa$ rend imaginaires les valeurs d'y $\frac{5aa - 6bb \pm a\sqrt{(3bb - 2aa)}}{9a}$ qui déterminent ces *Maxima* & *Minima* [$n°. 7$]. Fig. 209.

Dans toutes ces Courbes le Point de l'Origine est un Point de la Courbe. Car dans l'éq : $x^4 - axxy - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, il n'y a point de terme tout constant [§. 14]. Mais dès que $bb < \frac{1}{4}aa$, le Point ne

 se

PLANCHE XXV. Fig. 200. ſe trouve plus ſur le contour de la Courbe [n°. 5, 6, 7]. CH.XIII. §. 219. C'eſt donc un Point iſolé. Cependant, ſi on en cherche les Tangentes, on trouvera, pour les déterminer, l'éq : $(aa - bb)\, yy = 0$, dont les racines $y = 0$, $y = 0$, ne ſont pas imaginaires, mais égales; ce qui ſemble indiquer une double Tangente qui ſeroit l'Axe des abſciſſes. Mais quand on cherche ou la Parabole oſculatrice, ou le ſecond terme de la Série [§. 218], on trouve $\frac{1}{4}a \pm \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)}$ grandeur imaginaire quand $bb > \frac{3}{4}aa$. Ce Point eſt donc une Oſculation imaginaire [cy-deſſus, III, 2].

Exemple III. On a vu dans l'*Ex. préc.* n°. 5, que quand $bb = \frac{3}{4}aa$, l'équation, qui ſe réduit à $x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{1}{4}aayy = 0$, déſigne une Courbe compoſée de deux Branches infinies AC, Ac, & d'une Ovale AB embraſſée auſſi étroitement qu'il eſt poſſible par ces Branches, puiſque la Parabole oſculatrice de l'Ovale au point A eſt la même que la Parabole oſculatrice des Branches. Mais ſi, dans cette équation, on change le terme ay^3 en axy^2, on aura une toute autre Courbe, & dont l'Origine eſt un Rebrouſſement en Bec. Dont la raiſon eſt, que dans la Série aſcendante $y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4x^3\sqrt{2}}{aa} - \frac{24x^4}{a^3}$ &c. que fournit l'éq : $x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{1}{4}aayy = 0$, il n'y a aucun terme imaginaire, ou demi-imaginaire ; ainſi les Branches qui s'embraſſent d'un côté de l'Axe des ordonnées s'embraſſent auſſi de l'autre côté, & font un Embraſſement complet. Au lieu que la Série $y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + \frac{8x^3}{a^3}$ &c. que donne l'éq : $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$, a ſes termes alternatifs demi-imaginaires : ce qui montre que les Branches qui s'embraſſent d'un

Fig. 200. num. 4.

côté

92. Fig. 193. Fig. 194. Fig. 195.

Fig. 196. Fig. 197. Fig. 198.

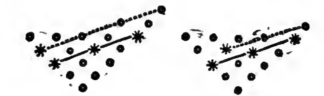
Fig. 199. n°. 2. C A B n°. 3. E D C F A B d e n°. 4. C A B

C D d c C D d c C B n°. 2. n°. 3. n°. 4. A A B A B

Fig. 200.

n°. 6. n°. 5. C c B C c B I i K k L l F f F f e E G A g c E G H A h g c

CH. XIII. §. 220. côté de l'Axe des ordonnées manquent de l'autre côté, & ne font qu'un demi-Embrassement, c'est-à-dire un Bec. On remarque cette différence dès le second terme de la Série; & on pouvoit l'apercevoir sans calcul, en mettant simplement ces équations sur le Triang. anal. Car elles PLANCHE XXVI.



ont une même déterminatrice, qui donne, pour l'une & l'autre, l'éq : $\frac{1}{4}aayy - ax^2y + x^4 = 0$, dont la racine [double] $\frac{1}{2}y - \frac{xx}{a} = 0$, ne divise point le terme unique du second Ordre $-ay^3$ ou $-ax^2y$. Mais dans la prémiére équation il y a deux intervalles, entre la déterminatrice & sa prémiére parallèle, au lieu qu'il n'y en a qu'un dans la seconde équation. Donc [§. 113, ou ci-devant III, 2] la Série que fournit cette seconde équation est demi-imaginaire, au lieu que celle que fournit la prémiére est ou réelle ou imaginaire. Ainsi la seconde indique un Bec, & la prémiére un Embrassement, ou réel ou imaginaire. Et l'on a vu [*Ex. préc. n°.* 5] qu'il étoit réel.

On s'assurera parfaitement que la seconde Courbe a un Bec à son Origine, en resolvant l'éq : $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$. Car on trouvera $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{ax}}$: ce qui désigne deux Branches représentées par les racines $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$ & $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$. On voit, en les exami-

PLANCHE XXVI. examinant, qu'à l'Origine ces Branches ont l'Axe des abſciſſes pour leur Tangente commune, [parce que x étant infiniment petite, y qui eſt $\frac{xx}{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{ax}}$, eſt encore infiniment plus petite]; que là elles s'embraſſent dans l'angle des coordonnées poſitives, [parce que x étant fort petite & poſitive, $\frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$ & $\frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$ ſont toutes deux poſitives, la ſeconde ſurpaſſant un peu la prémiére]; mais que du côté des abſciſſes négatives elles manquent entiérement, [parce que x étant négative, $\sqrt{ax}$, & conſéquemment $\frac{xx}{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{ax}}$, eſt imaginaire]. Ainſi ces Branches forment à l'Origine un Rebrouſſement en Bec. CH. XIII. §. 210.

En continuant cet examen, on voit que la Branche ACc, déſignée par la racine $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$, s'éloigne à l'infini des deux Axes, comme fait la Parabole $y = \frac{xx}{\sqrt{ax}}$, ou $ayy = x^3$, qui eſt ſon Aſymptote. Mais la Branche AED, que repréſente la racine $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$, s'éloigne infiniment de l'Axe des abſciſſes, & non pas de celui des ordonnées, puiſqu'elle ſe gliſſe le long de l'Aſymptote droite BD, ordonnée de l'abſciſſe $AB = \frac{1}{4}a$. Car $x = \frac{1}{4}a$ rend y [$= \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}} = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{16}aa}{0}$] infinie. L'abſciſſe étant plus grande que $\frac{1}{4}a = AB$, l'ordonnée eſt négative; parce que le diviſeur $\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}$ eſt négatif. D'abord l'ordonnée eſt infinie Bd, mais elle décroit fort rapidement juſqu'au point f [qui a l'abſciſſe $AF = \frac{9}{16}a$ & l'ordonnée $Ff = -\frac{81}{64}a$], après quoi elle Fig. 201.

recom-

CH. XIII. §. 220. recommence à croitre en s'aprochant de son Asymptote courbe, qui est l'autre Branche A e de la Parabole $ayy = x^3$. En sorte qu'on peut dire que la Branche hyperbolique AED se continuë au-delà de l'infini, c'est-à-dire, du côté négatif, par la Branche aussi hyperbolique df, & ensuite par la Branche parabolique fe. PLANCHE XXVI.

Exemple IV. On propose la Courbe dont la nature s'exprime par l'éq: $x^4 + x^3y - x^2y^2 - 2ax^2y + axy^2 + aayy = 0$, & l'on demande la nature du Point qui est à l'Origine? L'équation étant mise sur le Triang: anal. a, comme la précédente, une déterminatrice infé- Fig. 202.



rieure qui donne l'éq: $aayy - 2ax^2y + x^4 = 0$, qui n'a qu'une racine, mais double, $ay - xx = 0$. Il y a donc à l'Origine un Embrassement, réel ou imaginaire, ou un Rebroussement en Bec. L'on s'assure que c'est ce dernier, parce que la somme des termes $axy^2 + x^3y$ du second Ordre n'est pas divisible par la racine $ay - xx$ & que la déterminatrice n'est éloignée que d'un intervalle de sa parallèle qui passe par ces termes [§. 113, ou ci-dessus III, 2]. Ou, si l'on aime mieux, on cherchera le second terme de la Série, en substituant $\frac{xx}{a} + u$ à y; ce qui donne la Transformée $aauu + axuu - xxuu + 3x^3u - \frac{2x^4u}{a}$

 $+ 2x^5$

PLANCHE XXVI. $+\frac{2x^5}{a}-\frac{x^6}{aa}=0$, qui placée, à son tour, sur le Tr. an.L a une déterminatrice inférieure, qui donne l'équat: CH. XIII. §. 220.

```
o  o  o  o  o  o  *
  o  o  o  o  *  *
    o  o  *  *  o
      o  *  o  o
        *  o  o
          o  o
            o
```

$aauu+\frac{2x^5}{a}=0$, ou $u=\pm\frac{xx\sqrt{-2x}}{a\sqrt{a}}$, terme demi-imaginaire, qui dénote un Bec. La Série $y=\frac{xx}{a}\pm\frac{xx\sqrt{-2x}}{a\sqrt{a}}$ &c. fait voir que les x positives n'ont que des y imaginaires, à cause de la radicale $\sqrt{-2x}$: mais les x négatives ont deux y réelles, qui donnent, à l'Origine, deux Branches, lesquelles s'embrassant forment un Bec, dont l'Axe des abscisses est la Tangente.

Remarquez que ce qu'on dit ici, que les abscisses positives ont des ordonnées imaginaires, ne doit s'entendre que des abscisses plus petites que a. La Série, donnée par une déterminatrice inférieure, ne sert que pour ces abscisses: elle seroit divergente & fautive, si on vouloit l'appliquer à des abscisses plus grandes.

2. Si dans l'équation précédente on change seulement le signe du terme $axyy$; alors on trouve bien la même déterminatrice, qui donne la même équation & la même racine $ay-xx=0$. Mais présentement la somme $-axyy+x^3y$ des termes du second Ordre est divisible par cette racine, le quotient étant $-xy$. On ne peut donc pas employer

CH. XIII. §. 220. employer ici sans embarras la Régle du §. 113, & il vaut mieux chercher le second terme de la Série, en substituant $\frac{xx}{a}+u$ à y dans la Proposée : d'où résulte la Transformée $aauu + axuu - xxuu + x^3u - \frac{2x^4u}{a} - \frac{x^6}{aa} = 0$, qui étant mise sur le Triang. analyt. a une déterminatrice PLANCHE XXVI.

```
o  o  o  o  o  o  *
 o  o  o  o  *  o
  o  o  *  *  o
   o  *  o  o
    *  o  o
     o  o
      o
```

qui donne $aauu + x^3u - \frac{x^6}{aa} = 0$, ou $u = (-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})\frac{x^3}{aa}$. La double Série est donc $y = \frac{xx}{a} + (-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})\frac{x^3}{aa}$ &c, & comme dès le troisiéme terme elle est réguliére, on voit qu'elle n'a aucun terme ni imaginaire, ni demi-imaginaire. Ainsi les deux Branches qui se touchent à l'Origine, y font un Embrassement complet [ci-dessus III. 2]. Fig. 203.

Exemple V. On trouvera un Exemple d'*Osculinflexion* dans la Courbe désignée par l'éq : $a^3yy - 2abxxy - x^5 = 0$. Elle se peut réduire à cette forme $y = (b \pm \sqrt{(bb + ax)})\frac{xx}{aa}$, qui fait voir que chaque abscisse positive a deux ordonnées, l'une positive $(b + \sqrt{(bb + ax)})$ Fig. 204.

PLANCHE XXVI. $ax)) \frac{xx}{aa}$, l'autre négative $(b - \sqrt{(bb + ax)}) \frac{xx}{aa}$, toutes deux réelles à l'infini, & qui donnent les deux Branches infinies AC, Ac, dont l'Asymptote courbe est la Parabole indiquée par l'éq: $a^3yy = x^5$. Ces deux Branches se baisent à l'Origine, & y font une demi-osculation touchée par l'Axe des abscisses. Quand on prend x négative; les deux valeurs $(b \pm \sqrt{(bb + ax)}) \frac{xx}{aa}$ de y, sont positives tant qu'elles sont réelles, parce que $\sqrt{(bb + ax)} < \sqrt{bb}$, ou b, lorsque x est négative: mais ces racines deviennent imaginaires, quand $\sqrt{(bb + ax)}$ est imaginaire, quand x négative surpasse $\frac{bb}{a}$. Ainsi l'ordonnée BD de l'abscisse négative $AB = -\frac{bb}{a}$, est une limite qui sépare les ordonnées réelles des imaginaires. On l'auroit trouvée également par la Méthode *de Maximis* [§. 196], qui donne pour le *Maximum* d'x le point D, dont l'abscisse $AB = -\frac{bb}{a}$, & l'ordonnée $BD = \frac{b^5}{a^4}$, & pour le *Maximum* d'y le point d, dont l'abscisse $db = -\frac{24bb}{25a}$, & l'ordonnée $Ab = \frac{3456b^5}{3125a^4}$. Cette partie de la Courbe, qui tombe dans l'angle des abscisses négatives & des ordonnées positives, consiste donc en une feuille ou fleuron ADdA, dont les Branches font à l'Origine un demi-Embrassement, qui avec la demi-Osculation des Branches infinies CAc forme une Osculinflexion. C'est aussi ce qu'on trouvera par nos Méthodes. L'éq: $a^3yy - 2abx^2y - x^5 = 0$ mise sur le Tr: anal: a deux déterminatrices inférieures, dont l'une donne $a^3yy - 2abx^2y = 0$, CH. XIII. §. 220.

Ch. XIII. §. 220. $=0$, ou $y=\frac{2bx^2}{aa}$, & l'autre $-2abx^2y-x^5=0$, Planche XXVI.

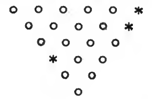
o o o o o *
o o o o o
o o * o
* o o
o o
o

ou $y=-\frac{x^3}{2ab}$. Il y a donc deux Séries; l'une, dont le prémier terme est $\frac{2b}{aa}x^2$, exprime les Branches CAd; l'autre, dont le prémier terme est $-\frac{1}{2ab}x^3$, désigne les Branches cAD: & ces quatre Branches forment l'Osculinflexion, qu'on voit à l'Origine [ci-dessus III. 3].

Exemple VI. La Courbe représentée par l'éq: $x^5+bx^4-a^3yy=0$, consiste en deux Branches infinies AD, Ad, qui se baisent à l'Origine A où elles ont l'Axe des abscisses pour Tangente commune, & de là s'étendent à l'infini du côté positif, ayant pour Asymptote la Parabole désignée par l'éq: $a^3yy=x^5$. Mais ces Branches continuées du côté négatif, y forment une Ovale ou Poire AFBfA. Car en donnant à l'équation cette forme $y=\pm\frac{x^2}{a}\sqrt{\frac{x+b}{a}}$, on voit 1°. que l'Axe des abscisses est un Diamétre, chaque abscisse ayant deux ordonnées égales, une positive & une négative; 2°. que prenant l'abscisse x positive, l'ordonnée y va en augmentant à l'infini; mais 3°. que prenant x négative, y devient imaginaire dès que x négative surpasse b, parce qu'alors $x+b$ Fig. 205.

 est

est une grandeur négative. Ainsi la Courbe, de ce côté, ne s'étend pas au-delà de $AB = b$. Si on cherche la nature du Point qui est à l'Origine, on trouvera, en mettant l'éq: $x^5 + bx^4 - a^3yy = o$ sur le Triang: analyt:



que la déterminatrice inférieure donne $bx^4 - a^3yy = o$, qui se décompose en ces deux $xx - ay\sqrt{\frac{a}{b}} = o$, $xx + ay\sqrt{\frac{a}{b}} = o$, qui indiquent, pour les Paraboles osculatrices, deux Paraboles ordinaires, égales, adossées l'une contre l'autre de part & d'autre de l'Axe des abscisses, qui est leur Tangente commune. En examinant cette Courbe, on trouvera [§. 173] qu'elle n'a d'autre Point multiple que celui de l'Origine, mais qu'elle a [§. 199] deux inflexions F, f, dont l'abscisse commune est $AE = (-\frac{4}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{5}})b$.

Il est clair que b diminuant, la Poire AFBfA diminuë aussi, & qu'elle disparoit quand b devient zéro. Alors les deux Branches DA, dA viennent se terminer en A, qui de Point d'Osculation devient Point de Rebroussement. Mais dans ce Point, l'Ovale, quoiqu'évanouïe, conserve quelque vestige de ses deux inflexions, puisque dans l'éq: $x^5 - a^3y^2 = o$, qui est celle de la Courbe, la double racine [$y = o$] du second Rang est censée diviser le troisiéme & quatriéme Rang, qui manquent. C'est-là le Point que nous avons nommé [ci-dessus III, 3] Point de Rebroussement à double inflexion.

Exem-

CH.XIII. §. 220. *Exemple VII.* On trouve dans les Courbes représentées par l'éq : $c^6yy - (a+b)c^3x^3y + abx^6 - c^3x^3y^2 = 0$ des Points d'Osculation, de Rebroussement en Bec, & d'Embrassement, formés par le contact de deux Paraboles cubiques [ci-dessus III, 4]. Ces Courbes ont [§§. 139. 142] deux Asymptotes, l'une Droite, qui est l'ordonnée CBc de l'abscisse $AB = c$, désignée par l'éq : $c^6yy - c^3x^3y^2 = 0$, ou $c^3 = x^3$, soit $x = c$; l'autre curviligne, qui est la Parabole semicubique fAg, indiquée par l'éq : $abx^6 - c^3x^3y^2 = 0$; ou $yy = \frac{ab}{c^3}x^3$. Si on cherche les PLANCHE XXVI. Fig. 206. num. 1. 2. 3. 4.

Maxima [§. 196], on trouvera, pour ceux de x, l'éq : $x^3 = c^3$ [qui ne désigne que l'Asymptote Cc] & l'éq : n.1.& 3.
$x^3 = -\frac{c^3(a-b)^2}{4ab}$ qui marque que le Point H dont l'abscisse $Ah = -c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$ & l'ordonnée $Hh = -\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$, est un *Maximum* de x. Pour ceux de y, on trouve les Points E, I, qui ont pour abscisses $x = c\sqrt[3]{(2+\frac{a+b}{\sqrt{ab}})} = Ae$, & $x = c\sqrt[3]{(2-\frac{a+b}{\sqrt{ab}})} = Ai$, & pour ordonnées $y = -a - b - 2\sqrt{ab} = eE$, $y = -a - b + 2\sqrt{ab} = iI$. Enfin, on trouve pour le Point qui est à l'Origine, l'éq : $c^6y^2 - (a+b)c^4x^3y + abx^6 = 0$, qui se décompose en ces deux équations $c^3y - ax^3 = 0$, $c^3y - bx^3 = 0$, qui sont l'une & l'autre à la Parabole cubique. n.1.& 2.

Donc, si a & b sont de même signe, la forme de la Courbe est à peu près telle qu'on la voit au n°. 1, composée de deux parties détachées, dont l'une dEG a deux Branches infinies, une hyperbolique Ed & une paraboli-

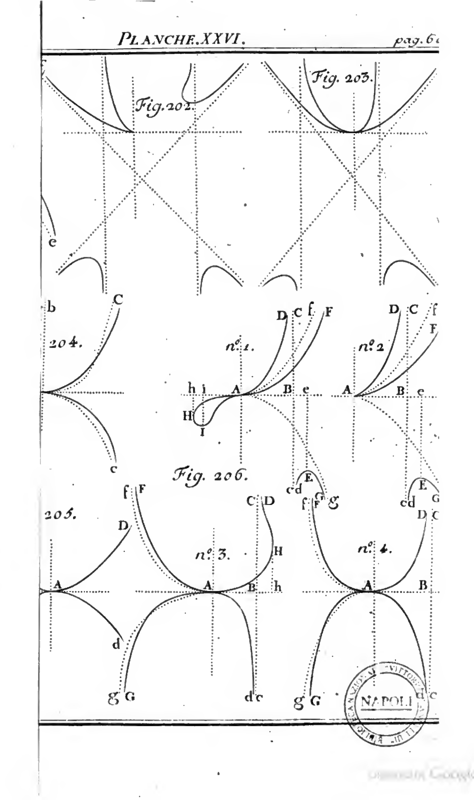
que

 que EG; & dont l'autre DAIHAF a aussi deux Branches infinies, une hyperbolique AD & une parabolique AF, & de plus un Fleuron AHIA, auquel elles se joignent en A par un *Embrassement avec inflexion.*

Ce Fleuron, dont la plus grande absciſſe eſt $Ah = -c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$, & la plus grande ordonnée $iI = -a - b + 2\sqrt{ab}$, diminuë d'autant plus que a & b aprochent plus de l'égalité; il disparoit quand ces deux grandeurs sont égales, & alors la Courbe [n°. 2] a un Bec à l'Origine.

Mais, quand les signes de a & de b sont différents, la forme de la Courbe change entiérement [n°. 3]. Elle conserve l'Asymptote droite Cbc, ordonnée de l'absciſſe $AB = c$; mais la Parabole ſemi-cubique fAg, qui eſt l'Asymptote courbe, paſſe du côté des absciſſes négatives, son paramétre $\frac{c^3}{ab}$ étant devenu négatif. Alors la Courbe n'a plus de Fleuron, mais elle conserve ses quatre Branches infinies, deux hyperboliques AHD, Ad, & deux paraboliques AF, AG. Les *Minima* des ordonnées disparoiſſent, parce que leurs absciſſes $x = \sqrt[3]{(2 \pm \frac{a+b}{\sqrt{ab}})}$ sont imaginaires, $\sqrt{ab}$ étant imaginaire quand a & b ont différents signes. Le *Maximum* des absciſſes subsiste au point H, dont l'ordonnée $hH = -\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$, & l'absciſſe $Ah = -c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$. Mais cette ordonnée devient infinie, & l'absciſſe se réduit à c, quand $a = -b$. Alors auſſi la Branche AHD, qui coupoit l'Asymptote CB & paſſoit au-delà, l'accompagne sans la couper, comme la Branche Ad [n°. 4].

§. 221.


Fig. 202.
Fig. 203.
204.
Fig. 206.
n.° 1.
n.° 2
205.
n.° 3.
n.° 4.
NAPOLI

§. 221. *Des Points triples.*

La division des Points triples eſt fondée ſur les mêmes Principes que celle des Points doubles. En ſuppoſant un Point triple à l'Origine, la Caſe de la Pointe & celles des deux prémiers Rangs ſont vuides, en ſorte que le plus bas Rang de l'équation eſt le troiſiéme $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3$ [§. 170], qui, égalé à zéro, fait une équation du troiſiéme dégré, par laquelle on déterminera les Tangentes du Point triple.

I. Si ſes trois racines ſont réelles & inégales, c'eſt un Point à trois Tangentes. Trois Branches s'y croiſent, & y font des Angles finis, meſurés par ceux des Tangentes. Ce Point ſe nomme *Point triple d'interſection*, ou *Double-Nœud*. Il ſe diviſe, comme le ſimple Nœud, par les Inflexions & Serpentements de ſes Branches. Il peut n'avoir point d'Inflexions; il peut en avoir une, deux, ou trois; & de même un, deux, ou trois Serpentements; ou il peut avoir une Inflexion, & un ou deux Serpentements, ou deux Inflexions & un Serpentement: varietés qui ſe multiplient, quand on ſuppoſe une triple Inflexion, &c.

Le Double-Nœud ſans Inflexion peut ſe trouver dans les Courbes du quatriéme Ordre; parce que la Tangente d'une de ſes Branches n'eſt cenſée la rencontrer que deux fois, & chaque autre Branche une fois: ce qui fait en tout quatre fois. Mais ſi une Branche eſt infléchie au Point de ſection, ſa Tangente eſt cenſée rencontrer la Courbe cinq fois: ce Cas ne peut donc commencer à avoir lieu que dans les Courbes du cinquiéme Ordre. Et ſi l'une des Branches ſerpente, ſa Tangente eſt cenſée rencontrer la Courbe ſix fois: ce qui ſuppoſe une Courbe au moins du ſixiéme Ordre. En général, quand une Branche ſubit une Inflexion du dégré t, ſa Tangente eſt

PLANCHE XXVII. censée la rencontrer $t+2$ fois, & les deux autres Branches 2 fois ; desorte que la Courbe qui a un Point triple de cette forme est au moins de l'Ordre $t+4$. CH. XIII. §. 221.

Ces Formes se discernent en examinant combien de Rangs consécutifs, supérieurs au troisiéme, sont divisibles par chaque racine de l'éq : $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = 0$ [§. 186].

Ou, ce qui est encore mieux, en cherchant le second terme des Séries que donnent ces racines. Si l'exposant d'x dans ce second terme est 2, la Branche n'a aucune Inflexion : si c'est 3, ou un nombre impair, elle a une Inflexion visible : si c'est 4, ou un nombre pair plus grand que 2, elle serpente. De plus, le signe de ce second terme aprend de quel côté de la Tangente tombe chaque Branche [§. 204]. Voyez ci-dessous *Ex. I.* 1.

II. Si des trois racines de l'équation tangentielle deux sont imaginaires ; il ne reste qu'une Tangente au Point triple. Il est formé par l'adhérence d'un Point conjugué à une Branche de la Courbe, ce qui le rend, à la vuë, semblable à un Point simple. On en a vu un Exemple cy-dessus [§. 220. *Ex. II.* 3]. On peut se le représenter comme une Ovale infiniment petite, touchée ou traversée par une Branche ; qui, dans ce Point, peut être sans Inflexion, ou avec Inflexion, ou avec Serpentement, &c. Et ici, comme dans le n°. préc. si l'Inflexion est du dégré t, la Courbe est au moins de l'ordre $t+4$. Voyez ci-dessous *Ex. III.*

III. Si l'équation tangentielle a deux racines égales ; le Point triple n'a que deux Tangentes, une simple & une double formée par la coïncidence de deux Tangentes. Il y a donc, en ce Point, deux Branches de même direction traversées par une troisiéme Branche de direction différente, laquelle Branche peut être sans Inflexion, ou avec Inflexion, Serpentement &c. On examinera donc, com-

me

CH. XIII. §. 221. me au §. préc. quelle est la nature du Point double que forment les Branches d'une même direction, & on connoitra par-là la nature du Point triple. PLANCHE XXVII.

1. Si, par ex. la racine double du troisiéme Rang ne divise pas le quatriéme [& ce Cas est le seul de ceux que nous examinons ici, qui puisse avoir lieu dans le quatriéme Ordre des Courbes : autrement l'équation, divisible en entier par cette racine, seroit réductible]; alors le Point triple [§. 220. III. 1] est un Rebroussement traversé par une Branche de direction différente, laquelle Branche ne peut, dans le quatriéme Ordre, avoir d'Inflexion, ni dans le cinquiéme de Serpentement ou d'Inflexion d'un dégré supérieur &c. Voyez ci-dessous *Ex. I.* 3. 4. *Ex. II.*

2. Si la racine double du troisiéme Rang divise le quatriéme & non le cinquiéme; le Point triple consiste [§. 220. III. 2] en une Osculation, réelle ou imaginaire, un Embrassement, réel ou imaginaire, ou un Bec, traversés par une Branche de direction différente, laquelle peut être sans Inflexion, ou avec Inflexion, ou avec Serpentement, &c. Et c'est dès le cinquiéme Ordre que les Courbes sont susceptibles de ces sortes de Points triples, dont on discernera la nature en continuant les Séries que fournissent les deux racines de l'équation tangentielle : calcul, dont la Remarque du §. 113 peut souvent dispenser en bonne partie. Voyez ci-dessous *Ex. IV.*

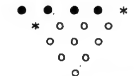
3. Mais ce n'est que dans le sixiéme Ordre, ou dans les Ordres supérieurs, qu'un Rebroussement à double Inflexion, ou une Osculinflexion [§. 220. III. 3] peut être traversée par une Branche de direction différente. Voyez ci-dessous *Ex. V.*

IV. Enfin si l'équation $gy^3 + hxyy + ixxy + lx^3 = 0$ n'a qu'une seule racine triple $y\sqrt[3]{g} + x\sqrt[3]{l} = 0$, soit $y =$

PLANCHE XXVII. Ax [en faiſant, pour abréger, $A = -\sqrt[3]{\frac{l}{g}}$], le Point triple eſt formé par trois Branches qui ſe touchent, & qui n'ont qu'une Tangente, mais triple, c'eſt-à-dire, formée par la coïncidence de trois Tangentes, & dont l'équation eſt $y = Ax$. CH. XIII. §. 221.

On connoitra la nature de ce Point, en cherchant le ſecond terme de la Série $y = Ax + \&c$: ce qui ſe fait en ſubſtituant $Ax + u$ à y dans l'équation propoſée. On aura une transformée, dont la Pointe reſtera vuide, auſſi bien que les deux prémiers Rangs, & trois Caſes du troiſiéme, qui n'aura de pleines que la ſeule Caſe u^3.

1. Si, dans le quatriéme Rang, la Caſe x^4 eſt remplie, la déterminatrice traverſera les Caſes u^3, x^4, & donnera



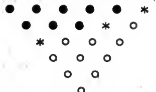
une équation cubique, dont deux racines ſont imaginaires; la troiſiéme étant $u = \sqrt[3]{Bx^4} = x\sqrt[3]{Bx}$. La triplicité de ce Point eſt donc inviſible, on ne voit qu'une ſeule Branche ſans Inflexion. Mais on peut ſuppoſer qu'il réſulte de l'évanouïſſement d'une double Feuille, devenuë infiniment petite. Voyez ci-deſſous *Ex. I. 2.*

Ce prémier Point triple à Tangente triple, peut convenir aux Courbes du quatriéme Ordre. Les ſuivants ne ſe trouvent que ſur les Courbes des Ordres ſupérieurs.

2. Si la racine $y - Ax = 0$ du troiſiéme Rang diviſe le quatriéme & non le cinquiéme; il faut voir ſi elle diviſe ce quatriéme Rang une ou pluſieurs fois.

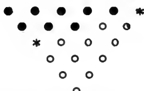
1). Si

CH. XIII. §. 221. 1). Si elle ne le divise qu'une fois, il manque au quatriéme Rang de la transformée la Case x^4, mais non la Case ux^3, & alors il y a deux déterminatrices inférieures, qui donnent $u = \pm x\sqrt{Bx}$ & $u = B'x^2$. Les Séries PLANCHE XXVII.



$y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ *&c*, $y = Ax + B'x^2$ *&c.* marquent un Rebroussement [§. 220. III, 1] traversé par une Branche sans Inflexion, & sous la même direction que celles qui font le Rebroussement. Voyez ci-dessous *Ex. VI.* 1.

2). Si la racine $y - Ax = 0$ divise plus d'une fois le quatriéme Rang, il manque à ce Rang, dans la transformée, la Case ux^3, & la déterminatrice passant par les

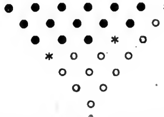


Cases u^3 & x^5, donne une équation cubique, qui a deux racines imaginaires, & une réelle $u = \sqrt[3]{Bx^5} = x\sqrt[3]{Bx^2}$. La Série $y = Ax + x\sqrt[3]{Bx^2}$ *&c.* marque une Branche avec Inflexion [§. 217]; mais la triplicité du Point est invisible. On la peut supposer formée par l'évanouïssement d'une Feuille. Voyez ci-dessous *Ex. VI.* 2.

PLANCHE XXVII. Ces deux sortes de Points triples peuvent convenir aux Courbes du cinquiéme Ordre. Ceux qui suivent sont reservez aux Ordres supérieurs. CH. XIII. §. 221.

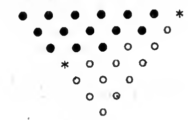
3. Quand la racine triple du troisiéme Rang, divise le quatriéme & cinquiéme, mais non le sixiéme; il faut distinguer le Cas, où elle ne divise le quatriéme Rang qu'une fois, de celui où elle le divise plusieurs fois.

1). Si elle ne le divise qu'une fois, la Case ux^3 reste pleine dans la transformée, qui a deux déterminatrices, d'où l'on tire les équations $u = \pm x\sqrt{Bx}$ & $u = B'x^3$. Les



Séries $y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c. $y = Ax + B'x^3$ &c. marquent un Rebroussement traversé, sous une même direction, par une Branche infléchie au Point de contact. Voyez ci-dessous *Ex. VII.* 1.

2). Si la racine $y - Ax = 0$ divise plus d'une fois le quatriéme Rang de la proposée, la Case ux^3 est vuide dans la transformée, dont la déterminatrice inférieure, passant par les Cases u^3, u^2x^2, ux^4, & x^6, donne une



équation

CH. XIII. §. 221. équation cubique, dont les trois racines soient $u = Bx^2$, $u = B'x^2$, $u = B''x^2$. PLANCHE XXVII.

1)). Deux de ces racines peuvent être imaginaires. Alors on n'a qu'une Série $y = Ax + Bx^2$ &c, & le Point triple est formé par l'adhérence d'un Point conjugué à une Branche sans Inflexion. Tel est, en particulier, le Cas où les deux Cases u^2x^2 & ux^4 sont vuides. Voyez ci-dessous Ex. VII. 2.

2)). Si les trois racines Bx^2, $B'x^2$, $B''x^2$ sont réelles & inégales; on a trois Séries, qui ayant le même prémier terme Ax, marquent trois Branches qui se touchent en un même Point sans Inflexion; soit qu'elles s'embrassent toutes trois, ce qui a lieu, quand B, B', B'' ont un même signe; soit qu'une des trois baise les deux autres, ce qui a lieu quand une des grandeurs B, B', B'' a un signe contraire à celui des deux autres.

3)). Si de ces trois racines deux sont égales, la troisiéme désigne une Branche sans Inflexion, qui passe par un Point double, de même direction, indiqué par la racine double, lequel peut être un Embrassement, réel, ou imaginaire, ou demi-imaginaire, c'est-à-dire un Rebroussement en bec. Ces Cas se déterminent, & on prouve qu'il n'y en a pas d'autres, par une suite de raisonnemens semblable à celle qui a été employée au §. préc. III. 2.

4)). Enfin, si ces trois racines sont égales, on ne peut encore rien décider sur la nature du Point triple: mais il faut, dans la transformée en u & x, substituer $Bxx + t$ à u; ce qui donnera une seconde transformée en t & x, dont la déterminatrice, partant de la Case t^3, fournira une équation cubique, sur laquelle repetant le raisonnement qu'on vient de faire, on trouvera toûjours que le Point triple est, ou un Embrassement de trois Branches, ou un Embrassement imaginaire traversé par une Branche de même direction, ou un Embrassement demi-

PLANCHE XXVII. demi-imaginaire, c'eſt-à-dire, un Bec, traverſé auſſi par une Branche de même direction. Sur tous ces Cas, voyez l'*Ex. VIII.* CH. XIII. §. 221.

Eclairciſſons la nature de ces Points par des Exemples.

Exemple I. 1. On a déja vû des Points triples d'interſection aux §. 170, *Ex. III*; 171. *Ex. II*; 172; 173, *Ex. IV*; 192; auxquels nous joindrons celui de la Courbe déſignée par l'éq: $y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0$. Elle eſt compoſée de trois Feuilles AB, AD, Ad, qui ſe réuniſſent à l'Origine par un Double-Nœud, où ſe croiſent les Branches BAD, DAd, dAB. En effet, l'équation de la Courbe étant réduite à cette Forme $x = \pm\sqrt{(-by \pm y\sqrt{(bb + 2ay - yy)})}$, on voit qu'elle a quatre racines, deſquelles, y étant poſitive, les deux $\pm\sqrt{(-by - y\sqrt{(bb + 2ay - yy)})}$ ſont imaginaires, ce qui eſt ſous le ſigne radical étant ou négatif, ou imaginaire, lorſque $bb + 2ay - yy$ eſt négatif. Mais les deux autres racines $\pm\sqrt{(-by + y\sqrt{(bb + 2ay - yy)})}$ ſont réelles, ſi $\sqrt{(bb + 2ay - yy)} > b$, ou $bb + 2ay - yy > bb$, c'eſt-à-dire, $2ay - yy > 0$, ou $2ay > yy$, ſoit $2a > y$. Par conſéquent, du côté des ordonnées poſitives, la Courbe a une Feuille, dont la longueur eſt $AB = 2a$. Mais y étant négative, les quatre valeurs d'x, $\pm\sqrt{(by \mp y\sqrt{(bb - 2ay - yy)})}$ ſont toutes quatre réelles, tant que $\sqrt{(bb - 2ay - yy)}$ eſt réelle; parce que b, ou $\sqrt{bb}$, ſurpaſſe néceſſairement $\sqrt{(bb - 2ay - yy)}$. Or cette grandeur eſt réelle, lorſque bb ſurpaſſe $2ay + yy$, ou que $bb + aa > aa + 2ay + yy$, ſoit $\sqrt{(bb + aa)} > a + y$, ou $y < \sqrt{(bb + aa)} - a$. Donc, du côté des ordonnées négatives, juſqu'à l'ordonnée $AC = \sqrt{(bb + aa)} - a$, il y a quatre abſciſſes x qui forment les deux Feuilles AD, Ad.

Fig. 207.

Ainſi l'Origine A eſt un Point triple d'interſection. C'eſt auſſi ce que montre l'équation miſe ſur le Tr. anal.

Son

CH. XIII. §. 221. Son plus bas Rang donne $-2ay^3 + 2bx^2y = 0$, qui a trois racines $y = 0$, $y = +x\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y = -x\sqrt{\frac{b}{a}}$. La prémiére indique une Tangente parallèle aux abſciſſes : c'eſt celle de la Branche dAD. Les deux autres montrent des Tangentes obliques aux coordonnées : ce ſont celles des Branches BAd, BAD. PLANCHE XXVII.

Pour ſavoir ſi ces Branches ont quelque Inflexion & de quel côté de leurs Tangentes elles tombent, on cherchera le ſecond terme des Séries $y = 0$ &c. $y = +x\sqrt{\frac{b}{a}}$ &c. $y = -x\sqrt{\frac{b}{a}}$ &c. Celui de la prémiére Série (& c'eſt proprement ſon prémier terme, car on ne compte pas o pour un terme) eſt donné par la déterminatrice inférieure, qui traverſe les Caſes x^2y & x^4, donnant l'éq: $x^4 + 2bx^2y = 0$, ou $y = -\frac{x^2}{2b}$. Ce terme indique que la Branche dAD eſt ſans Inflexion, & qu'elle tourne ſa concavité vers les ordonnées négatives.

```
* o o o *
 * o * o
  o o o
   o o
    o
```

Pour avoir le ſecond terme des deux autres Séries, on ſubſtituera $\pm x\sqrt{\frac{b}{a}} + u$ à y, dans la propoſée $y^4 + x^4 - 2ay^3 + 2bx^2y = 0$, & la transformée $\frac{aa+bb}{aa}x^4 \pm 6x^3u\sqrt{\frac{b^3}{a^3}} + \frac{6b}{a}xxuu \pm 4xu^3\sqrt{\frac{b}{a}} + u^4 - 4bx^2u \mp 6xu^2\sqrt{ab}$

PLANCHE XXVII. — $2au^3 = 0$ mise sur le Tr. anal. n'a qu'une déterminatrice CH.XIII. §. 221.
inférieure utile, qui donne $-4bxxu + \frac{aa+bb}{aa}x^4 = 0$,

```
* * * * *
 * * * o
  o o o
   o o
    o
```

ou $u = \frac{aa+bb}{4aab}xx$. Les Séries $y = +x\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{aa+bb}{4aab}xx$ &c. $y = -x\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{aa+bb}{4aab}xx$ &c. font voir que les Branches BAd, BAD tombent, par raport à leurs Tangentes, du côté des ordonnées positives, de maniére qu'elles n'ont aucune Inflexion [ci-dessus, I.].

2. Si dans l'équation proposée on fait $b = 0$, elle se reduit à $y^4 + x^4 - 2ay^3 = 0$. Alors l'ordonnée AC
Fig. 207. $[= \sqrt{(aa+bb)} - a]$ devient zéro, aussi bien que ses abscisses CD, Cd $[\pm\sqrt{(-ab+b(aa+bb))}]$. Les deux Feuilles AD, Ad, s'évanouissent, & les Tangentes des Branches BAd, BAD [désignées par les éq : $y = +x\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y = -x\sqrt{\frac{b}{a}}$, que la supposition de $b = 0$ réduit à $y = 0$, $y = 0$], se confondent avec l'Axe des abscisses, Tangente de la Branche dAD. La Courbe se réduit donc à une simple Ovale AB, qui garde pourtant à son
Fig. 208. Origine A des vestiges de la double Feuille. Car cette Origine est toujours un Point triple, puisque dans son éq : $y^4 + x^4 - 2ay^3 = 0$, le plus bas Rang est le troisiéme. La Tangente de ce Point est donnée par l'équat : $-2ay^3 = 0$, qui a trois racines égales $y = 0$, $y = 0$, $y = 0$. Et comme cette racine triple du troisiéme Rang ne

CH. XIII. §. 221. ne divise pas le quatriéme y^4+x^4, la triplicité de ce Point est invisible [ci-dessus IV. 1]. PLANCHE XXVII.

3. Mais si, dans la même équation $y^4+x^4-2ay^3+2bx^2y=0$, on suppose $a=0$; alors AB [$2a$] se réduit à rien, & la Feuille ABA disparoit. L'ordonnée AC [$\surd(aa+bb)-a$] devient égale à b, aussi bien que ses abscisses CD, Cd [$\pm\surd(-ab+b\surd(aa+bb))$]. La Courbe n'a plus que les deux Feuilles AD, Ad, qui se joignent en A par un Point triple formé d'un Rebroussement dAD, traversé par la Branche dABD sous une autre direction. La nature de ce Point se lit dans l'éq: $y^4+x^4+2bx^2y=0$, mise sur le Tr. anal. Car elle y a deux Fig. 207. Fig. 209.

$$\begin{matrix} * & o & o & o & * \\ & o & o & * & o \\ & & o & o & o \\ & & & o & o \\ & & & & o \end{matrix}$$

déterminatrices inférieures, qui donnent, l'une $2bx^2y+x^4=0$, soit $y=-\frac{x^2}{2b}$, l'autre $2bx^2y+y^4=0$, soit $x=\pm y\surd-\frac{y}{2b}$. La prémiére marque une Branche sans Inflexion, touchée par l'Axe des abscisses, & tournant sa concavité du côté des ordonnées négatives. La seconde indique deux Branches qui font un Rebroussement touché par l'Axe des ordonnées [ci-dessus III. 1].

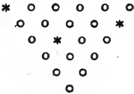
4. Dans cette derniére équation, le simple changement du signe du terme x^4, lui fait représenter une Courbe très différente. La précédente étoit finie : celle-ci a quatre Branches infinies & hyperboliques, dont les Asymptotes se croisent au point B, extrémité de l'ordonnée AB $=-\frac{2}{3}b$ [§. 143]. L'Origine est ici, comme dans la Fig. 210.

Hhhh 2 derniére

PLANCHE XXVII. dernière Courbe, un Point triple formé par un Rebrouſſement traverſé d'une Branche ſous une autre direction : mais ici c'eſt la convexité de cette Branche qui eſt tournée vers le Rebrouſſement, au lieu que là c'étoit ſa concavité. La déterminatrice, qui déſigne cette Branche, donnoit là $y = -\frac{x^2}{2b}$, ici elle donne $y = +\frac{x^2}{2b}$. C'eſt toute la différence de ces deux Points. CH. XIII. §. 221.

Exemple II. Si l'on veut un Rebrouſſement traverſé, ſous une direction différente, par une Branche infléchie, on en trouvera un Exemple fort ſimple dans la
Fig. 211. Courbe qu'exprime l'éq : $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$. Elle conſiſte en une Branche infinie CA, infléchie à l'Origine A, qui forme dans l'Angle des coordonnées poſitives une Feuille ADEA, puis rebrouſſant du Point A donne une ſeconde Branche infinie AFG qui ſubit en F une ſeconde Inflexion. Les Branches infinies AC, AFG, ſont paraboliques & ont pour Aſymptote courbe la Parabole cAg déſignée par l'éq : $y^5 + ax^4 = 0$ [§. 142]. Les *Maxima* de la Feuille, ſont les Points D, E, qui ont pour ordonnées Ad $= \frac{1}{2}b\sqrt[7]{\frac{27b}{2a}}$, Ee $= b\sqrt[7]{\frac{24b}{625a}}$, & pour abſciſſes Dd $= \frac{1}{2}b\sqrt[7]{\frac{9b^3}{8a^3}}$, Ae $= b\sqrt[7]{\frac{108b^3}{3125a^3}}$ [§. 196]. Si l'on cherche la nature du Point A on trouvera que c'eſt un Point triple, puiſque le plus bas Rang de l'équation miſe ſur le Tr. anal. eſt le troiſiéme, qui conſiſte dans le ſeul terme $-bbxyy$. Ce terme égalé à zéro a deux racines, une ſimple $x = 0$ & une double $y = 0$. Donc l'Axe des ordonnées ne touche qu'une Branche de la Courbe & l'Axe des abſciſſes en touche deux. Mais puiſque la racine $x = 0$, diviſe le quatriéme Rang $+ax^4$, & non le cinquiéme

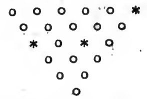
Ch. XIII. §. 221. me y^3, la Branche que touche l'Axe des ordonnées subit une Inflexion au Point A [§. 186]. C'est aussi ce que marque la déterminatrice qui traverse les Cases xy^2 & y^3, laquelle donne l'éq: $x = \frac{y^3}{bb}$; au lieu que celle qui passe par les Cases xy^2 & x^4, & qui donne l'éq: $y = \pm \frac{x}{b}\sqrt{ax}$, indique un Point de Rebroussement touché par l'Axe des abscisses [ci-dessus III. 1]. Planche XXVII.



Exemple III. L'éq : $y^3 - byy + xxy + \frac{x^5}{aa} = 0$ représente une Courbe composée de deux Branches paraboliques AB, AC, étenduës dans les angles des coordonnées de différents signes, & touchées à l'Origine par l'Ovale AD qui forme avec ces Branches une *Osculinflexion*. La longueur de cette Ovale est AD $= b$. Ainsi faisant $b = 0$, l'Ovale disparoit & ne conserve que ses Branches infinies. Mais alors l'Origine est un Point triple formé par l'adhérence d'un Point ou d'une Ovale infiniment petite à une Branche infléchie. Cela est marqué par l'équation tangentielle $y^3 + x^2y = 0$ qu'on trouve en mettant l'équation sur le Triangle anal. Elle a une racine réelle $y = 0$, qui donne pour Tangente l'Axe des abscisses, & deux imaginaires $y = \pm x\sqrt{-1}$, qui marquent le Point adhérent [ci-dessus, II]. Et comme la racine réelle $y = 0$ est censée diviser le quatriéme Rang qui manque, la Bran- Fig. 212.

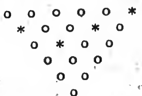
 che

PLANCHE XXVII. che de la Courbe subit une Inflexion à l'Origine. C'est aussi ce que désigne la Série qui représente cette Branche [§. 217]. Elle commence par le terme $\frac{x^5}{aa}$ donné par la déterminatrice qui traverse les Cases x^2y & x^5. CH. XIII. §. 221.



Exemple IV. L'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$ représente diverses Courbes, qui ont toutes deux Branches paraboliques AC, DF [§. 142]. Mais elles diffèrent extrémement, près de l'Origine A, selon le raport des grandeurs a, b, c. Si on cherche la Tangente de la Courbe en ce Point-là, on égalera à zéro le plus bas Rang, qui consiste dans le seul terme $acxy^2$, & comme cette équation a une racine simple $x = 0$ & une double $y = 0$, on conclurra que les deux Axes sont Tangentes. Mais pour déterminer la nature de ce Point, on mettra l'équation sur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices, dont l'une

Fig. 213. num. LII. III. IV.



donne l'éq: $-ay^4 + acxy^2 = 0$, ou $x = \frac{yy}{c}$ relative à la Branche que touche l'Axe des ordonnées. Elle fait voir que

CH. XIII. §. 221. que cette Branche est sans Inflexion à l'Origine, & qu'elle tourne sa concavité vers les abscisses positives lorsque c est positif, & vers les abscisses négatives quand c est négatif. C'est la Branche BADE [$n°$. I & IV] ou BADE [$n°$. II & III]. L'autre déterminatrice, rélative aux Branches que touche l'Axe des abscisses, donne l'éq: $acxy^2 + 2bx^3y + x^5 = 0$, ou $acy^2 + 2bx^2y + x^4 = 0$, qui a deux racines. PLANCHE XXVII.

Si $ac > bb$, ces racines sont imaginaires, & les Branches, que devroit toucher l'Axe des abscisses, se réduisent à un point adhérant à la Branche BADE [$n°$. I].

Si $ac = bb$, les deux racines sont égales, & les Branches qu'elles désignent forment un Bec EEF [$n°$. II] traversé par la Branche BADE. C'est un Bec & non un Embrassement; parce qu'entre la déterminatrice, qui passe par les termes xy^2, x^3y & x^5, & sa parallèle qui passe par les termes, ou plutôt par le terme y^4, du second Ordre, il y a trois intervalles [§. 113 & ci-dessus III, 2].

Si ac est positif & $< bb$, les racines de l'éq: $acy^2 + 2bx^2y + x^4 = 0$ sont inégales & négatives. Ainsi les deux Branches qu'elles désignent tournent leur concavité d'un même côté, sç. du côté des ordonnées négatives, & forment un Embrassement ELDEAIF traversé par la Branche BADE [$n°$. III].

Enfin, si ac est négatif, les racines de l'éq: $acy^2 + 2bx^2y + x^4 = 0$ sont l'une positive, l'autre négative. Donc les Branches qu'elles indiquent ont leurs convexités opposées, & forment une Osculation BAIC, EDLF, toujours traversée par la Branche BADE [$n°$. IV].

Ainsi l'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$ fournit des Exemples de tous les Points triples mentionés ci-dessus, $n°$. III, 2.

Cela deviendroit très-sensible par la résolution de l'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$, si l'on pouvoit aisément résoudre une équat: du 4e, ou du 5e dégré. Mais on pourra s'en

PLANCHE XXVII. s'en convaincre aussi, en faisant $x = \frac{uz}{a}$ & $y = \frac{uzz}{aa}$, sup- CH. XIII. §. 221.

positions qui transforment l'équation proposée en $\frac{u^6z^6}{a^6} - \frac{au^4z^6}{a^6} + \frac{2bu^4z^5}{a^5} + \frac{acu^4z^4}{a^4} = 0$, soit $uu - \frac{uz^3}{aa} + 2bu + ac = 0$, laquelle désigne une Courbe du quatriéme Ordre.

Fig. 212. num. 1, 2, 3, 4. Cette Courbe a deux Branches paraboliques bc, ef, dont l'Asymptote courbe est la Parabole cubique exprimée par l'éq : $uu - \frac{uz^3}{aa} = 0$, ou $aau = z^3$, & deux Branches hyperboliques ba, ed, dont l'Asymptote droite est l'Axe des abscisses & l'Asymptote courbe l'Hyperbole $-\frac{uz^3}{aa} + ac = 0$, ou $uz^3 = aac$, d'un paramétre positif quand c est positif [n°. 1, 2, 3] & d'un paramétre négatif quand c est négatif [n°. 4]. Cela suffit pour donner quelque idée du cours de cette Courbe; surtout si on ajoûte qu'elle rencontre l'Axe des ordonnées dans les Points indiquez par l'éq : $uu + 2bu + ac = 0$, à quoi se réduit son équation, quand on fait $z = 0$. Ainsi la Courbe ne rencontre point l'Axe des ordonnées, lorsque $ac > bb$, parce qu'alors [n°. 1] les racines de l'éq : $uu + 2bu + ac = 0$ sont imaginaires. La Courbe touche cet Axe, quand $ac = bb$, ce qui rend égales les racines de cette équation [n°. 2]. La Courbe coupe son Axe en deux Points, lorsque $ac < bb$, parce qu'alors l'éq : $uu + 2bu + ac = 0$, a deux racines inégales, & ces deux Points sont d'un même côté de l'Origine [n°. 3], lorsque ac est positif, les deux racines étant alors de même signe; au lieu que ces deux Points sont de part & d'autre de l'Origine [n°. 4] quand ac est négatif, les deux racines ayant alors différents signes.

Cette

CH. XIII. § 221. Cette Courbe du 4e. Ordre étant décrite, on décrira par son moyen celle du 5e. Ordre représentée par l'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$, en prenant, sur la premiére, une abscisse quelconque z & son ordonnée u, & donnant, pour la seconde, à l'abscisse $x[=\frac{uz}{a}]$ l'ordonnée $y[=\frac{uzz}{aa}]$. Il seroit facile d'en donner une Construction géométrique: mais elle n'est pas nécessaire ici. Il suffit de voir quelles parties de la Courbe du 5e. Ordre sont produites par les diverses parties de la Courbe du quatriéme. PLANCHE XXVII. Fig. 213. n. 1. & I.

D'abord, 1°. si celle-ci ne rencontre point l'Axe des ordonnées, la Branche infinie ab produit la Branche finie AB. Car si l'on prend z infinie, puisqu'à l'infini la Branche ab se confond avec son Asymptote courbe dont l'équation est $uz^3 = a^3c$, on aura $y\left[=\frac{uzz}{aa}=\frac{uz^3}{aaz}=\frac{a^3c}{aaz}\right] = \frac{ac}{z}$ infiniment petite, & $x=\left[\frac{uz}{a}=\frac{uz^3}{azz}=\frac{a^3c}{azz}=\right]\frac{aac}{zz}$ infiniment plus petite encore. Donc, au point de la Branche ab qui est infiniment éloigné de l'Origine, répond le point A sur l'Origine où la Courbe touche l'Axe des ordonnées, puisque x est infiniment plus petite que y. Mais, si l'on prend z finie, u le sera aussi, & de même $x\left[=\frac{uz}{a}\right]$ & $y\left[=\frac{uzz}{aa}\right]$. Par ex. le point b duquel l'ordonnée bg est $=\sqrt{ac}$, & l'abscisse Og $=\sqrt[3]{(2aab + 2aa\sqrt{ac})}$, donne le point B, dont l'abscisse $A\beta = \sqrt[3]{(2acc + 2bc\sqrt{ac})}$ & l'ordonnée $\beta B = \sqrt[3]{\frac{c(2b+2\sqrt{ac})^2\sqrt{ac}}{a}}$.

PLANCHE XXVII. Ainſi toute la Branche infinie ab ne donne que la Branche finie AB. Mais la Branche infinie bc, dont les abſciſſes & les ordonnées croiſſent à l'infini, produit la Branche infinie BC, dont les coordonnées vont auſſi à l'infini. Il en eſt de même des Branches DE, EF produites par les Branches dc, ef; avec cette différence que les coordonnées z & *u* des Branches de, ef étant négatives, les abſciſſes $x [= \frac{uz}{a}]$ des Branches DE, EF ſeront poſitives, & leurs ordonnées $y [= \frac{uzz}{aa}]$ négatives. Ainſi dans ce 1^r. Cas la Courbe du 5e. Ordre CBADEF n'a que deux Branches infinies ABC, DEF qui partent toutes deux de l'Origine A. Ce Point A eſt pourtant un Point triple, mais ſa triplicité eſt inviſible. CH. XIII. §. 221.

a.2 & II. 2°. Si la Courbe du 4e. Ordre touche en e ſon Axe des ordonnées, les Branches abc produiſent, comme dans le Cas précéd. la Branche ABC. Mais la Branche dc produit une Feuille *D*E*E*. Car le point d infiniment éloigné donne, comme ci-deſſus, le point D où la Courbe touche l'Axe des ordonnées. Et le Point e, où l'abſciſſe z eſt nulle, ou infiniment petite, & l'ordonnée *u* [Oe] finie, donne à la Courbe du 5e. Ordre une abſciſſe x $[= \frac{uz}{a}]$ infiniment petite, & une ordonnée $y [= \frac{uzz}{aa}]$ infiniment plus petite. Le point e donne donc un Point E, où la Courbe touche l'Axe des abſciſſes. Ainſi la Branche infinie de produit une Feuille D*E*E. Et la Branche infinie ef produiſant, comme cy-deſſus, une Branche infinie EF touchée en E par l'Axe des abſciſſes, la Courbe CBAD*E*EF a, à l'Origine, un Point triple qui conſiſte en un Bec *E*EF traverſé par la Branche BAD*E* de direction différente.

3°. Si

Ch.XIII §. 221. 3°. Si la Courbe abcdef coupe l'Axe des ordonnées en deux points i, l, d'un même côté de l'Origine, on verra, comme dans les Cas précédents, que les Branches abc produisent la Branche ABC, que la Branche di produit la Feuille DEI, & que la Branche lf produit la Branche infinie LF. Mais l'arc iel produit un Fleuron IAEDL. Car les points i, l, dont les abscisses sont infiniment petites & les ordonnées finies, donnent, comme ci-dessus, les points I, L, dont les abscisses sont infiniment petites, & les ordonnées infiniment plus petites; c'est-à-dire, des Points où la Courbe touche, à l'Origine, l'Axe des abscisses. Et les autres Points, comme e, dont l'abscisse z [Oh] est positive, & l'ordonnée u [he] négative, donnent des Points E, dont l'abscisse $x \left[= \frac{uz}{a}\right]$ & l'ordonnée $y \left[= \frac{uzz}{aa}\right]$ sont négatives, ce qui produit le Fleuron IAEDL. Ainsi l'Origine de la Courbe CBADELDEAIF est un Point triple, qui consiste en un Embrassement traversé par une Branche de direction différente. PLANCHE XXVII. Fig. 213. num. 3. & III.

4°. Enfin, si la Courbe abcdef coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine O, la Courbe CIABILEDLF a, à l'Origine, un Point triple formé par une Osculation traversée par une Branche de direction différente. Car les mêmes raisons que ci-dessus font voir que les Branches infinies ic, lf, produisent les Branches infinies IC, LF, & que les Branches infinies abi, led, produisent les Feuilles ABI, LED. num. 4. & IV.

Exemple V. On trouve une Osculinflexion traversée par une Branche de direction différente dans la Courbe que représente l'éq: $x^6 + aay^4 + aax^3y + a^3xyy = 0$. En la mettant sur le Tr. anal. elle a trois déterminatrices inférieures, qui donnent ces trois équations, Fig. 214.

 a^2y^4

PLANCHE XXVII. $a^2y^4 + a^3xyy = 0$, $a^3xyy + aax^3y = 0$, & $aax^3y + x^6 = 0$, ou $x = -\frac{yy}{a}$, $y = -\frac{xx}{a}$, & $y = -\frac{x^3}{aa}$. La Ch. XIII. §. 221.

o o o o o o *
o o o o o o
* o o * o
o * o o
o o o
o o
o

Fig. 214. n. 1. & 2. prémiére marque une Branche sans Inflexion BAHG, touchée par l'Axe des ordonnées & tournant sa concavité vers les abscisses négatives. La seconde indique une Branche, aussi sans Inflexion, GHFE, touchée par l'Axe des abscisses, & tournant sa concavité vers les ordonnées négatives. Et la troisiéme désigne une Branche infléchie BCDE, touchée aussi par l'Axe des abscisses. Ces trois Branches forment ainsi une Osculinflexion traversée par une Branche de direction différente. [ci-dessus III. 3].

On s'assurera que ces Branches ont bien la position indiquée par les équations des déterminatrices, en analysant l'équation de cette Courbe de la même maniére qui a été employée dans l'Ex. préc. Si on substituë $\frac{uz}{a}$ à x, & $\frac{uzz}{aa}$ à y dans la proposée $x^6 + aay^4 + aax^3y + a^3xyy = 0$, on la transformera en $u^3z + uz^3 + a^3u + a^4 = 0$, qui représente une Courbe du 4e. Ordre [n°. 2], laquelle a quatre Branches hyperboliques [§. 138]. Deux ba, efgh ont pour Asymptote droite l'Axe des abscisses, & pour Asymptote courbe l'Hyperbole dont l'éq: est $uz^3 + a^4 = 0$, ou $u = -\frac{a^4}{z^3}$. Deux autres bc, ed ont pour

Asymp-

Ch. XIII. §. 221. Asymptote droite l'Axe des ordonnées, & pour Asymptote courbe l'Hyperbole désignée par l'éq: $u^3z + a^3u = 0$, ou $z = -\frac{a^3}{uu}$. Ainsi la Courbe a, à peu près, la figure qu'on voit ici [n°. 2]. Son ordonnée primitive Of est $-a$. Et le *Maximum* e des abscisses est déterminé par l'abscisse Oi, racine de l'éq: $4(z^3 + a^3)^3 + 28a^8z = 0$, & par l'ordonnée $ie = -\frac{3a^4}{2(z^3 + a^3)}$. PLANCHE XXVII.

Cette Courbe [n°. 2] sert à décrire l'autre [n°. 1], en prenant dans la prémiére une abscisse quelconque z & son ordonnée u, & donnant, pour la seconde, à l'abscisse $x\,[= \frac{uz}{a}]$ une ordonnée $y\,[= \frac{uzz}{aa}]$. Sans entrer ici dans un détail, qui seroit superflu après ce qui a été dit dans l'Ex. préc. il suffira de remarquer que la Branche abc, infinie de part & d'autre, produit la Feuille ABC, qui touche, au Point A, les deux Axes: que la Branche infinie def produit le Fleuron DEF, dont les deux Branches touchent, au Point A, l'Axe des abscisses: & que la Branche infinie fgh produit la Feuille FGH, qui touche les deux Axes au Point A. La Courbe entiére est donc composée de trois Feuilles ABC, DEF, FGH, ou de trois Branches BAHG, GHDE, & EFACB, qui forment à l'Origine une Osculinflexion traversée par une Branche de direction différente.

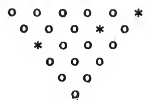
Voici maintenant des Exemples de Points triples dont les trois Branches ont au Point de contact une même direction. Et d'abord,

Exemple VI. 1. Un Rebroussement DAE, touché par une Branche BAC, se voit à l'Origine de la Courbe représentée par l'éq: $aay^3 - bx^3y + x^5 = 0$. Son cours Fig. 215.

 consiste

PLANCHE XXVII. consiste en une Branche BAC, qui étenduë à l'infini dans l'angle des abscisses négatives & des ordonnées positives, touche à l'Origine A l'Axe des abscisses, forme dans l'angle des coordonnées positives un Fleuron ACDA & revient toucher l'Axe des abscisses en A, d'où rebroussant en AE, elle se jette à l'infini dans l'angle des abscisses positives & des ordonnées négatives. L'Asymptote des Branches infinies est la Parabole $a^2y^3 + x^5 = 0$. Les Points principaux sont, le *Maximum* C des abscisses, qui a pour abscisse Ac $= \frac{18b^3}{125a^2}$, & pour ordonnée cC $= \frac{108b^5}{3125a^4}$; le *Maximum* D des ordonnées, qui a pour abscisse Dd $= \frac{8b^5}{243a^4}$ & pour ordonnée Ad $= \frac{4b^3}{27a^2}$; mais sur-tout l'Origine A qui est un Point triple, dont les trois Branches sont touchées par l'Axe des abscisses. Car les Tangentes sont données par l'équation du plus bas Rang $a^2y^3 = 0$, qui n'a qu'une racine triple $y = 0$. Et comme cette racine divise, mais une seule fois, le quatriéme Rang bx^3y, sans diviser le cinquiéme x^5, on conclurra [ci-dessus IV, 2, 1)] que ce Point A est un Rebroussement DAE, touché, ou traversé par une Branche BAC de même direction. CH. XIII. §. 221.

C'est aussi ce qu'on voit bien clairement en mettant l'équation sur le Tr. anal. Car elle a deux déterminatri-



ces

CH. XIII. §. 221. ces inférieures, qui donnent les éq : $a^2y^3 - bx^3y = 0$, ou $y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{bx}$, & $-bx^3y + x^5 = 0$, ou $y = \frac{x^2}{b}$, dont la premiére désigne le Rebroussement, & la seconde la Branche qui le touche. PLANCHE XXVII.

2. Si dans cette équation, on fait $b = 0$, le Fleuron ACDA s'évanouït & la Courbe est réduite à une Parabole dont l'éq: est $a^2y^3 + x^5 = 0$, qui, pour la Figure, ressemble assez à la Parabole cubique; mais qui porte à l'Origine un Point triple, vestige du Fleuron qui a disparu. Sa Tangente en ce Point est déterminée par l'éq: $a^2y^3 = 0$, dont la racine triple $y = 0$ est censée diviser, tant de fois qu'on voudra, le quatriéme Rang qui manque [ci-dessus IV, 2, 2)].

Exemple VII. L'éq : $x^6 + 2aax^3y - b^3y^3 = 0$ *Fig. 116.* représente une Courbe qui a du raport avec la précédente. On peut commencer son cours par la Branche infinie BA, qui étenduë dans l'angle des abscisses négatives & des ordonnées positives vient à l'Origine toucher & couper l'Axe des abscisses : infléchie en ce point, elle passe dans l'angle opposé & y forme le Fleuron ACDA, qui la ramène à l'Origine, où touchant de nouveau l'Axe des abscisses, elle rebrousse, & pousse dans l'angle des coordonnées positives une Branche infinie AE. Ce cours de la Courbe est rendu manifeste en résolvant son équation & lui donnant cette forme $x = \sqrt[3]{(-aay \pm y\sqrt{(a^4 + b^3y)})}$. Car on voit que, y étant positive, x a deux valeurs, une positive $\sqrt[3]{(-aay + y\sqrt{(a^4 + b^3y)})}$ & une négative $\sqrt[3]{(-aay - y\sqrt{(a^4 + b^3y)})}$, qui croissent toutes deux à l'infini & donnent les Branches infinies AE, AB. Mais, y étant négative, les valeurs d'x ne sont réelles,

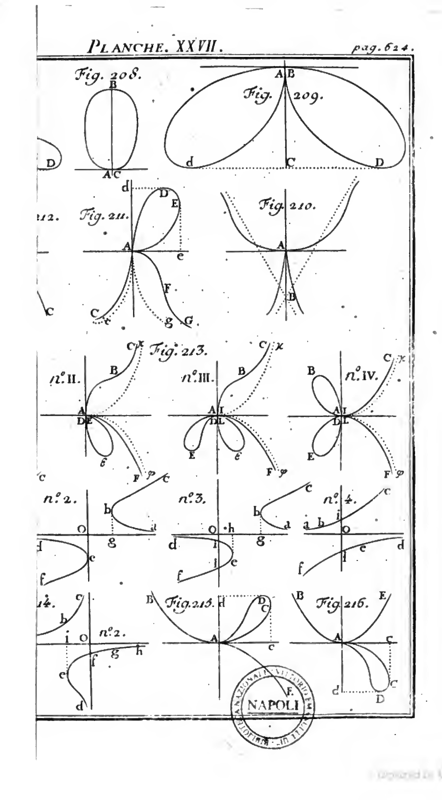
PLANCHE XXVII. réelles, qu'autant que $a^4 + b^3y$ est positive, c'est-à-dire, jusqu'à l'ordonnée Ad [y] $= -\frac{a^4}{b^3}$. Dans cet intervalle, elles sont toutes deux positives & donnent le Fleuron ACDA, dont les *Maxima* D, C sont déterminés par leurs ordonnées Ad $= -\frac{a^4}{b^3}$, cC $= -\frac{8a^4}{9b^3}$, & par leurs abscisses dD $= \frac{aa}{b}$, Ac $= \frac{4aa}{3b\sqrt{2}}$. Ainsi le Point triple de l'Origine est un Rebroussement DAE touché par une Branche infléchie BAC. CH. XIII. §. 221.

C'est aussi ce qu'on peut conclure de nos Principes. Car l'équation du plus bas Rang $b^3y^3 = 0$, n'a qu'une racine, mais triple, $y = 0$. Donc à ce Point; il n'y a qu'une Tangente pour les trois Branches de la Courbe, & cette Tangente est l'Axe des abscisses. La racine triple divisant, une seule fois, le quatriéme Rang $2aax^3y$, & divisant aussi, ou étant censée diviser, le cinquiéme Rang qui manque, mais non pas le sixiéme Rang x^6; le Point triple doit être un Rebroussement traversé par une Branche infléchie [ci-dessus IV, 3, 1)].

Mais on le voit encore mieux en mettant l'équation sur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices inférieures qui donnent les éq: $-b^3y^3 + 2aax^3y = 0$, ou $y = \pm\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{2x}{b}}$, & $2aax^3y + x^6 = 0$, ou $y = -\frac{x^3}{2aa}$, dont la prémiére marque le Rebroussement & la seconde la Branche infléchie qui le touche.

```
o o o o o o *
 o o o o o o
  o o o * o
   * o o o
     &c.
```

Exemple


Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210.
Fig. 211.
Fig. 213.
n.° II.
n.° III.
n.° IV.
n.° 2.
n.° 3.
n.° 4.
Fig. 215.
Fig. 216.
NAPOLI

CH. XIII. §. 221. *Exemple VIII.* Les Courbes que désigne l'éq: $x^3y^2 = ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6$ fournissent des Exemples de tous les Points triples dont il est question, ci-dessus IV, 3, 2). Qu'on substituë dans cette équation xxu à y, & qu'on divise la transformée par x^6, on aura $xuu = au^3 + bu^2 + cu + d$, équation qui représente des Courbes du troisiéme Ordre. Elles ont quatre Branches hyperboliques, dont deux ba, gh ont pour Asymptote courbe l'Hyperbole exprimée par l'éq: $xuu = d$ [§. 138], ce qui fait voir qu'elles embrassent l'Axe des abscisses, qui est leur Asymptote droite, se jettant du côté négatif, si d est négative [$n°$. 1, 3, 5]; du côté positif, si d est positive [$n°$. 2, 4, 6]. Les deux autres Branches hyperboliques dc, gf, ont pour Asymptote droite l'Oblique ef désignée par l'éq: $x = av + b$, & pour Asymptote courbe l'Hyperbole ordinaire [§. 143]. Ces Courbes rencontrent leur ordonnée primitive en autant de points que l'éq: $au^3 + bu^2 + cu + d = 0$ a de racines. Ce qui fait six Cas principaux. PLANCHE XXVIII. *Fig.* 217. *n.* 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1°. Celui où les trois racines sont réelles, inégales & de même signe: alors les trois points b, c, d, où la Courbe coupe l'Axe des ordonnées, sont d'un même côté de l'Origine. *num.* 1.

2°. Celui où ces trois racines étant réelles & inégales, il y en a une d'un signe & deux d'un autre signe: alors, des trois points b, d, g, il y en a un d'un coté de l'Origine, & deux de l'autre. *num.* 2.

3°. Celui où il y a deux racines réelles & égales, & une troisiéme réelle de même signe: dans ce cas, la Courbe touche l'Axe des ordonnées en d, & le coupe du même côté de l'Origine en b. *num.* 3.

4°. Celui où la troisiéme racine a un signe différent de celui des racines égales: alors la Courbe touche l'Axe *num.* 4.

PLANCHE XXVIII. des ordonnées d'un côté en b, & le coupe d'un autre côté de l'Origine en g. CH. XIII. §. 221.

num. 5. 5°. Celui où les trois racines sont égales: alors la Courbe touche & coupe l'Axe en un même Point b d, qui est un Point d'inflexion.

num. 6. 6°. Celui où il n'y a qu'une racine réelle & deux imaginaires; en ce cas la Courbe ne coupe qu'en un Point g l'Axe des ordonnées.

Je passe sous silence quelques varietés, qui pourroient subdiviser ces Cas, mais qui ne sont pas essentielles.

On peut, par le moyen de ces Courbes du 3e. Ordre, décrire géométriquement celles du 6e. que définit l'éq: $x^3y^2 = ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6$, en prenant, sur les prémiéres, une abscisse quelconque x & son ordonnée u, & donnant, pour les autres, à la même abscisse x une ordonnée y [$= xxu$].

n. 1. & 1. La Courbe abcdefgh produit la Courbe ABBCCDE FGH. Les Branches hyperboliques b a, g h donnent des Branches paraboliques BA, GH, asymptotes de la Parabole semi-cubique αBπ, dont l'éq: est $yy = dx^3$, ou $y = \pm x\sqrt{dx}$. Car l'abscisse x des points a, h étant supposée infinie, leur ordonnée u [$= \sqrt{\frac{d}{x}}$] est infiniment petite; mais l'ordonnée y des points A, H est [$xxu = xx\sqrt{\frac{d}{x}}$] $= x\sqrt{dx}$. Les Branches hyperboliques de, gf donnent les Branches paraboliques DE, GF, asymptotes de la Parabole cubique εBφ, dont l'éq: est $y = \frac{x^3}{a}$. Car l'abscisse x des points e, f étant prise infinie, positive ou négative, leur ordonnée u [$= \frac{x}{a}$] est aussi infinie du même signe:

CH. XIII. §. 221. signe: mais l'ordonnée y des points E, F est $[xxu =] \frac{x^3}{a}$. PLANCHE XXVIII. Fig. 217.
Ainsi les quatre Branches hyperboliques de la Courbe $n°$. 1, produisent les quatre Branches paraboliques de la Courbe $n°$. I. Mais les deux arcs, qui sont entre bc, & cd, produisent les Fleurons BBC, CCD, dont les Branches touchent l'Axe des abscisses à l'Origine; parce qu'à l'abscisse x infiniment petite des points b, c, d, répondent des ordonnées u finies Ob, Oc, Od : mais à une pareille abscisse, dans l'autre Courbe, répondent des ordonnées y [$= xxu$] infiniment plus petites que l'abscisse x. La Courbe produite est donc composée de quatre Branches paraboliques & de deux Fleurons.

La Courbe abcde fgh du $n°$. 2 produit la Courbe ABCDE FGH du $n°$. II. qui, avec un seul Fleuron BCD produit par l'arc bcd, a quatre Branches paraboliques, BA, GH, DE, GF produites par les Branches hyperboliques ba, gh, de, gf. Les deux prémiéres ont pour Asymptote courbe la Parabole sémi-cubique $\alpha B \pi$: les deux derniéres la Parabole cubique $\epsilon B \varphi$. *n.2.& II.*

La Courbe ABCDE FGH du $n°$. III, produite par la Courbe abcde fgh du $n°$. 3, a aussi quatre Branches paraboliques BA, GH, DE, GF produites comme dans les Cas précédents & ayant les mêmes Asymptotes. A ces Branches se joint un Fleuron BCD, produit par l'arc bcd. *n.3.&III.*

La Courbe ABE FGH [$n°$. IV] produite par la Courbe abe fgh [$n°$. 4] n'a point de Fleuron, mais seulement les quatre Branches paraboliques, qui passent toutes quatre par l'Origine, & y touchent l'Axe des abscisses. *n.4.&IV.*

La Courbe ABE FGH du $n°$. V, produite par la Courbe abe fgh du $n°$. 5, est aussi sans Fleuron, & a les quatre Branches paraboliques BA, GH, DE, GF : mais il n'y a que la 1e. & la 3e. qui passent par l'Origine. *n.5.& V.*

PLANCHE XXVIII. num. 6. & VI. Il en est de même de la Courbe ABE FGH du *n°*. VI, produite par la Courbe a b e f g h du *n°*. 6, si ce n'est que ce sont les Branches GF. GH qui passent par l'Origine. CH. XIII. §. 221.

Ainsi la Courbe du *n°*. I dégénére en celle du *n°*. III, quand le Fleuron CCD disparoit, & celle-ci, par l'évanouissement du Fleuron BCD dévient la Courbe du *n°*. V. De même la Courbe du *n°*. II, se change en celle du *n°*. IV, quand le Fleuron BCD se réduit à rien, & la Courbe du *n°*. IV se transforme en celle du *n°*. VI, quand le Bec ABE se retire & s'émousse.

Toutes ces Courbes ont à l'Origine un Point triple. Celui du *n°*. I est un Embrassement de trois Branches : celui du *n°*. II un Embrassement & Osculation ; celui des *n°*. III & IV un Bec touché par une Branche qui l'embrasse ou le baise : enfin ceux des *n°*. V & VI n'ont qu'une Branche, mais on peut supposer au *n°*. V les Fleurons du *n°*. I devenus infiniment petits, & au *n°*. VI un Point adhérent.

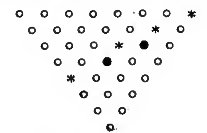
Tout cela se lit dans l'éq: $x^3yy = ay^5 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6$ mise sur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices

```
o  o  o  o  o  o  *
  o  o  o  *  *  o
    o  o  *  o  o
      *  o  o  o
        o  o  o
          o  o
            o
```

supérieures, qui donnent les éq: $ay^5 = x^3y^2$ & $x^3y^2 = dx^6$, ou $y = \frac{x^3}{a}$, $y = \pm x\sqrt{dx}$, des Paraboles asymptotes des Branches infinies. Elle a aussi une détermina-trice

CH. XIII. §. 221. trice inférieure qui donne l'éq : $ay^3 + bxxyy + cx^4y + dx^6 = 0$, dont les racines font réelles ou imaginaires, égales ou inégales, de même ou de différents fignes, à l'imitation de celles de l'éq : $au^3 + buu + cu + d = 0$, en laquelle elle fe transforme par la fubftitution de xxu à y. PLANCHE XXVIII.

C'eft donc ici le Cas du n°. IV, 3, 2) ci-deffus, & pour démêler les différents Points qu'il renferme, il faut chercher le fecond terme des Séries $y = Bx^2$ &c. dont le prémier terme eft donné par l'éq : $ay^3 + bx^2yy + cx^4y + dx^6 = 0$. On fubftituera donc $Bxx + u$ à y dans la propofée, & on mettra la transformée fur le Tr. anal. Le feul terme x^3y^2 remplira les Cafes x^3u^2, x^5u & x^7 [§. 105]: mais les termes y^3, x^2yy, x^4y, x^6, qui étoient fur la déterminatrice, laifferont vuides, ou la feule Cafe x^6, ou les deux x^6, x^4u, ou les trois x^6, x^4u, x^2u^2; felon que Bx^2 eft une racine fimple, double, ou triple de l'éq : $ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6 = 0$ [§. 107].



Si Bxx eft une racine fimple, il ne manque que la Cafe x^6, & la déterminatrice inférieure, paffant par les Cafes x^4u & x^7, donnera $u = Cx^3$.

Si Bxx eft une racine double, il manque les Cafes x^6 & x^4u, & la déterminatrice paffant par les Cafes x^2u^2 & x^7, donnera $u = \pm\sqrt{Cx^5} = \pm x^2\sqrt{Cx}$.

Si Bxx eft une racine triple, il manque les Cafes x^6, x^4u

x^4u & x^2u^2 : la déterminatrice passe par les Cases u^3 & x^7, & donne $u = \sqrt[3]{Cx^7} = xx\sqrt[3]{Cx}$.

Donc si l'éq: $ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6 = 0$ a trois racines inégales, on a trois Séries $y = Bxx + Cx^3$ &c, $y = B'xx + C'x^3$ &c, $y = B''xx + C''x^3$ &c, qui marquent un Embrassement de trois Branches [n^o. I], si B, B', B'' ont le même signe; ou un Embrassement & une Osculation [n°. II], si le signe d'une de ces trois grandeurs est différent de celui des deux autres.

Si l'éq: ay^3 &c $= 0$ a une racine simple & une racine double, les Séries sont $y = Bxx + Cx^3$ &c, $y = B'xx + x^2\sqrt{C'x}$ &c, $y = B'xx - x^2\sqrt{C'x}$ &c. ce qui marque un Rebroussement en Bec, embrassé [n°. III] ou baisé [n°. IV] par une autre Branche, selon que B & B' ont un même ou un différent signe.

Si l'éq: ay^3 &c $= 0$ n'a qu'une racine triple, il n'y a qu'une Série $y = Bxx + xx\sqrt[3]{Cx}$ &c, les deux autres étant imaginaires : ce qui désigne une Branche réelle avec un Embrassement imaginaire [n^o. V].

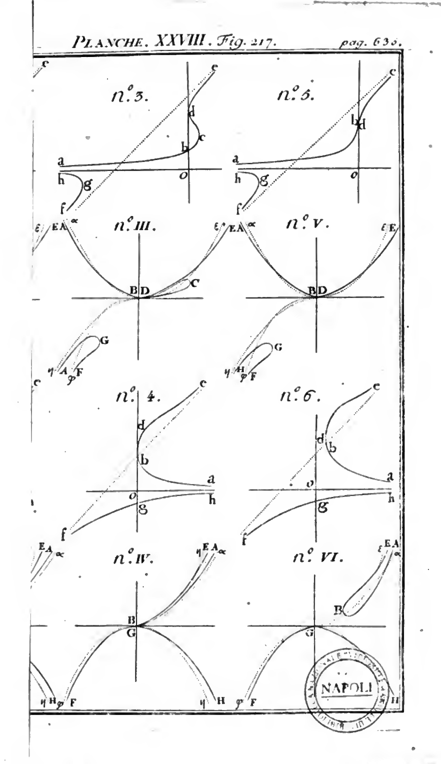
Enfin, si l'éq: $ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6 = 0$, n'a qu'une racine simple, les deux autres étant imaginaires; on n'a qu'une Série $y = Bxx + Cx^3$ &c. qui marque une seule Branche réelle avec un Point adhérent [n°. VI].

Mais en voilà bien assez sur les Points triples.

§. 222. *Des Points quadruples.*

Si l'Origine est prise sur un Point quadruple, le Rang le plus bas de l'équation mise sur le Triangle analytique, est le quatriéme $my^4 + nxy^3 + ox^2y^2 + px^3y + qx^4$. Ce Rang égalé à zéro donne une équation du 4e. dégré, que nous apellerons E, & dont les racines sont les équations tangentielles du Point quadruple. Leurs varietés présentent huit Cas.

Cas I.


n.º 3.
n.º 5.
n.º III.
n.º V.
n.º 4.
n.º 6.
n.º IV.
n.º VI.

CH. XIII. §. 222. *Cas I.* Si l'éq: *E* a ses *quatre racines réelles & inégales*; le Point quadruple a quatre Tangentes & quatre Branches qui se croisent à angles finis, & forment un *Point quadruple d'interfection*, un *Triple-Nœud*, ou *Double Point de Croix.* Ce Point peut avoir une, deux, trois, ou quatre Branches avec Inflexion ou Serpentement de tous les dégrés. Mais si quelque Branche a une Inflexion du dégré t, la Courbe sera au moins de l'Ordre $t+5$, parce que la Tangente de la Branche infléchie est censée la rencontrer en $t+2$ points, & les trois autres Branches en 3 points, ce qui fait $t+5$ points. Ainsi dans le cinquiéme Ordre aucune Branche d'un Triple-Nœud ne peut être infléchie, & dans le sixiéme Ordre aucune ne peut serpenter. Voyez ci-dessous *Ex. I*, 1. PLANCHE XXVIII.

Au reste ici, comme dans les Points doubles & triples, on connoitra de quel côté chaque Branche tourne sa concavité, en cherchant le second terme de la Série qui la représente, & dont le prémier est donné par une racine de l'éq: *E*.

Cas II. Si des quatre racines de l'éq: *E*, *deux* sont *imaginaires & deux réelles inégales*; celles-ci désignent deux Tangentes & deux Branches qui font un *Point de Croix*, & celles-là marquent un *Point invisible* posé sur l'interfection des Branches qui se croisent, & dont aucune ne peut être infléchie dans le cinquiéme Ordre, ni serpenter dans le sixiéme. Voyez *Ex. I.* 2.

Cas III. Mais si les *quatre racines* de l'éq: *E* sont *imaginaires*; le *Point* quadruple est *conjugué*. Voyez *Ex. I.* 3.

Cas IV. Si l'éq: *E* a *une racine double & deux simples*; le Point quadruple est formé par le concours d'un *Nœud avec un Point double à directions coïncidentes*, lequel sera [§. 220, III] ou un Rebroussement, ou un Bec, ou un Embrassement, ou une Osculation réelle ou imaginaire, ou une Osculinflexion, ou une Embrassinflexion, ou &c.

 &c. Mais, à s'en tenir aux Courbes du cinquiéme & du sixiéme Ordre;

1. Si la racine double du 4e. Rang ne divise pas le 5e. ce Point double sera un Rebroussement [§. 220, III, 1], qui devient Point quadruple à cause des deux Branches qui le traversent, & desquelles aucune ne peut être infléchie dans le cinquiéme Ordre. Voyez *Ex. I.* 4.

2. Si cette racine double divise le 5e. Rang & non le 6e, le Point quadruple peut être une Osculation réelle ou imaginaire, un Embrassement, ou un Bec, traversé par deux Branches, qui peuvent être infléchies, mais qui ne peuvent serpenter, dans le sixiéme Ordre des Courbes. On déterminera la nature du Point double qui concourt à former le Point quadruple, par les Régles du §. 220, III, 2. Voyez *Ex. II.* 1.

Cas V. Si l'éq: *E* a *une racine double & deux imaginaires;* celles-ci n'indiquent qu'un *Point adhérent au Point double à directions coïncidentes;* ce qui en fait un Point quadruple. Voyez *Ex. I.* 5. & *Ex. II.* 2.

Cas VI. Si l'éq: *E* a *deux racines doubles*, le Point quadruple n'a que deux Tangentes, & il est formé par le concours de *deux Points doubles dont chacun a sa direction particuliére.* Sans passer le sixiéme Ordre, on a cinq de ces Points [§. 220. III. 1. 2], qui, combinés deux à deux, font quinze espéces de Points quadruples renfermés sous ce Cas. Voyez *Ex. I.* 6, *Ex. II.* 3, *Ex. V*, & *Ex. VI.*

Cas VII. Si l'éq: *E* a *une racine simple & une racine triple:* ce Point quadruple est formé par un *Point triple à directions coïncidentes traversé par une Branche de direction différente.* La Branche est désignée par la racine simple, & le Point triple par la racine triple [§. 221, IV]. En se renfermant dans les cinquiéme & sixiéme Ordres, il peut être,

1. D'une

CH. XIII. §. 222. 1. D'une triplicité invifible, refultante de l'évanouiffement de quelque Feuille : ce qui a lieu quand la racine triple du 4e. Rang ne divife pas le 5e. [§. 221. IV. 1]. Voyez ci-deffous *Ex. I.* 7. PLANCHE XXIX.

2. Un Rebrouffement touché par une Branche : ce qui arrive quand la racine triple du 4e. Rang divife une fois le 5e, fans divifer le 6e. [(§. 221. IV. 2. 1)]. Voyez ci-deffous *Ex. III.* 1.

3. Un Point d'une triplicité invifible, réfultante de l'évanouiffement d'une Feuille adhérente à une Branche infléchie : c'eft le cas où la racine triple du 4e. rang divife plus d'une fois le 5e. fans divifer le 6e. [(§. 221. IV. 2. 2)]. Voyez ci-deffous *Ex. III.* 2.

Cas VIII. Enfin, fi l'éq : E n'a qu'*une feule racine quadruple* $y - Ax = 0$; le Point quadruple de l'Origine n'a qu'une feule Tangente, dont la fituation eft donnée par l'éq : $y - Ax = 0$. En fubftituant dans la propofée $Ax + u$ à y, on aura une transformée, dans le 4e. Rang de laquelle il n'y aura que la Cafe u^4 qui foit pleine.

1. Si la racine $y - Ax = 0$ du 4e. Rang ne divife pas le 5e. de la propofée, la Cafe x^5 reftera pleine dans la transformée; & la déterminatrice inférieure donnera $u^4 = Bx^5$, ou $u = \pm \sqrt[4]{Bx^5} = \pm x\sqrt[4]{Bx}$. La Série $y = Ax \pm x\sqrt[4]{Bx}$ *&c.* indique un Rebrouffement ; mais qui eft Point quadruple, parce qu'il eft cenfé renfermer quelque Feuille évanouiffante. Voyez *Ex. I.* 8.

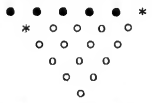
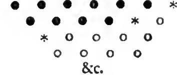


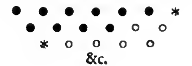
PLANCHE XXIX. Les Courbes du cinquiéme Ordre sont susceptibles de ce Point ; mais ceux dont on va parler ne peuvent convenir qu'aux Courbes du sixiéme Ordre, ou des Ordres supérieurs. CH. XIII. §. 222.

2. Si la racine quadruple du 4e. Rang divise une fois le 5e. & non le 6e. il manquera à la transformée la Case x^5, mais non les Cases ux^4 & x^6. Ainsi elle a deux déterminatrices inférieures, qui donnent $u^4 = Bux^4$ & $ux^4 = B'x^6$, soit $u = x\sqrt[3]{Bx}$ & $u = B'xx$. Il y a donc



deux Séries $y = Ax + x\sqrt[3]{Bx}$ *&c.* $y = Ax + B'x^2$ *&c.* qui désignent deux Branches sans Inflexion, lesquelles s'embrassent ou se baisent, selon que B & B' ont le même signe ou des signes opposés. Le Point de contact de ces deux Branches est censé quadruple, parce que l'éq: $u^4 = Bux^4$, ou $u^3 = Bx^4$, renferme deux racines imaginaires avec la racine réelle $u = x\sqrt[3]{Bx}$, Voyez *Ex. III.* 3.

3. Si la racine $y - Ax = 0$ divise plus d'une fois le 5e. Rang, sans diviser le 6e. de la proposée ; la déterminatrice inférieure de la transformée passera par les Cases u^4, u^2x^3 & x^6, & donnera une équation du second dé-



gré,

CH. XIII. gré, qui a deux racines $u = \pm x\sqrt{Bx}$, $u = \pm x\sqrt{B'x}$. PLANCHE XXIX.
§. 112. Il y a donc deux doubles Séries $y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c, $y = Ax \pm x\sqrt{B'x}$ &c. Voyez ci-dessous *Ex. IV.* Mais il faut remarquer,

1°. Que si B & B' sont imaginaires; les deux Séries sont imaginaires, & l'Origine est un Point conjugué, qui ne différe que dans le Calcul de celui qui a été indiqué au n°. III de ce §.

2°. Que si B & B' sont des grandeurs réelles & de différens signes, le Point quadruple est formé par deux Rebroussements opposés au sommet; ce qui fait, à l'œuil, comme une Osculation, avec cette différence pourtant, qu'ici les Branches de même courbure sont de part & d'autre de la Tangente commune, au lieu que dans l'Osculation elles sont d'une même part.

3°. Si B & B' sont des grandeurs réelles, inégales & de même signe; le Point quadruple est formé par quatre Branches qui font un double Rebroussement, c'est-à-dire, un Rebroussement renfermé dans un autre Rebroussement de même sommet & de même Tangente.

4°. Enfin si $B = B'$, la Série $y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c. n'est pas encore réguliére. Il en faut chercher un nouveau terme, en substituant dans la transformée $\pm x\sqrt{Bx} + t$ à u. La valeur de t peut être fort diverse, mais elle ne donnera qu'un double Rebroussement, ou un Bec; ce qui sera facile à distinguer par le troisiéme terme de la Série, & souvent sans calcul par la Remarque du §. 113.

On ne peut, sans sortir du sixiéme Ordre, au-delà duquel nous ne voulons pas aller, supposer que la racine quadruple du 4e. Rang divise le 6e. parce qu'alors toute l'équation seroit divisible par cette racine. Ainsi venons aux Exemples.

PLANCHE XXIX. *Exemple I.* Les Courbes désignées par l'éq: $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$, fournissent des Exemples de tous les Points quadruples dont les Courbes du cinquiéme Ordre sont susceptibles. En supposant $y = xu$, on transforme cette équation en $x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4$, qui représente une Courbe du quatriéme Ordre, laquelle a deux Branches paraboliques, & coupe l'Axe des ordonnées en autant de points qu'a de racines réelles l'équat: $(P) \ldots a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 = 0$. Soit DCQRSEF cette Courbe du quatriéme Ordre décrite sur les Axes AB, AG. Qu'on prenne l'abscisse AB $= 1$, & qu'on mène l'ordonnée indéfinie CBE. Ensuite, que d'un point quelconque M de la Courbe DQRSF, on tire l'ordonnée MP, & la Droite Mm parallèle à AB & qui coupe en m l'ordonnée CBE. Enfin qu'on mène la Droite Am qui rencontre MP en N, & le Point N sera un Point de la Courbe CNAqArAsAE représentée par l'éq: $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$. Car les Triangles semblables ABm, APN donnent AP$[x]$: PN $[y]$ = AB$[1]$: Bm ou PM$[u]$. Donc $u = \frac{y}{x}$, & cette valeur substituée dans l'éq: $x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4$, la transforme en $x = a + b\frac{y}{x} + c\frac{y^2}{x^2} + d\frac{y^3}{x^3} + e\frac{y^4}{x^4}$, ou $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$. Ch. XIII. §. 222. Fig. 218. num. 1.

On voit que la Courbe produite CAqArAsAE passe autant de fois par l'Origine que la Courbe productrice DQRSF par l'Axe des ordonnées. Ainsi,

1. L'éq: $(P) \ldots a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 = 0$ ayant quatre racines réelles inégales, l'éq: $(Q) \ldots ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0$ [qui est le 4e. Rang de l'équation proposée égalé à zéro] aura aussi quatre racines inégales:

Ch. XIII. §. 222. gales : car P se transforme en $\mathcal{Q}$, quand on fait $u = \frac{y}{x}$. PLANCHE XXIX. Fig. 218.

Donc, comme les quatre racines de P désignent les quatre Points G, H, I, K où la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées, de même les quatre racines de $\mathcal{Q}$ marquent que quatre Branches de la Courbe produite passent par l'Origine A, & y forment un Triple-Nœud [ci-dessus, *Cas I.*]. num. 1.

2. Si les éq: P & Q ont deux racines réelles inégales & deux imaginaires ; la Courbe productrice ne coupe son Axe des ordonnées qu'en deux Points G, K, & la Courbe produite ne passe que deux fois par A. Elle y forme un simple Nœud, sur lequel on doit concevoir un Point adhérent, puisque l'Origine est un Point quadruple [ci-dessus, *Cas II*]. num. 2.

3. Si les éq : P & Q n'ont que des racines imaginaires; la Courbe productrice ne rencontre point son Axe, & la Courbe produite ne passe point par l'Origine. L'Origine est pourtant un Point de la Courbe, puisque $x = 0$ & $y = 0$ satisfont à son équation. Elle est même un Point quadruple, puisque son plus bas Rang est le quatriéme [§. 170]. C'est donc un Point quadruple conjugué [ci-dessus *Cas III.*] num. 3.

4. Si les éq : P & Q ont deux racines simples & une double; la Courbe productrice coupe deux fois, & touche une fois son Axe, & la Courbe produite passe deux Branches CAq, sAE par l'Origine, & elle y a, outre cela, un Point de Rebroussement qAs [ci-dessus *Cas IV*, 1]. num. 4.

5°. Si les éq : P & Q ont une racine double & deux imaginaires ; la Courbe productrice touche son Axe sans le couper, & la Courbe produite n'a, à l'Origine, qu'un Rebroussement CAr, auquel est supposé adhérer un Point, qui le rend Point quadruple [ci-dessus, *Cas V.*] num. 5.

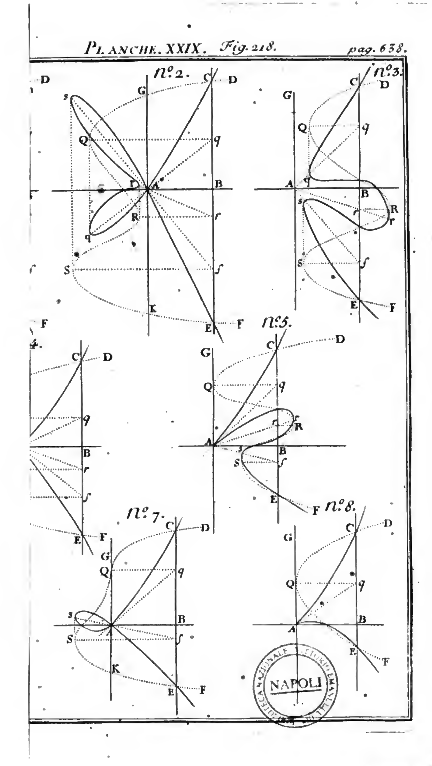
 6. Mais

PLANCHE XXIX Fig. 218. num. 6. 6. Mais si les éq: P & Q ont deux racines doubles; la Courbe productrice touche deux fois son Axe, & la Courbe produite a, à l'Origine, deux Rebroussements CAr, rAE, [ci-dessus, *Cas VI*]. CH.XIII. §. 222.

num. 7. 7. Si les éq: P & Q ont une racine simple & une triple; la Courbe productrice coupe son Axe en un Point K, & en un autre Point Q, qui est Point d'Inflexion, elle le coupe & touche en même tems. Et la Courbe produite a, à l'Origine, sur la Branche CAs, un Point triple, dont la triplicité invisible résulte de l'évanouissement d'une Feuille Aq [*n°*. 4], lequel Point triple est traversé par une Branche simple sAE [ci-dessus, *Cas VII*, 1].

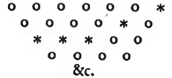
num. 8. 8. Enfin, si les éq: P & Q n'ont qu'une seule racine quadruple; la Courbe productrice touche l'Axe des ordonnées en un Point de Serpentement Q [§. 193], & la Courbe produite forme en A un Rebroussement, mais qui, étant censé renfermer les trois Feuilles Aq, Ar, As, de la Courbe *n°*. 1, est un Point quadruple [ci-dessus *Cas VIII*, 1].

PL.XXX. *Exemple II.* Les Courbes du sixiéme Ordre représentées par l'éq: $x^6 + ax^4y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0$, ont, à leur Origine, des Points quadruples, le plus bas Rang de leur équation étant le quatriéme. En faisant $x = uz$ & $y = uzz$, elle se transforme en $uu + au + c + dz + ezz = 0$, qui représente une Ellipse quand e est négative, & une Hyperbole quand e est positive [§. 154]. Mais la diverse position de ces Courbes par raport à leurs Axes fait seize Cas différents. Car suivant que l'éq: $uu + au + c = 0$ a ses racines imaginaires ou réelles, égales ou inégales, de même ou de différents signes, la Courbe peut ou 1°. couper l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine, ou 2°. le couper de même part, ou 3°. le toucher,


n°. 2.
n°. 3.
n°. 4.
n°. 5.
n°. 7.
n°. 8.
C
D
G
Q
q
A
B
R
r
S
s
E
F
K

CH. XIII. § 212. cher, ou 4°. ne le point rencontrer. Et suivant la nature des racines de l'éq: $c+dz+ezz=0$, il en est de même par raport à l'Axe des abscisses. Ces quatre différentes positions, par raport à chaque Axe, combinées ensemble, font seize Cas représentés dans les 16 $n^{os.}$ de la *Figure*, où l'on a joint les Courbes du sixiéme Ordre produites par celles du second. Sans entrer dans un détail, long mais facile, on verra, par un Raisonnement semblable à celui de l'*Ex. IV.* du §. préced., que les Courbes des $n^{os.}$ 1 & 5 ont, à l'Origine, une Osculation traversée par deux Branches de direction différente: que celles des $n^{os.}$ 2 & 6, y ont un Embrassement aussi traversé par deux Branches: celles des $n^{os.}$ 3 & 7, un Bec traversé de même, & celles des $n^{os.}$ 4 & 8, un Point traversé pareillement par deux Branches. Que les Courbes des $n^{os.}$ 9, 10, 11, & 12, présentent un Rebroussement combiné avec une Osculation, un Embrassement, un Bec, & un Point: & qu'enfin les Courbes des $n^{os.}$ 13, 14, 15 & 16, donnent l'Osculation, l'Embrassement, le Bec, & le Point, combinés avec un Point, de sorte que ce dernier est un Point quadruple conjugué. PLANCHE XXX. Fig. 219.

C'est précisément ce que donne l'équation mise sur le Triang. anal. Son plus bas Rang égalé à zéro donne l'éq:



$cx^2y^2+dxy^3+ey^4=0$, qui a toujours une racine double $y=0$, qui divise le 5e. Rang ax^4y une fois, & outre cela elle a les deux racines de l'éq: $(P)\ldots cx^2+dxy+eyy=0$, analogues à celles de l'éq: $(Q)\ldots c+dz+ezz=0$.

1. Si

PLANCHE XXX. Fig. 219. 1. Si ces deux racines sont inégales & réelles [comme dans les 8 prémiers $n^{os.}$ de la *Figure*], c'est le *Cas IV. 2*, ci-dessus. Deux Branches de direction différente traversent une Osculation, réelle, ou imaginaire, un Embrassement, ou un Bec. Ch.XIII. §. 222.

n.1. & 5. C'est une Osculation réelle, quand les racines de l'éq: $x^6 + ax^4y + cx^2y^2 = 0$ donnée par la déterminatrice inférieure, ou, ce qui est la même chose, quand les racines de l'éq: $(R) \ldots x^4 + ax^2y + cy^2 = 0$, analogues à celles de l'éq: $(S) \ldots uu + au + c = 0$ sont réelles & de différents signes: ce qui a lieu quand la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine.

n.2. & 6. C'est un Embrassement, quand les racines des éq: *R* & *S* sont réelles, & de même signe, mais inégales: ce qui arrive quand la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées en deux points d'un même côté de l'Origine.

n.3. & 7 C'est un Bec, quand les racines de *R* & *S* sont égales, c'est-à-dire quand la Courbe productrice touche l'Axe des ordonnées.

n 4. & 8. C'est une Osculation imaginaire, quand les racines de *R* & *S* sont imaginaires: ce qui a lieu quand la Courbe productrice ne rencontre point l'Axe des ordonnées.

n. 13, 14, 15 & 16. 2. Si les racines des éq: *P* & *Q* sont imaginaires, la Courbe productrice ne rencontre point l'Axe des abscisses, & on est dans le *Cas V*, ci-dessus. Un Point invisible adhére à une Osculation réelle [n°. 13], ou à un Embrassement [n°. 14], ou à un Bec [n°. 15], ou à une Osculation imaginaire [n°. 16], suivant que les racines des éq: *R* & *S* sont réelles de différents signes, ou réelles de même signe mais inégales, ou égales, ou imaginaires, c'est-à-dire selon que la Courbe productrice, ou coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine [n°.13],

où

Ch. XIII. §. 222. ou le coupe d'une même part [*n°.* 14], ou le touche [*n°.* 15], ou ne le rencontre point [*n°.* 16]. PLANCHE XXX.

3. Enfin, si les racines de P ou de Q sont égales, la Courbe productrice touche l'Axe des abscisses, & on a une partie des Points mentionnés au *Cas VI*, ci-dessus. L'équation du plus bas Rang a deux racines doubles $y=0$ & $y\sqrt{e}+x\sqrt{c}=0$. La prémiére divise le 5e. Rang; la seconde ne le divise pas. Ainsi celle-ci désigne un Rebroussement [ci-dessus *Cas IV.* 1]. L'autre [*Cas IV.* 2] marque une Osculation [*n°.* 9], ou un Embrassement [*n°.* 10], ou un Bec [*n°* 11], ou une Osculation imaginaire [*n°.* 12], selon que les racines de R & S sont ou de différents signes, ou de même signe, égales, ou imaginaires; c'est-à-dire, selon que la Courbe productrice coupe de part & d'autre [*n°.* 9], ou de même part [*n°.* 10], ou touche [*n°.* 11], ou ne rencontre pas [*n°.* 12] l'Axe des ordonnées. Fig. 219. n. 9. 10. 11. & 12.

Exemple III. Joignons à ces Courbes celles que donnent les mêmes Courbes productrices, quand l'Origine est prise sur un de leurs points. Cela fait trois Cas principaux. 1°. Ou la Courbe coupe ses deux Axes, [*n^os.* 1, 2, 3], 2°. ou elle touche l'Axe des ordonnées [*n^os.* 4, 5], 3°. ou elle touche l'Axe des abscisses [*n^os.* 6, 7]. Dans le prémier Cas, il manque à l'éq: $uu+au+c+dz+ezz=0$ de l'Exemple préced. le terme c; dans le second Cas, il manque les termes c & au; & dans le troisiéme, les termes c & dz. Ainsi la Courbe produite sera représentée, dans le prémier Cas, par l'éq: $x^6+ax^4y+dxy^3+ey^4=0$, dans le second par $x^6+dxy^3+ey^4=0$, & dans le troisiéme par $x^6+ax^4y+ey^4=0$. PLANCHE XXXI. Fig. 220.

1. La prémiére de ces trois équations appartient au *Cas VII.* 2, ci-dessus. Le 4e. & plus bas Rang dxy^3+ey^4 égalé à zéro, a une racine simple $dx+ey=0$, qui ne n. 1. 2. 3.

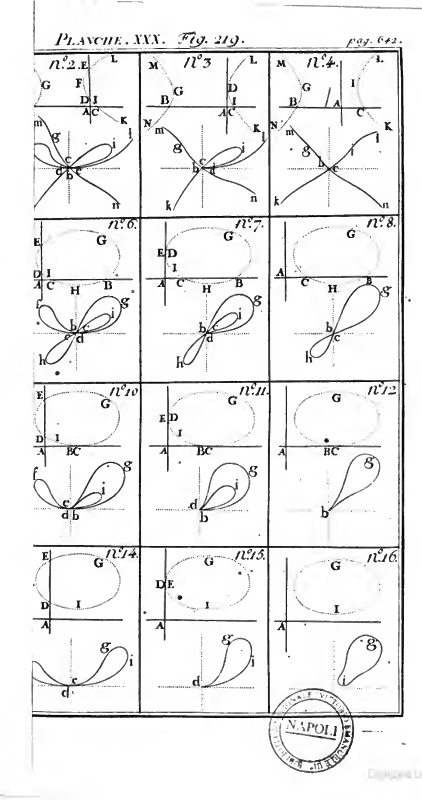
 divise

divise pas le 5e. Rang ax^4y, & une racine triple $y=0$, qui divise une fois le 5e. Rang & ne divise pas le 6e. x^6. Donc le Point de l'Origine est un Rebroussement touché par une Branche [c'est ce que désigne la racine triple] & traversé par une autre Branche [qu'indique la racine simple].

num. 4. 5. 2. La seconde équation apartient aussi au *Cas VII*, 3, cy-dessus. La racine simple $dx+ey=0$, & la racine triple $y=0$, du 4e. Rang sont censées diviser, tant de fois qu'on voudra, le 5e. Rang qui manque, & ni l'une ni l'autre ne divise le 6e. x^6. Il y aura donc, à l'Origine, deux Branches infléchies, dont celle qui touche l'Axe des abscisses, désignée par la racine $y=0$, a un Point triple formé par l'évanouissement d'une Feuille. En effet, les Courbes n°s. 7, 3 de la *Fig.* 219, dégénérent en celles des n°s. 4, 5 de cette *Fig.* 220. par l'évanouissement des Feuilles cid, qui disparoissent avec les grandeurs a & c.

num. 6. 7. 3. Mais la troisiéme équation apartient au *Cas VIII*. 2, ci-dessus. Le 4e. Rang ey^4 égalé à zéro, n'a qu'une racine quadruple $y=0$, qui divise une fois le 5e. Rang ax^4y & non le sixiéme x^6. Donc l'Origine est un Embrassement [n°. 6] ou une Osculation [n°. 7].

L'Exemple IV sera pris de l'éq: $x^6+x^5y-2bx^3y^2+acy^4=0$. On peut construire les Courbes qu'elle représente, en la réduisant à $auu+uuz-2buz+czz=0$, par la substitution de $\frac{uz}{a}$ à x, & de $\frac{uzz}{aa}$ à y. Cette équation-ci représente une Courbe du troisiéme Ordre, qui a [§. 142] deux Branches paraboliques, dont l'Asymptote a pour éq: $uu+cz=0$, & deux Branches hyperboliques [§. 139], dont l'Asymptote droite est l'ordonnée de l'abscisse $-a$, & l'Asymptote courbe l'Hyperbole désignée par l'éq: $u(z+a)+2ab=0$. Cette même Courbe



n°2.
n°3
n°4.
n°6.
n°7.
n°8.
n°10
n°11.
n°12
n°14.
n°15.
n°16.

CH. XIII. §. 221.2 be a, à son Origine, un Point double, suivant la nature duquel sa forme varie considérablement. Le plus bas Rang, qui est le second, égalé à zéro, donne $auu - 2buz + czz = 0$, équation du second degré, qui a deux racines imaginaires si $bb < ac$, deux racines égales si $bb = ac$, & deux racines inégales si $bb > ac$, de même ou de différents signes selon que a & c sont de même ou de différents signes. PLANCHE XXXI.

Dans le 1r. Cas, l'Origine est un Point conjugué [§. 220. I], & la Courbe est composée de deux parties séparées CHI, DEFG, avec un Point isolé A. Fig. 221. num. 1.

Dans le 2d. Cas, l'Origine est un Rebroussement [§. 220. III. 1], & la partie DE va jusqu'à l'Origine en A, d'où elle rebrousse en FG. num. 2.

Dans le 3e. Cas, l'Origine est un Nœud [§. 220. II], que fait la partie DAE AFG, en donnant une Feuille AE. num. 3.

Et dans le 4e. Cas, l'Origine est l'interſection des Branches CAI, DEAG, qui se croisent en A [§. 220. II]. num. 4.

Maintenant, si l'on cherche quelles Courbes sont produites par celles-là, en donnant à chaque abscisse $x [= \frac{uz}{a}]$ une ordonnée $y [= \frac{uzz}{aa}]$, & dont par conséquent l'équation est $x^6 + x^5y - 2bx^3y^2 + acy^4 = 0$, on verra par le même raisonnement qui a été fait au §. préc. *Ex. IV.* que l'Asymptote ordonnée CD des Courbes productrices devient dans les Courbes produites une Asymptote oblique cd, qui coupe en deux également les Angles des coordonnées de différents signes : que les Branches hyperboliques ED, CH produisent les Branches hyperboliques ed, ch; & les Branches paraboliques FG, HI, les paraboliques fg, hi. Et quant à l'Origine, on verra que celle

 du

PLANCHE XXXI. du *n°*. 1 est un Point conjugué, celle du *n°*. 2 un Bec, celle du *n°*. 3 un double Rebroussement, & celle du *n°*. 4 deux Rebroussements opposés. Or c'est précisément ce qu'on tire de la Régle du *Cas VIII*, 3, ci-dessus. CH. XIII. §. 222.

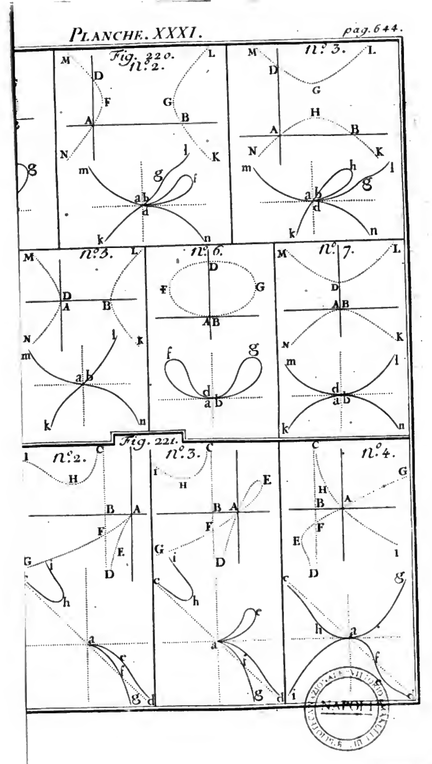
Car c'est à ce Cas que se raporte l'éq: $x^6 + x^5y - 2bx^3y^2 + acy^4 = 0$, puisque son plus bas Rang acy^4 égalé à zéro n'a qu'une racine $y = 0$, mais quadruple, qui divise deux fois le 5e. Rang $-2bx^3y^2$, sans diviser le 6e. $x^6 + x^5y$. La déterminatrice donne l'éq: $acy^4 - 2bx^3y^2 + x^6 = 0$, qui a deux racines $yy = \frac{b + \sqrt{(bb - ac)}}{ac}x^3$ & $yy = \frac{b - \sqrt{(bb - ac)}}{ac}x^3$.

```
o o o o o * *
 o o o * o o
  * o o o o
   o o o o
     &c.
```

Fig. 221. *num.* 1. Ces racines sont imaginaires, si $bb < ac$, & l'Origine est un Point conjugué [*Cas VIII.* 3, 1° ci-dessus].

num. 2. Elles sont égales, si $bb = ac$, & l'Origine [*Cas VIII.* 3. 4°] est ou un Bec ou un double Rebroussement. On voit que c'est un Bec, parce qu'entre la déterminatrice qui passe par les termes du prémier ordre y^4, x^3y^2, x^6, & sa parallèle menée par le terme unique du second ordre x^5y, il n'y a qu'un intervalle, & que ce terme x^5y n'est divisible par aucune des deux racines $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}}$ de l'équation de la déterminatrice, [§. 113].

num. 3. Les racines $yy = \frac{b \pm \sqrt{(bb - ac)}}{ac}x^3$ de la déterminatrice sont réelles, inégales & de même signe, lorsque $bb > ac$,


Fig. 220.
n.° 2.
n.° 3.
n.° 5.
n.° 6.
n.° 7.
Fig. 221.
n.° 2.
n.° 3.
n.° 4.

CH. XIII. §. 221. $bb > ac$, & que a & c ont le même signe. Alors l'Origine est un double-Rebroussement [*Cas VIII*, 3, 3°. ci-dessus]. PLANCHE XXXI. *Fig.* 221.

Enfin ces racines sont réelles, inégales, & de différents signes, quand a & c ont des signes différents. Alors l'Origine est un Point quadruple formé par deux Rebroussements opposés au sommet [*Cas VIII*, 3, 2°, ci-dessus]. *num.* 4.

Si dans la même équation, lorsque $ac = bb$, il y avoit eu un nombre pair d'intervalles entre la déterminatrice & sa parallèle menée par les termes du second ordre, la Courbe au lieu d'avoir un Bec à l'Origine, y auroit eu un double-Rebroussement [*Cas VIII*, 3, 4°. ci-dessus]. Si, par ex. au lieu du terme x^5y, on avoit eu $-axy^4$ PLANCHE XXXIII. *Fig.* 222.

o o o o o o *
o * o * o o
* o o o o
o o o o
&c.

[$+ axy^4$ donneroit une Courbe imaginaire], la Série auroit été $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}} \pm \frac{xx}{2b}\sqrt{\frac{a}{b}}$ *&c*, où le double signe des deux prémiers termes marque quatre Branches qui font un double-Rebroussement à l'Origine. On le voit encore en réduisant l'éq : $x^6 - axy^4 - 2bx^3y^2 + bby^4 = 0$ à cette forme $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b \pm \sqrt{ax}}}$, qui fait voir que la Courbe a quatre Branches, deux paraboliques AE, AF & deux hyperboliques AC, AD. Les prémiéres, indiquées par les racines $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b + \sqrt{ax}}}$, ont pour Asymptote la Parabole désignée par l'éq : $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{\sqrt{ax}}}$;

 ou

PLANCHE XXXIII. ou $ay^4 = x^5$. Les dernières, indiquées par les racines $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b - \sqrt{ax}}}$, ont pour Asymptote droite l'ordonnée CBD de l'abscisse $AB = \frac{bb}{a}$. CH. XIII. §. 222.

PLANCHE XXXII. Fig. 223. *Exemple V.* Les mêmes Courbes du troisiéme Ordre qui ont servi à construire celles du sixiéme dans l'*Ex. préc.* en donneront d'autres, si on porte l'Origine sur un autre point de l'Axe des abscisses, comme à l'extrémité de l'abscisse $AO = d$. Cette transposition s'exécute en substituant $t + d$ à z dans l'éq: $auu + uuz - 2buz + czz = 0$ de cette Courbe. La transformée [en faisant, pour abréger, $a + d = f$] sera $fuu + uut - 2but - 2bdu + ctt + 2cdt + cdd = 0$. Ce qu'il importe de considérer ici, ce sont les Points où ces Courbes rencontrent l'Axe des ordonnées. On les détermine par l'éq: $(P) \ldots fuu - 2bdu + cdd = 0$, à laquelle se réduit l'équation de la Courbe, quand on fait $t = 0$. Cette équation, quand f & c
nu. 1. 5. 9. 13. ont différents signes, a deux racines réelles de différents signes, &, dans ce Cas, les Courbes coupent l'Axe des ordonnées en deux Points M, N, situés de part & d'autre de l'Origine. Mais quand, f & c ayant le même signe, $fc < bb$,
nu. 2. 6. 10. 14. l'équation P a deux racines réelles, inégales, de même signe, & les Courbes coupent l'Axe des ordonnées en deux Points M, N, placés d'un même côté de l'Origine. Elles
nu. 3. 7. 11. 15. touchent leur Axe des ordonnées en un seul Point E, lorsque l'éq: P n'a qu'une racine double, ce qui a lieu quand
nu. 4. 8. 12. 16. $fc = bb$. Et elles ne rencontrent point leur Axe des ordonnées quand $fc > bb$, parce qu'alors les racines de l'éq: P sont imaginaires.

Chaque Courbe donnant ainsi quatre Cas différents, les quatre Courbes en donneront seize, représentés dans les seize $n^{os.}$ de la *Fig.* 223, avec les Courbes du sixiéme Ordre,

CH.XIII. §. 221. dre, qui se construisent par celles du troisiéme, en donnant à l'abscisse $x\,[=\frac{ut}{f}]$ l'ordonnée $y\,[=\frac{utt}{ff}=\frac{xt}{f}]$. Leur équation est donc $fx^6+fx^5y-2fbx^3y^2-2bdx^4y+ffcy^4+2fcdxy^3+cddx^2y^2=0$, qui nait de la substitution de $\frac{fy}{x}$ à t, & de $\frac{xx}{y}\,[=\frac{fx}{t}]$ à u dans l'éq : $fuu+uut-2but-2bdu+ctt+2cdt+cdd=0$. Ces Courbes ont les mêmes Branches infinies & les mêmes Asymptotes que celles de l'*Ex. précéd.* Mais on trouvera, comme dans l'*Ex. IV.* du §. précéd. qu'à l'Origine les Courbes des *n°.* 1, 2, 3, 4, ont une Osculation imaginaire; celles des *n°.* 5, 6, 7, 8, une Osculation réelle; celles des *n°.* 9, 10, 11, 12, un Embrassement; & celles des *n°.* 13, 14, 15, 16, un Bec; combinés avec une Osculation réelle dans les *n°.*1, 5, 9, 13, avec un Embrassement dans les *n°.* 2, 6, 10, 14, avec un Bec dans les *n°.* 3, 7, 11, 15, & avec une Osculation imaginaire dans les *n°.* 4, 8, 12, 16. Et ce sont là tous les Points quadruples indiqués dans ce §. *Cas VI*: si ce n'est que les deux Becs, combinés au *n°.* 15, n'en font qu'un seul, parce qu'ils tombent précisément l'un sur l'autre. PLANCHE XXXII. *Fig.* 223.

Cela est exactement conforme aux Règles. Si l'on met sur le Triang: anal: l'éq: $fx^6+fx^5y-2fbx^3yy-2bdx^4y+ffcy^4+2fcdxy^3+cddxxyy=0$ son plus bas

o o o o o * *
o o o * * o
* * * o o
o o o o
&c.

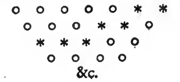
Rang donnera l'éq: $ffcy^4-2fcdxy^3+cddxxyy=0$, qui a deux racines doubles $y=0$ & $fy+dx=0$, qui indiquent deux Tangentes.

La

PLANCHE XXXII. La prémiére eſt l'Axe même des abſciſſes, & le prémier terme de la Série rélative aux Branches qu'il touche ſe tire de l'éq: $fx^6 - 2bdx^4y + cddxxyy = 0$, ou (Q).. $fx^4 - 2bdxxy + cddyy = 0$, que donne la déterminatrice; & dont les racines ſont analogues à celles de l'éq: (P)... $fuu - 2bdu + cdd = 0$ mentionée ci-deſſus. CH. XIII. §. 222.

Si les racines de ces éq: P & Q ſont réelles & de différents ſignes, le Point touché par l'Axe des abſciſſes eſt une Oſculation réelle [nos. 1, 5, 9, 13]: ſi elles ſont réelles, inégales, & de différents ſignes c'eſt un Embraſſement [nos. 2, 6, 10, 14]: ſi elles ſont égales, c'eſt un Bec [nos. 3, 7, 11, 15], parce qu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & ſa prémiére parallele, & que la racine double [$bxx - cdy = 0$] de l'éq: Q, qui dans ce Cas devient $bbx^4 - 2bcdx^2y + ccddyy = 0$, ne diviſe pas la ſomme $fx^5y - 2fbx^3y^2 + 2fcdxy^3$ des terme du ſecond ordre [§. 213]: enfin, ſi les racines des éq: P & Q ſont imaginaires, les Branches que l'Axe des abſciſſes devroit toucher ſont imaginaires, & font une Oſculation imaginaire [nos. 4, 8, 12 & 16].

L'autre racine $fy + dx = 0$, ou $y = -\frac{dx}{f}$ ne donne que la poſition de la Tangente oblique. Pour connoitre la nature du Point qu'elle touche, on cherchera le ſecond terme de la Série, en ſubſtituant dans l'équation propoſée $-\frac{dx}{f} + u$ à y. La transformée $(f-d)\,x^6 + fx^5u + 2bdx^4u - 2fbx^3uu + ffu^4 - 2fcdxu^3 + cddx^2u^2 = 0$, étant miſe ſur le Triangle analytique la déter-



minatrice

Ch. XIII. §. 222. minatrice donne l'éq: $(f - d)\,x^6 + 2bdx^4u + cddx^2u^2 = 0$, ou [puisque $f - d = a$] $ax^4 + 2bdx^2u$ Planche XXXII. Fig. 223.
$+ cdduu = 0$, qui a deux racines $u = \frac{-b+\sqrt{(bb-ac)}}{cd}xx$
& $u = \frac{-b-\sqrt{(bb-ac)}}{cd}xx$.

Si elles sont imaginaires, ce qui a lieu quand $bb < ac$; la Courbe est une de celles des n°. 1, 2, 3, 4, où les Branches que devroit toucher la Tangente oblique sont imaginaires.

Si elles sont réelles & de différentes signes, ce qui a lieu quand a & c ont différents signes; le Point touché par la Tangente oblique est une Osculation, comme aux n°. 5, 6, 7, 8.

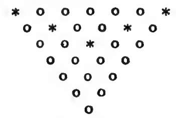
Si elles sont réelles, inégales, & de même signe, ce qui a lieu quand $bb > ac$, a & c ayant le même signe; le Point que touche la Tangente oblique est un Embrassement, n°. 9, 10, 11, 12.

Si elles sont égales, ce qui a lieu quand $bb = ac$; la Tangente oblique touche un Bec, n°. 13, 14, 15, 16: car il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & sa prémiére paralléle, & la racine double $u + \frac{bxx}{cd} = 0$ des termes du prémier ordre ne divise pas la somme $fx^4u - 2fbx^2uu - 2fcdxu^3$ des termes du second ordre.

Mais on remarquera que dans le n°. 15, la Tangente oblique cesse de l'être. Car, dans ce Cas, $fc = bb$ & $bb = ac$. Donc $fc = ac$, $f = a$, & d [$= f - a$] $= 0$. L'éq: $fy + dx = 0$, qui détermine la position de la Tangente oblique, se réduit donc à $fy = 0$, ou $y = 0$, qui montre que cette Tangente se confond avec l'Axe des abscisses.

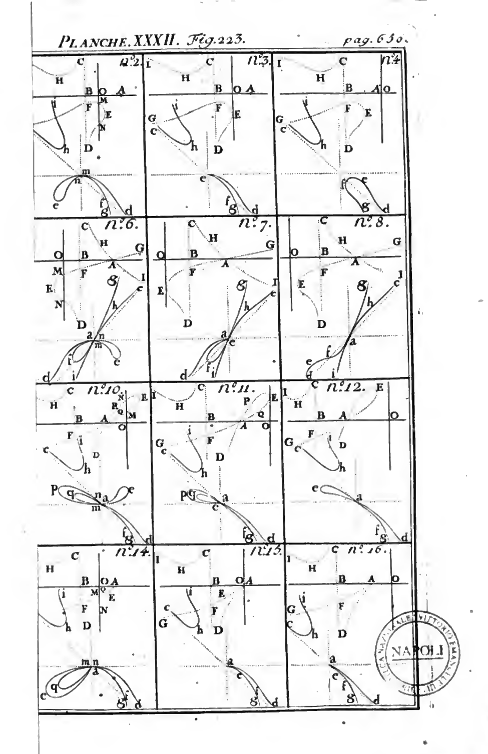
Exemple VI. Ainsi pour avoir des Exemples de tous les Points quadruples qui se raportent au *VI Cas* ci-

PLANCHE XXXIII. dessus, il n'en faut plus qu'un, sav. du Point où se combinent deux Becs sous des directions différentes. L'éq: $aax^6 - 2aabx^4y + aabbxxyy - 2abbxy^4 + bby^6 = 0$ nous le fournira. Quand on la met sur le Tr: anal: l'équation de son plus bas Rang, $aabbxxyy = 0$, montre par ses deux racines doubles $x = 0$, $y = 0$, que la CH XIII. §. 221.



Courbe touche à l'Origine ses deux Axes. La déterminatrice rélative aux Branches touchées par l'Axe des abscisses, donne l'éq: $aabbxxyy - 2aabx^4y + aax^6 = 0$, qui a une seule racine, mais double, $by - xx = 0$. Le Point est donc un Embrassement, ou un Bec [§. 220], & on conclura que c'est un Bec, parce qu'il y a trois intervalles entre la déterminatrice & sa parallèle menée par le terme $- 2abbxy^4$ du second ordre, lequel n'est pas divisible par la racine $by - xx = 0$ [§. 113 & 220 .]. Un raisonnement pareil fera conclurre que l'Axe des ordonnées touche aussi un Bec. Ainsi l'Origine est un Point quadruple formé par le concours de deux Becs sous deux directions différentes.

On le vérifie par la construction qu'on peut faire de cette Courbe, en mettant dans son équation $\frac{zy}{a}$ pour x. Cette substitution la transforme en $z^6yy - 2aabz^4y + a^4bbzz - 2a^4bbzy + a^4bbyy = 0$, qui exprime une Courbe du huitiéme Ordre, mais facile à construire, puisque dans son équation y ne monte qu'au second dégré. Les raci-


n°2.
n°3.
n°4
n°6.
n°7.
n°8.
n°10.
n°11.
n°12.
n°14.
n°15.
n°16.

CH.XIII. §. 222. racines $y = \frac{a^4bbz \pm a^3bzz\sqrt{2bz} + aabz^4}{a^4bb + z^4}$, & mieux encore PLANCHE XXXIII.

les Séries descendantes $y = \frac{aab}{zz} \pm \frac{a^3b}{z^3}\sqrt{\frac{2b}{z}} + \frac{a^4bb}{z^5}$ &c. qui donnent la valeur d'y en z, font voir que cette Courbe Fig. 234. n'a que deux Branches hyperboliques AGE, AFD, qui partant de l'Origine A, où elles forment un Rebroussement, s'étendent le long de l'Axe des abscisses AB, qui est leur Asymptote droite, ayant pour Asymptote courbe une Branche de l'Hyperbole $y = \frac{aab}{zz}$ [§. 138]. Au moyen de cette Courbe on construit la proposée, en prenant l'ordonnée AC $= -a$, & menant l'abscisse indefinie CQ. Car si par un Point quelconque M de la Courbe AMEDNA, on mene une ordonnée MP prolongée jusqu'en Q où elle rencontre l'abscisse CQ, & qu'on tire par les Points Q, & A la droite QAM prolongée jusqu'en m où elle rencontre l'abscisse prolongée Mμm du Point M, on aura un Point m de la Courbe cherchée. Les triangles semblables QPA, Aμm donnant Aμ ou PM [y]: μm [x] $=$ QP ou AC [a]: AP [z], on aura $z = \frac{ax}{y}$, & cette valeur, substituée dans l'éq: $z^6yy - 2aabz^4y + a^4bbzz - 2a^4bbzy + a^4bbyy = 0$ de AGEDFA, la transforme en $aax^6 - 2aabx^4y + aabbxxyy - 2abbxy^4 + bby^6 = 0$, équation de AgAfA.

Cette construction fait voir assez clairement que la Courbe AgAfA a deux Becs à son Origine. Car si on suppose les Points H & I infiniment proches de A, c'est-à-dire HK infiniment proche de AC; AL est infiniment plus petite que KL: donc aussi hη est infiniment plus petite que Aη, & iι infiniment plus petite que Aι. Ainsi les deux Branches Ah, Ai touchent l'Axe des ordonnées & forment un Bec hAi.

 Et

PLANCHE XXXIII. Et si on suppose les Points M, N infiniment éloignés de A, c'est-à-dire MQ infiniment éloignée de AC, PQ sera infiniment plus petite que AP: donc Aμ sera infiniment plus petite que mμ, & Aν infiniment plus petite que nν. Ainsi les Branches Am, An touchent l'Axe des abscisses, & forment un second Bec mAn. CH. XIII. §. 222.

223. C'EST par les mêmes Principes qu'on pourroit détailler les diverses espèces de *Points quintuples.* En se renfermant dans les Courbes du sixiéme Ordre, qui sont les plus simples qui puissent avoir un Point quintu-
Fig. 225. ple, on en trouvera onze espèces, dont les Courbes définies par l'éq: $x^6 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$ fournissent des Exemples. Ces Courbes se peuvent construire comme celles du §. préc. *Ex. I.* En substituant xu à y, leur éq: se transforme en $x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5$, qui exprime une Courbe du cinquiéme Ordre, à deux Branches paraboliques, dont l'Asymptote est désignée par l'éq: $x = fu^5$, & dont par conséquent l'une va du côté des abscisses positives, & l'autre du côté des négatives. Cette Courbe rencontre son Axe des ordonnées en autant de points que l'éq: $(P) \ldots\ a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 = 0$, ou l'équation analogue $(Q) \ldots\ ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5 = 0$, a de racines réelles. Appliquant donc ici les considérations faites au §. préc. *Ex. I.* sur un
num. 1. Exemple tout semblable, on distinguera onze Cas.

1. Celui où les éq: P & Q ont cinq racines réelles. Alors la Courbe productrice CQRSTD coupe l'Axe des ordonnées en cinq points G, H, I, K, L; & la Courbe produite CAqArAſAtAd passe cinq fois par l'Origine, sous cinq directions différentes, faisant un *Quadruple*
num. 2. *Nœud*, & quatre Feuilles Aq, Ar, Aſ, At.

2. Celui où les équ: P & Q ont trois racines réelles & deux imaginaires. Ici la Courbe productrice ne coupe l'Axe

CH.XIII. §. 222. l'Axe des ordonnées qu'en trois points G, H, L; & la Courbe produite ne passe que trois fois par l'Origine, sous trois directions différentes, faisant un Double-Nœud & deux Feuilles Aq, ArſtA. Cependant le Point A est quadruple, parce que sur le *Double-Nœud*, on doit concevoir un *Point double invisible*, indiqué par les racines imaginaires de l'éq: *Q*. PLANCHE XXXIII. Fig. 225.

num. 3. 3. Dans le Cas où les éq: *P* & *Q* ont une seule racine réelle & quatre imaginaires, la Courbe productrice ne coupe qu'en un seul Point I l'Axe des ordonnées, & la Courbe produite ne passe qu'une fois par l'Origine A. Mais on doit concevoir sur cette Branche un *Point quadruple invisible*, indiqué par les quatre racines imaginaires de l'éq: *Q*.

num. 4. 4. Si les éq: *P* & *Q*, ont une racine double & trois simples réelles; la Courbe productrice touche son Axe une fois en R, & le coupe trois fois en G, K, L, & la Courbe produite fait à l'Origine un *Triple-Nœud avec un Rebroussement*.

num. 5. 5. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine double & une simple, réelles, & deux imaginaires; la Courbe productrice touche son Axe en Q & le coupe en I. La Courbe produite a à l'Origine *un Rebroussement traversé d'une Branche de direction différente, avec un Point double invisible*, indiqué par les deux racines imaginaires de l'éq: *Q*.

num. 6. 6. Si les éq: *P* & *Q* ont deux racines doubles & une simple; la Courbe productrice touche son Axe deux fois en Q & S, & le coupe une fois en L. Et la Courbe produite a à l'Origine *deux Rebroussements de directions différentes traversés par une Branche sous une troisiéme direction.*

num. 7. 7. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine triple & deux simples; la Courbe productrice coupe son Axe des ordonnées en K & L, & le coupe & touche en Q Point d'In-

 fléxion.

PLANCHE XXXIII. Fig. 225. fléxion. La Courbe produite fait à l'Origine un *Double-Nœud*, dont une Branche CAſ a, au point A, une *triplicité invisible* résultante de l'évanouissement de deux Feuilles. Car comme le point Q de la Courbe productrice renferme virtuellement les deux sinuosités GQH, HRI de la Courbe *n°*. 1, de même le Point A de la Branche CAſ de la Courbe produite renferme virtuellement les deux Feuilles Aq, Ar, de la Courbe CAqArAſAtAd du même *n°*. 1. CH. XIII. § 223.

num. 8. 8. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine triple & une double; la Courbe productrice touche son Axe en T, & le coupe & touche en Q. Et la Courbe produite a à l'Origine un *Rebroussement traversé par une Branche* CAſ, dont le Point A a, comme au Cas précéd. une *triplicité invisible* qui renferme virtuellement les deux Feuilles Aq, At de la Courbe n°. 4.

num. 9. 9. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine triple & deux imaginaires; la Courbe productrice coupe & touche en *Q* l'Axe des ordonnées & ne le rencontre point ailleurs. La Courbe produite ne passe qu'une fois par A: mais non seulement le Point A de la Branche qui y passe est d'une *triplicité invisible*, renfermant virtuellement deux Feuilles; mais encore il faut y concevoir un *Point double invisible*, qui fait de ce Point un Point quintuple.

num. 10. 10. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine quadruple & une simple; la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées en L, & le touche en Q par un Point de Serpentement. La Courbe produite a, à l'Origine, une *Branche qui traverse un Point de Rebroussement censé renfermer trois Feuilles évanouissantes*. Car puisque le Point de Serpentement G est censé renfermer les trois sinuosités, GQH, HRI, ISK de la Courbe *n°*. 1, qui y sont devenues infiniment petites, le Rebroussement CAt est aussi censé renfermer les trois Feuilles Aq, Ar, Aſ devenues infiniment petites.

11.

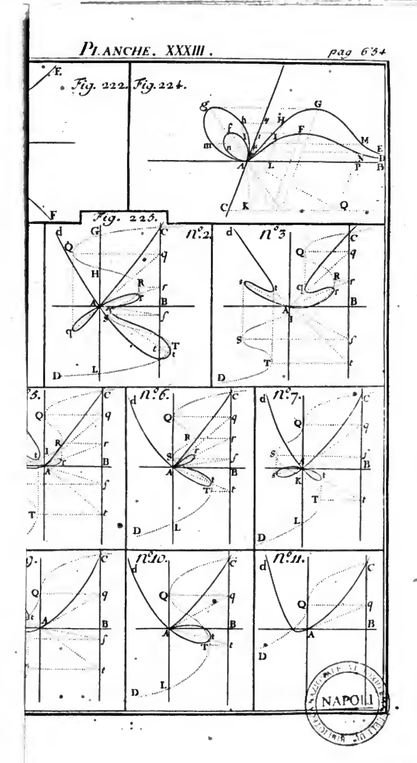


PLANCHE. XXXIII.
pag 634
Fig. 222.
Fig. 224.
Fig. 225.
n°2.
n°3
n°6.
n°7.
n°10.
n°11.

CH. XIII. §. 223. 11. Enfin, si les éq: P & Q ont une seule racine quintuple; la Courbe productrice coupe & touche l'Axe des ordonnées au Point Q de double Inflexion. Et la Courbe produite ne passe qu'une fois par l'Origine A: mais ce Point est un *Point quintuple d'une multiplicité invisible*, qui renferme virtuellement quatre Feuilles évanouïssantes. Car comme le Point de double Inflexion Q est censé renfermer les quatre sinuosités GQH, HRI, ISK, KTL de la Courbe *n*°. 1, qui sont devenues infiniment petites, de même le Point A de la Courbe produite renferme les quatre Feuilles Aq, Ar, As, At, devenues infiniment petites. C'est donc réellement un Point quintuple, dont la multiplicité échappe aux Sens, mais se laisse appercevoir par l'Analyse. PLANCHE XXXIII. Fig. 225. num. 11.



APPEN-

APPENDICE.

Nos. I. & II.

De l'évanouissement des inconnues.

QUand un Problème renferme plusieurs inconnues, dont les rélations sont tellement compliquées qu'on se trouve obligé de former plusieurs équations; alors, pour découvrir les valeurs de ces inconnues, on les fait toutes évanouïr, moins une, qui combinée seule avec les grandeurs connues donne, si le Problème est déterminé, une *Equation finale*, dont la résolution fait connoître d'abord cette inconnue, & ensuite par son moyen toutes les autres.

L'Algébre fournit pour cela des Règles, dont le succès est infaillible, pourvû qu'on ait la patience de les suivre. Mais le Calcul en devient extrémement long, lorsque le nombre des équations & des inconnues est fort grand, & aussi lorsque ces inconnues montent dans les équations proposées à des dégrés fort élevés. Dans ce second Cas on tombe, par les Méthodes ordinaires, dans un autre inconvénient; c'est d'être conduit à des équations plus composées qu'il ne faut, & qui renferment des racines superflues, qu'il n'est pas toujours aisé de démêler de celles qui donnent la vraye Solution du Problème. On se propose dans les deux Nos. suivants de remédier à ces inconvénients.

N°. I.

No. I.

Voyez pag. 59 *&* 60.

Soient plusieurs inconnues z, y, x, v, *&c.* & autant d'équations

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c.$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c.$$
$$A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c.$$
$$A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c.$$
&c.

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, *&c.* ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémiére, seconde, troisiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, *&c.* sont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, *&c.* ceux de y; X^1, X^2, *&c.* ceux de x; V^1, V^2, *&c.* ceux de v; &c. dans la prémiére, seconde, &c. équation.

Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$, & $y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^3 X^1 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}$$

$$y = \frac{Z^1 A^2 X^3 - Z^1 A^3 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^3 X^1 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}$$

$$x = \frac{Z^1 Y^2 A^3 - Z^1 Y^3 A^2 - Z^2 Y^1 A^3 + Z^2 Y^3 A^1 + Z^3 Y^1 A^2 - Z^3 Y^2 A^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}$$

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres $ZYXV$ &c. toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les n prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres possibles. Ainsi, lorsqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] 6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui reçoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les signes $+$ ou $-$, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'apellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il est pair ou nul, le terme aura le signe $+$; s'il est impair, le terme aura le signe $-$. Par ex. dans le terme $Z^1 Y^2 V^3$ il n'y a aucun dérangement: ce terme aura donc le signe $+$. Le terme $Z^3 Y^1 X^2$ a aussi le signe $+$, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3 Y^2 X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1, aura le signe $-$.

Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous ses termes, Z en A. Et la valeur d'y est la fraction qui a le même dénominateur & pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une maniére semblable la valeur des autres inconnues.

Généralement parlant, le Probléme est déterminé. Mais il

il peut y avoir des Cas particuliers, où il reste indéterminé; & d'autres où il devient impossible. C'est lorsque le dénominateur commun se trouve égal à zéro; c'est-à-dire, s'il n'y a que deux équations, lorsque $Z^1Y^2 - Z^2Y^1 = 0$, s'il y en a trois, lorsque $Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1 = 0$, &c. Alors, si les grandeurs A^1, A^2, A^3, *&c.* sont telles que les numérateurs soient aussi égaux à zéro, le Problème est indéterminé; car les fractions $\frac{0}{0}$, qui devroient donner la valeur des inconnues, sont indéterminées. Mais si les grandeurs A^1, A^2, A^3, *&c.* sont telles que, le dénominateur commun étant zéro, les numérateurs ou quelques-uns d'entr'eux ne soient pas zéro, le Problème est impossible, ou du moins les grandeurs inconnues qui peuvent le résoudre sont toutes, ou en partie, infinies. Par ex. si l'on a ces deux équations $2 = 3z - 2y$ & $5 = 6z - 4y$, on trouvera $z = \frac{2}{0}$ & $y = \frac{3}{0}$. Donc z & y sont des grandeurs infinies, qui sont l'une à l'autre en raison de 2 à 3. En dégageant les inconnues par les Méthodes ordinaires, on tomberoit dans cette équation absurde $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$. Car la prémiére équation donne $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ & la seconde $z = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}$. Donc $\frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}$, ou $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$: ce qui est absurde, si z & y sont des grandeurs finies. Mais si elles sont infinies, on peut dire sans absurdité que $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ & en même tems que $z = \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}$; parce que les grandeurs finies $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$ n'étant rien en comparaison des grandeurs infinies z & $\frac{2}{3}y$, les deux équations $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ & $z = \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}$ se réduisent toutes deux à $z = \frac{2}{3}y$, qui n'a rien de contradictoire.

No. II.

Voyez pag. 76.

§. 1. Soient x & y deux grandeurs variables, dont le rapport, tant entr'elles qu'avec des grandeurs conſtantes, ſoit exprimé par les deux équations A & B, la prémiére de l'ordre n & la ſeconde de l'ordre m.

$$A \ldots\ldots x^n - [1]x^{n-1} + [1^2]x^{n-2} - [1^3]x^{n-3} + \&c. \ldots\ldots [1^n] = 0$$
$$B \ldots\ldots (0)x^0 + (1)x^1 + (2)x^2 + (3)x^3 + \&c. \ldots + (m)x^m = 0$$

Les $1, 1^2, 1^3$, &c. dans des parenthéſes quarrées, marquent, non les puiſſances de l'unité, mais les coëfficients de x, ou les fonctions rationnelles de y qui multiplient les puiſſances de x dans l'éq: A. Et les chiffres 0, 1, 2, 3, &c. dans les parenthéſes rondes, indiquent auſſi les fonctions rationelles d'y qui multiplient les puiſſances de x dans l'équation B. L'uſage de cette Notation paroitra dans la ſuite, & les parenthéſes ne laiſſent aucune équivoque. On propoſe de faire évanouir x, au moyen de ces deux équations, & de trouver celle qui exprime le raport des fonctions $[1]$, $[1^2]$, $[1^3]$, &c. (0), (1), (2), &c. c'eſt-à-dire de trouver l'équation en y & conſtantes, qui reſte quand on a fait évanouir x. Nous nommerons cette équation C.

§. 2. Que a, b, c, d, &c. repréſentent les racines de l'éq: A, ou les fonctions, rationelles ou irrationelles, de y qui ſont les valeurs de x dans cette équation $x^n - [1] x^{n-1}$ &c... $[1^n] = 0$. Comme elle eſt du dégré n, le nombre de ſes racines eſt n. Et les ſubſtituant ſucceſſivement dans l'éq: B, on aura n équations α, β, γ, δ, &c, où x ne paroit plus.

$$\alpha \ldots\ldots (0)a^0 + (1)a^1 + (2)a^2 \ldots\ldots + (m)a^m = 0$$
$$\beta \ldots\ldots (0)b^0 + (1)b^1 + (2)b^2 \ldots\ldots + (m)b^m = 0$$
$$\gamma \ldots\ldots (0)c^0 + (1)c^1 + (2)c^2 \ldots\ldots + (m)c^m = 0$$
$$\delta \ldots\ldots (0)d^0 + (1)d^1 + (2)d^2 \ldots\ldots + (m)d^m = 0$$
&c. &c.

Ces

Ces équations ſont le réſultat de l'évanouiſſement de x, & leurs racines ſont les valeurs de y qui ſatisfont aux deux équations A & B, & que donneroit auſſi l'éq: C trouvée en éliminant x par quelque Méthode que ce ſoit. Ainſi l'éq: C doit avoir les mêmes racines que toutes les équat: α, β, γ, δ, enſemble. Elle n'eſt donc autre choſe que le produit de ces équations multipliées les unes par les autres.

§. 3. Or ce produit des éq: α, β, γ, δ, &c. ſe forme en multipliant chaque terme de chaque équation par chaque terme de chacune des autres. Il eſt la ſomme de tous les produits particuliers qu'on peut faire, en prenant, de toutes les maniéres poſſibles, un terme de chaque équation.

Ainſi, multipliant d'abord α par β, ou chaque terme de α par chaque terme de β, on aura

$$\begin{array}{r}
(00)a^0b^0 + (01)a^0b^1 + (02)a^0b^2 + (03)a^0b^3 + (04)a^0b^4 + \&c. \\
+ (10)a^1b^0 + (11)a^1b^1 + (12)a^1b^2 + (13)a^1b^3 + \&c. \\
+ (20)a^2b^0 + (21)a^2b^1 + (22)a^2b^2 + \&c. \\
+ (30)a^3b^0 + (31)a^3b^1 + \&c. \\
+ (40)a^4b^0 + \&c. \\
+ \&c.
\end{array}$$

ou plus briévement,

$$\begin{array}{r}
(00)a^0b^0 + (01)\left\{\begin{array}{l} a^0b^1 \\ +a^1b^0 \end{array}\right. + (02)\left\{\begin{array}{l} a^0b^2 \\ +a^2b^0 \end{array}\right. + (03)\left\{\begin{array}{l} a^0b^3 \\ +a^3b^0 \end{array}\right. + (04)\left\{\begin{array}{l} a^0b^4 \\ +a^4b^1 + \&c. \end{array}\right. \\
+ (11)\quad a^1b^1 \quad + (12)\left\{\begin{array}{l} a^1b^2 \\ +a^2b^1 \end{array}\right. + (13)\left\{\begin{array}{l} a^1b^3 \\ +a^3b^1 + \&c. \end{array}\right. \\
+ (22)\quad a^2b^2 \quad + \&c.
\end{array}$$

Si on multiplie ce produit des deux éq: α, β, par la troiſiéme γ, ce qui ſe fait en joignant chaque terme de γ à chaque terme combiné de $\alpha\beta$, ou en aſſortiſſant, en toutes les maniéres poſſibles, un terme de α, un de β, & un de γ, on aura

$$(000)a^0b^0c^0 + (001)\left\{\begin{array}{l} a^0b^0c^1 \\ + a^0b^1c^0 \\ + a^1b^0c^0 \end{array}\right. + (002)\left\{\begin{array}{l} a^0b^0c^2 \\ + a^0b^2c^0 \\ + a^2b^0c^0 \end{array}\right. + (003)\left\{\begin{array}{l} a^0b^0c^3 \\ + a^0b^3c^0 \\ + a^3b^0c^0 \end{array}\right. + \&c.$$

$$+ (011)\left\{\begin{array}{l} a^0b^1c^1 \\ + a^1b^0c^1 \\ + a^1b^1c^0 \end{array}\right. + (012)\left\{\begin{array}{l} a^0b^1c^2 + a^0b^2c^1 \\ + a^1b^0c^2 + a^1b^2c^0 \\ + a^2b^0c^1 + a^2b^1c^0 \end{array}\right. + \&c.$$

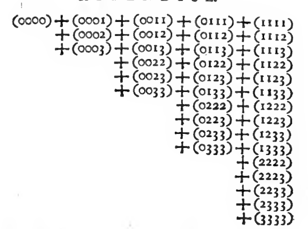
$$+ (111) \quad a^1b^1c^1 \quad + \&c.$$

Et ainsi de suite, quel que soit le nombre n des équations α, β, γ, δ, &c. qu'on multiplie les unes par les autres.

§. 4. Dans chaque terme de ce produit, ou équation finale C, on distingue deux *Facteurs*. L'un, que nous appellerons *Facteur-prémier*, est le produit de quelques coëfficients de l'éq: B, & il est exprimé par des chiffres, comme (000), (001), (012) &c. L'autre, que nous nommerons *Facteur-second*, est une fonction des racines a, b, c, *&c.* de l'éq: A.

§. 5. Les *Facteurs-prémiers* se trouvent aisément. Il ne s'agit que de combiner n à n les termes du polynome (0) + (1) + (2) + (3) &c.... + (m). Qu'on mette à la prémiére Colomne (0^n), qui est (0) élevé à la puissance n; à la seconde, (0^{n-1}) multipliée par tous les autres termes du polynome (1), (2), (3), &c.; à la troisiéme, (0^{n-2}) multipliée par tous les produits (11), (12), (13) &c. (22), (23) &c. (33) &c. &c. qu'on peut faire en combinant ces termes deux à deux; à la quatriéme, (0^{n-3}) multipliée par tous les produits de ces termes pris trois à trois, (111), (112), (113) &c. (122), (123) &c. (133) &c. (222), (223) &c. (233) &c. (333) &c. &c; à la cinquiéme, (0^{n-4}) multipliée par tous les produits des mêmes termes pris quatre à quatre; & ainsi de suite: On aura les *Facteurs-prémiers* rangés comme on les voit dans la Table suivante pour le Cas particulier de $m = 3$ & $n = 4$.

(000)


(0000) + (0001) + (0011) + (0111) + (1111)
+ (0002) + (0012) + (0112) + (1112)
+ (0003) + (0013) + (0113) + (1113)
+ (0022) + (0122) + (1122)
+ (0023) + (0123) + (1123)
+ (0033) + (0133) + (1133)
+ (0222) + (1222)
+ (0223) + (1223)
+ (0233) + (1233)
+ (0333) + (1333)
+ (2222)
+ (2223)
+ (2233)
+ (2333)
+ (3333)

Où l'on voit que le chiffre (o), élevé d'abord à la puiſſance n, puis à la puiſſance $n - 1$, &c. ſert en quelque maniére à completter les dimenſions qui manquent aux chifres ſignificatiſs, & à faire qu'en chaque terme il y ait n chiffres. De ſorte que dans la ſuite, nous négligerons ordinairement d'écrire ces puiſſances de (o), quoiqu'il faille toujours les ſous-entendre dans ces *Facteurs-prémiers*. Car (o) eſt une grandeur bien réelle.

§. 6. On peut conſidérer, dans cette diſpoſition des *Facteurs-prémiers*, les lignes ſuivant leſquelles ils ſont rangés. Dans chacune le *Facteur* ſuivant ſe forme du précédent par le changement de (o) en (1); de ſorte que le prémier *Facteur* de chaque ligne étant donné, on a tous les autres.

On peut auſſi diſtinguer ces lignes en ordres. Le prémier ne contient que la prémiére ligne, qui commence par le terme (o^n).

Le ſecond a $m - 1$ lignes, dont les prémiers termes ſont ($o^{n-1}2$), ($o^{n-1}3$) &c. juſqu'à (($o^{n-1}m$); c'eſt-à-dire, les produits de (o^{n-1}) par tous les termes du polynome excep-

excepté les deux prémiers (o) & (1).

Le troisiéme ordre est composé de $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$ lignes, qui commencent par les termes ($o^{n-2}22$), ($o^{n-2}23$) &c. lesquels naissent en multipliant (o^{n-2}) par tous les produits qu'on peut faire en combinant deux à deux tous les termes du polynome, hors les deux prémiers.

Le quatriéme ordre a $\frac{(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\ 2.\ 3}$ lignes, qui commencent par les *Facteurs* ($o^{n-3}222$), ($o^{n-3}223$) &c. formés de la multiplication de (o^{n-3}) par tous les produits qu'on trouve en combinant trois à trois tous les termes du polynome à l'exception des deux prémiers.

Les ordres suivants se forment d'une maniére semblable; de sorte qu'en ne comptant point les deux prémiers termes (o), & (1), du polynome (o)+(1)+(2)+(3) &c. on peut dire que les termes du prémier ordre n'ont aucun chiffre, que ceux du second n'en ont qu'un, que ceux du troisiéme en ont deux &c. comme on le voit assez évidemment en jettant les yeux sur la Table du §. précédent.

§. 7. Quant aux *Facteurs-seconds* de l'équation C, leurs *Facteurs-prémiers* les représentent. Chaque chifre du *Facteur-prémier* annonce, dans le *Facteur-second* qui lui est joint, une puissance des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.* dont ce chiffre est l'exposant, & ces puissances sont autant de termes qu'il y a de maniéres de les arranger. Car le produit $\alpha\beta\gamma\delta$ &c (§. 3) étant la somme de tous les produits qu'on peut faire en prenant un terme dans chaque équation α, β, γ, δ, &c. chacun de ses termes aura toutes les lettres *a b c d &c.* élevées aux mêmes ou à différentes puissances. Et comme, par la notation des coëfficients dans les équat:

α, β,

α, β, γ, δ, &c. (§. 2), chaque puiſſance des lettres a, b, c, d, *&c.* porte avec ſoi, comme coëfficient, le même chiffre qui eſt ſon expoſant, le *Facteur-prémier*, produit des coëfficients, ſera compoſé de tous les chiffres qui dans le *Facteur-ſecond* ſont expoſants des lettres a, b, c, d, *&c.*

Ainſi le terme $a^1b^0c^0d^0$ *&c.* venant de la multiplication de (1) a^1 par (0) b^0 par (0) c^0 par (0) d^0 &c. aura pour *Facteur-prémier* ($0^{n-1}1$). Et, par la même raiſon, ($0^{n-1}1$) eſt auſſi le *Facteur-prémier* de $a^0b^1c^0d^0$ *&c.* & de $a^0b^0c^1d^0$ *&c.* & de $a^0b^0c^0d^1$ &c. Tous ces termes ſe réuniſſent donc en un ſeul, qui a pour *Facteur-prémier* ($0^{n-1}1$), & pour *Facteur-ſecond* $a^1b^0c^0d^0$ *&c.* $+ a^0b^1c^0d^0$ *&c.* $+ a^0b^0c^1d^0$ *&c.* $+ a^0b^0c^0d^1$ *&c.*, ou ſimplement $a + b + c + d$ *&c.* puiſque toutes les puiſſances zéro ne ſont que des unités.

De même, tous les termes où ſont combinés une racine, un quarré, & un cube de diverſes lettres (car une même lettre ne ſe repéte pas dans un même terme) tels que $a^1b^2c^3$, ou $a^1b^2c^3d^0e^0$ *&c.* étant produits par la multiplication de (1) a^1 par (2) b^2 par (3) c^3 par (0) d^0 par (0) e^0 &c. auront pour *Facteur-prémier* ($0^{n-3}123$) ou (123) en omettant les 0 (§. 5.) Donc le *Facteur-ſecond* de (123) eſt $a^1b^2c^3 + a^1b^3c^2 + a^2b^1c^3 + a^2b^3c^1 + a^3b^1c^2 + a^3b^2c^1$ *&c.* $+ a^1b^2d^3 + a^1b^3d^2 + a^2b^1d^3 + a^2b^3d^1 + a^3b^1d^2 + a^3b^2d^1$ *&c.* $+ a^1c^2d^3 + a^1c^3d^2 + a^2c^1d^3 + a^2c^3d^1 + a^3c^1d^2 + a^3c^2d^1$ *&c.* $+ b^1c^2d^3 + b^1c^3d^2 + b^2c^1d^3 + b^2c^3d^1 + b^3c^1d^2 + b^3c^2d^1$ *&c.* c'eſt-à-dire la ſomme de tous les produits qu'on peut faire en combinant une racine, un quarré, & un cube de trois lettres différentes priſes parmi celles qui repréſentent les racines de A.

§. 8. Si donc les racines de l'éq: A étoient connues, il ſeroit aiſé d'avoir tous les *Facteurs-ſeconds* de l'éq: C. Mais ces racines ſont inconnues, lorſque l'éq: A eſt d'un dégré trop élevé pour que l'Algébre en puiſſe donner la ſolution.

Cependant ces *Facteurs-seconds* se peuvent toujours calculer & exhiber sous une forme rationelle, au moyen des coëfficiens de l'éq: A... x^n — $[1]\,x^{n-1}$ + $[1^2]\,x^{n-2}$ — $[1^3]$ x^{n-3}...... $[1^n]$ = o. Car, les signes + & — étant alternatifs, on sait que [1], coëfficient du second terme, est égal à la somme $a+b+c+d+$ *&c.* des racines, & par conséquent au *Facteur-second* de ($o^{n-1}1$): que de même $[1^2]$, coëfficient du troisiéme terme, est égal à $ab+ac+ad+$ *&c.* $+ bc + bd +$ *&c.* $+ cd +$ *&c.* somme des produits des racines prises deux à deux, ou au *Facteur-second* de ($o^{n-2}11$) ou (1^2): que pareillement le coëfficient $[1^3]$ du quatriéme terme est égal à $abc + abd +$ *&c.* $+ acd +$ *&c.* $+ bcd +$ *&c.* somme des produits des racines prises trois à trois, & *Facteur-second* de ($o^{n-3}111$) ou (1^3): que de même $[1^4]$ est le *Facteur second* de (1^4) &c. Les coëfficients de l'éq: A donnent donc, immédiatement & sans calcul, tous les *Facteurs-seconds* de la prémiére ligne [§. 5.], ou du prémier Ordre [§. *6*]. Et au moyen de ceux-là, ou trouvera tous les autres par le Théorème suivant.

§. 9. Si on multiplie un *Facteur-second* quelconque par un *Facteur-second* dont le *Facteur-prémier* n'ait qu'un seul chiffre significatif, c'est-à-dire différent du zéro: le produit est égal à autant de *Facteurs-seconds* qu'il y a de chiffres différents dans le *Facteur-prémier* du multiplicande. On aura les *Facteurs-prémiers* de ces *Facteurs-seconds* en ajoutant le chiffre du multiplicateur à chacun des différents chiffres du multiplicande. Et s'il arrive que, dans quelcun de ces *Facteurs-prémiers* du produit, un chiffre soit repété plus souvent que dans le *Facteur-prémier* du multiplicande, on prendra ce *Facteur*-là autant de fois que ce chiffre y est repété.

Par ex. le produit du *Facteur-second* de ($o^{n-6}111223$) par le *Facteur-second* de ($o^{n-1}1$) est égal à la somme du *Facteur-second* de ($o^{n-6}111224$), de deux fois le *Facteur-second* de ($o^{n-6}\,111233$), de trois fois le *Facteur-second* de

(o^{-6n}

($o^{n-6}112223$), & de quatre fois le *Facteur-second* de ($o^{n-7}1111223$). Ce qu'on exprime en abrégé par cette équation [111223] × [1] = [111224] + 2 [111233] + 3 [112223] + 4 [1111223], où les chiffres renfermés dans les parenthéses quarrées déſignent les *Facteurs-seconds* dont les *Facteurs-prémiers* auroient les mêmes chiffres dans des parenthéſes rondes, & où, pour abréger, on omet les puiſſances de (o).

Voici comment ſe forme cette équation ſelon le Théorème. Dans le *Facteur-prémier* ($o^{n-6}111223$) du multiplicande, on voit quatre différents chiffres o, 1, 2, 3. Le produit de [111223] par [1] aura donc quatre parties. On aura le *Facteur-prémier* de la prémiére, en ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur au chiffre 3 du multiplicande, ce qui change ($o^{n-6}111223$) en ($o^{n-6}111224$). Et comme aucun chiffre ne ſe trouve plus ſouvent en ($o^{n-6}111224$) qu'en ($o^{n-6}111223$), le *Facteur-second* [111224] ne ſera pris qu'une fois. Le *Facteur-prémier* de la ſeconde partie ſe forme en ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur au chiffre 2 du multiplicande, ce qui change ($o^{n-6}111223$) en ($o^{n-6}111233$), où le chiffre 3, qui n'étoit qu'une fois dans le multiplicande, ſe trouve deux fois. On prendra donc deux fois le *Facteur-second* [111233]. De même pour avoir la troiſiéme partie du produit, on ajoutera le chiffre 1 du multiplicateur à un des chiffres 1 du multiplicande ($o^{n-6}111223$), ce qui le change en ($o^{n-6}112223$), où 2 eſt repété trois fois, au lieu qu'il n'étoit que deux fois dans le multiplicande. On prendra donc trois fois le *Facteur-second* [112223]. Enfin, ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur à un chiffre o du multiplicande, on transforme ($o^{n-6}111223$) en ($o^{n-7}1111223$), où l'on voit quatre 1, au lieu des trois qu'il y avoit dans le multiplicande. On prendra donc quatre fois [1111223]. Et ainſi l'on aura l'équation

[111223]×[1]=[111224]+2[111233]+3[112223]+4[1111223].

§. 10. On peut remarquer, dans cette équation, que dans chaque terme du second membre, la somme des chiffres renfermés dans les parenthéses est la même, savoir la somme des chiffres du multiplicateur & du multiplicande: parce que les chiffres de chaque terme du second membre de l'équation sont formés par l'addition des chiffres du multiplicande & du multiplicateur.

§. 11. La preuve de ce Théorème [qu'on se contentera d'appliquer au cas particulier qui a servi d'Exemple, mais qu'on concevra aisément être générale] se tire de ce que le multiplicande [111223] est la somme de tous les produits, tels que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, de trois racines $d^1e^1f^1$ par deux quarrés b^2c^2 & par un cube a^3 de différentes lettres (§. 7); & de ce que le multiplicateur [1] est la somme de toutes les racines $a+b+c+d+e+f+g+h$, &c. de A. Multiplier par [1] chaque terme de [111223], comme $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, c'est donc le multiplier 1°. par la racine a qui, dans ce terme, a son cube a^3, 2°. par les racines b, c, qui y sont élevées au quarré b^2, c^2. 3°. par les racines d, e, f, qui se trouvent dans ce terme, & 4°. par les racines g, h, &c. qui ne paroissent dans ce terme, ni par elles-mêmes, ni par leurs puissances.

Or la multiplication de chaque terme, tel que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, par la racine a, qui dans ce terme a 3 dimensions, donne tous les termes tels que $a^4b^2c^2d^1e^1f^1$ qui sont ensemble le *Facteur-second* [111224]: & elle ne le donne qu'une fois, parce que chaque terme tel que $a^4b^2c^2d^1e^1f^1$ ne peut être produit, dans la multiplication de [111223] par [1], que d'une seule maniére, savoir en multipliant $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$ par a.

Mais la multiplication de chaque terme, tel que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, par une des racines b, [ou c,] qui ont, dans ce terme, leur quarré b^2 [ou c^2], produit tous les ter-

termes, tels que $a^3b^3c^2d^1e^1f^1$, dont la ſomme fait le *Facteur-ſecond* [111233], & elle produit deux fois cette ſomme; parce que chacun de ces termes ſe trouve deux fois dans le produit [111223] × [1]; $a^3b^3c^2d^1e^1f^1$ y paroiſſant, & comme produit de $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$ par b, & comme produit de $a^2b^3c^2d^1e^1f^1$ par a.

La multiplication de chaque terme, tel que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, par une des racines d [ou e, f] qui dans ce terme n'ont qu'une dimenſion, produit tous les termes tels que $a^3b^2c^2d^2e^1f^1$ dont la ſomme eſt le *Facteur-ſecond* [1112223], & elle la produit trois fois; parce que chaque terme ſe trouve trois fois dans le produit [111223]×[1]. Par exemple $a^3b^2c^2d^2e^1f^1$ s'y trouve formé par la multiplication de $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$ par d, & par celle de $a^3b^2c^1d^2e^1f^1$ par c, & encore par celle de $a^3b^1c^2d^2e^1f^1$ par b.

Enfin la multiplication de tous les termes, tels que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, par quelque racine comme g, différente de celles a, b, c, d, e, f, qui y ſont déjà, produit tous les termes, tels que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1g^1$, dont la ſomme eſt le *Facteur-ſecond* [1111223], & dans ce produit chaque terme ſe trouve quatre fois; parce que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1g^1$ par ex. eſt produit en quatre maniéres, ſç. en multipliant $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$ par g, ou $a^3b^2c^2d^1e^1g^1$ par f, ou $a^3b^2c^2d^1f^1g^1$ par e, ou $a^3b^2c^2e^1f^1g^1$ par d.

Le Produit [111223]×[1] eſt donc compoſé des quatre parties [111224] + 2 [111233] + 3 [112223] + 4[1111223].

§. 12. Par ce Théorème, on peut calculer tous les *Facteurs-ſeconds* de l'équation C, au moyen de ceux du prémier ordre, qui ſont les coëfficiens de l'équation donnée A (§. 8). Pour cet effet, on décompoſera en deux parties le *Facteur-prémier* dont on cherche le *Facteur-ſecond.* L'une n'aura que des (0) avec un ſeul chiffre ſignificatif,

gnificatif, qui vaut une unité de moins que le plus grand chiffre du *Facteur* proposé: L'autre contiendra tous les chiffres du *Facteur* proposé à la réserve du plus grand, auquel on substituera l'unité. En multipliant l'un par l'autre les *Facteurs-seconds* dont ces parties sont les *Facteurs-prémiers*, on aura par le Théorème précédent une équation, dont un des termes sera le *Facteur* cherché, & dont tous les autres termes seront des *Facteurs-seconds* qui se trouvent dans des lignes supérieures, si l'on dispose les *Facteurs-prémiers* comme on l'a indiqué au §. 5. Donc, si l'on calcule les *Facteurs-seconds* ligne par ligne; quand on vient à calculer celui-ci, on aura déjà tous les autres par le moyen desquels il est donné & connu.

On cherche, par ex. la valeur de [0123]. On décomposera ce nombre en deux parties [0002] & [0112]; dont la prémiére n'a que le chiffre significatif 2, moindre d'une unité que 3 le plus grand chiffre de ceux du *Facteur* proposé; & dont la seconde partie [0112] a tous les chiffres du *Facteur* proposé [0123], hors le plus grand 3 qu'on a changé en 1. On multipliera [0112] par [0002], & on aura l'équation [0112] × [0002] = [0114] + [0123] + 2 [1122], d'où l'on tirera [0123] = [0112] × [0002] — [0114] — 2 [1122]. Ainsi [0123] est donné par [0112], [0002], [0114] & [1122]. Mais ces *Facteurs-seconds* sont déja calculés, quand on viendra à la ligne où se trouve [0123]. Car [0112], [0002] & [0114] sont du second ordre (§. 5), & [1122], qui, aussi bien que [0123], est du troisiéme ordre, se trouve dans la ligne immédiatement supérieure, parce que le chiffre 2 précéde immédiatement le chiffre 3. Donc si on calcule ces *Facteurs-seconds* ligne par ligne, on a déja, quand on vient à calculer [0123], tous ceux par lesquels il est donné.

§. 13.

§. 13. On peut ſupputer ainſi l'équation C, à quelque dégré que s'éléve la variable x dans les éq: A & B. Il eſt vrai qu'on y trouvera cet inconvénient, c'eſt que pour calculer certains *Facteurs-ſeconds* qui entrent dans l'éq: C, il faut en avoir calculé d'autres qui n'y entrent pas. Ainſi pour avoir la valeur de [0123], il faut connoître celle de [c114], qui ſeroit d'ailleurs inutile ſi l'éq: B ne paſſe pas le quatriéme dégré. Quoique cet inconvénient ſoit plus apparent que réel, n'ayant d'autre incommodité que celle d'allonger le Calcul; on pourra, ſi l'on veut, le lever au moyen de la Règle ſuivante, qui ſert à ſupputer le produit de deux *Facteurs-ſeconds* quelconques.

1°, Ecrivés de ſuite tous les arrangements poſſibles des chiffres du multiplicande. Le calcul ſera plus court, ſi vous choiſiſſez pour multiplicande celui des deux *Facteurs* dont les chiffres donnent le plus petit nombre d'arrangements.

2°. Sous chaque arrangement écrivés les chiffres du multiplicateur, dans un ordre tel que vous voudrés, mais toujours le même; & ajoutés les chiffres de deſſous à ceux de deſſus. Ces ſommes ſeront les *Facteurs-prémiers* dont les *Facteurs-ſeconds* compoſent le produit.

3°. Multipliés chacun de ces *Facteurs-ſeconds* par la fraction qui a pour numérateur le nombre des permutations des chiffres du multiplicateur, & pour dénominateur le nombre des permutations des chiffres du *Facteur* même.

§. 14. Ce ſeroit trop s'écarter de nôtre but, que de s'arrêter à prouver cette Règle, dont le Lecteur attentif pénétrera aiſement la raiſon. J'ai cru pourtant devoir l'indiquer, parce qu'elle fournit divers moyens plus faciles de calculer l'équation C, & qu'elle m'a été fort utile pour calculer en peu de moments l'équation C*, qu'on voit ici vis-à-

vis-à-vis, & qui eſt celle qui réſulte de l'évanouïſſement de x dans ces deux équations du 4e. dégré,

$$A \ldots\ldots \; lx^4 - px^3 + qx^2 - rx + f = 0$$
$$B \ldots\ldots \; (0) + (1)\,x + (2)\,x^2 + (3)\,x^3 + (4)\,x^4 = 0$$

Cette éq: C*, où l'on a changé pour plus de commodité l'ordre des *Facteurs*, peut ſervir pour tous les dégrés inférieurs, & contient ainſi toutes les Régles que Mr. NEWTON a données dans ſon *Arithmét. univerſ. pag.* 73, 74, & au delà. Car ſi l'éq: B n'eſt que du 3e. dégré, on fera $(4) = 0$, c'eſt-à-dire, on omettra tous les termes de l'éq: C* où le chiffre 4 paroit entre les *Facteurs-prémiers*, & alors toute l'équation ſe peut & doit diviſer par l. Et ſi l'éq: B n'étoit que du 2e. dégré, on omettroit encore tous les termes dans le *Facteur-prémier* dans leſquels paroit un 3, & l'équation ſeroit encore diviſible par l, &c. Mais ſi l'éq: A n'étoit que du 3e. dégré, on omettroit dans les *Facteurs-ſeconds* tous les termes où il y a une f, & toute l'équation ſe diviſeroit par (0). Et ſi A n'étoit que du 2e. dégré, il faudroit encore omettre tous les termes où il y a une r, & diviſer une ſeconde fois l'équation par (0), & ainſi de ſuite.

On propoſe, par ex. d'éliminer x de ces deux équations $x^3 - 2ax^2 + 4ayx - y^3 = 0$ & $ax^2 + y^2x - ay^2 = 0$. On comparera la ſeconde avec l'éq: B, & on aura $(0) = -ay^2$, $(1) = y^2$, $(2) = a$, & $(3) = 0 = (4)$, ce qui réduit d'abord l'éq: C* aux cinq prémiéres lignes, toutes les autres ayant dans leurs *Facteurs-prémiers* les chiffres 3 ou 4. Enſuite on comparera la prémiére des deux équations propoſées avec A, & l'on aura $l = 1$, $p = 2a$, $q = 4ay$, $r = y^3$ & $f = 0$. Cette valeur de f faiſant éva-

C *

$c = ($	$+ (1111)\, l^3 s$
. . . .	$+ (1112)\, l^3 ps$
. . . .	$+ (1122)\, l^2 qs$
. . . .	$+ (1222)\, l^2 rs.$
	$+ (2222)\, l^2 s^2$
$-l^2 ps$	$+ (1113)\, lp^2 s - 2l^2 qs$
$3lp^2 s + 4l^2 qs$ . . .	$+ (1123)\, lpqs - 3l^2 rs$
$-l^2 rs$	$+ (1223)\, lprs - 4l^2 s^2$
	$+ (2223)\, lps^2$
$-lpqs + 5l^2 rs$	$+ (1133)\, lq^2 s - 2lprs - 2l^2 s^2$
$-lprs + 4l^2 s^2$	$+ (1233)\, lqrs - 3lps^2$
	$+ (2233)\, lqs^2$
ps^2	$+ (1333)\, lr^2 s - 2lqs^2$
	$+ (2333)\, lrs^2$
	$+ (3333)\, ls^3$
$r^2 - lp^2 s + 2l^2 qs$ . .	$+ (1114)\, p^3 s - 3lpqs + 3l^2 rs$
$r^2 - 3p^3 s + 8lpqs - 2l^2 rs$.	$+ (1124)\, p^2 qs - 2lq^2 s - lprs + 4l^2 s^2$
$p^2 qs + 4lq^2 s - 4l^2 s^2$ . .	$+ (1224)\, p^2 rs - 2lqrs - lps^2$
	$+ (2224)\, p^2 s^2 - 2lqs^2$
$-p^2 qs + 10lprs - 8ss$.	$+ (1134)\, pq^2 s - 2p^2 rs - lqrs + 5lps^2$
$-p^2 rs + 8lqrs - 2lps^2$ . .	$+ (1234)\, pqrs - 3lr^2 s - 5p^2 s^2 + 4lqs^2$
	$+ (2234)\, pqs^2 - 3lrs^2$
$-3p^2 s^2 + 2lqs^2$ . . .	$+ (1334)\, pr^2 s - 2pqs^2 - lrs^2.$
	$+ (2334)\, prs^2 - 4ls^3$
	$+ (3334)\, ps^3$
$-pq^2 s + 5p^2 rs - 2lqrs + 5lps^2$	$+ (1144)\, q^3 s - 3pqrs + 3lr^2 s + 3p^2 s^2 - 3lqs^2$
$+4pqrs\ 2lr^2 s - 3p^2 s^2 + 2lqs^2$	$+ (1244)\, q^2 rs - 2pr^2 s - pqs^2 + 5lrs^2$
	$+ (2244)\, q^2 s^2 - 2prs^2 + 2ls^3$
$-5pqs^2 + 5lrs^2$	$+ (1344)\, qr^2 s - 2q^2 s^2 - prs^2 + 4ls^3$
	$+ (2344)\, qrs^2 - 3ps^3$
	$+ (3344)\, qs^3$
$+4prs^2 - 4ls^3$ . . .	$+ (1444)\, r^3 s - 3qrs^2 + 3ps^3$
	$+ (2444)\, r^2 s^2 - 2qs^3.$
	$+ (3444)\, rs^3$
	$+ (4444)\, s^4$

évanouïr toute la cinquiéme colomne, ce qui reste des cinq prémiéres lignes sera divisible par (o) & par ll, & après la division elles se réduiront à ceci

$$\begin{array}{llll}(000)l^2 & +(001)lp & +(011)lq & +(111)lr = 0\\ & +(002)pp - 2lp & +(012)pq - 3lr & +(112)pr\\ & & +(022)qq - 2pr & +(122)qr\\ & & & +(222)rr\end{array}$$

où, substituant à (o), (1), (2), l, p, q, r, leurs valeurs,

$$\begin{array}{llll}-a^3y^6 & +a^2y^6.2a & -ay^6.\ 4ay & +y^6.\ y^3 = 0\\ & +a^3y^4.(4aa-8ay) & -a^2y^4.(8aay-3y^3) & +ay^4.2ay^3\\ & & -a^3y^2.(16aayy-4ay^3) & +aayy.4ay^4\\ & & & +a^3.\ y^6\end{array}$$

qui se réduit à

$$\begin{array}{llll}-a^3y^6 & +2a^3y^6 & -4a^2y^7 & +y^9 = 0\\ & +4a^5y^4-8a^4y^5 & -8a^4y^5+3a^2y^7 & +2a^2y^7\\ & & -16a^5y^4+4a^4y^5 & +4a^3y^6\\ & & & +a^3y^6\end{array}$$

ou, réunissant les termes homogénes, à

$$y^9+a^2y^7+6a^3y^6-12a^4y^5-12a^5y^4=0=(y^5+aay^3+6a^3y^2-12a^4y-12a^5)y^4.$$

§. 15. On pourroit tirer de ces Principes plusieurs conséquences fort utiles dans l'Algébre: mais ne nous écartons point de notre but, qui est de démontrer que si A & B sont deux équations, l'une de l'ordre m & l'autre de l'ordre n, l'équation qui résulte de l'évanouïssement de la

variable x ne ſauroit être d'un dégré plus élevé que $m\,n$.

$$A \ldots\ldots x^n - [1]\,x^{n-1} + [1^2]\,x^{n-2} - [1^3]\,x^{n-3} + \ldots\ldots [1^n] = 0$$
$$B \ldots\ldots (0) + (1)\,x + (2)\,x^2 + (3)\,x^3 + \ldots\ldots (m)\,x^m = 0$$

1°. Puiſque l'éq: A eſt de l'ordre n, elle n'a aucun terme où les expoſants de x & de y enſemble faſſent une ſomme plus grande que n. Donc [1] eſt une fonction de y qui ne paſſe pas le prémier dégré, & $[1^2]$ une fonction qui ne paſſe pas le ſecond dégré, &c. & $[1^n]$ une fonction qui ne paſſe pas le dégré n, c'eſt-à-dire, dans laquelle il n'y a aucun terme où y ait un expoſant plus grand que n.

Delà on peut conclurre qu'il n'y a aucun *Facteur-ſecond* de l'éq: C où la variable y ait un expoſant plus grand que la ſomme des chiffres de ſon *Facteur-prémier*: Que dans $[0^{x-3}123]$ par ex. il n'y a aucune puiſſance de y ſupérieure à la ſixiéme; parce que $1 + 2 + 3 = 6$.

Cette concluſion ſe déduit au moyen de deux Principes. L'un, qui a été indiqué au §. 10, c'eſt que les chiffres de deux *Facteurs* qui ſe multiplient l'un l'autre font enſemble la même ſomme que les chiffres des *Facteurs* qui compoſent le produit de cette multiplication. L'autre, qui eſt connu, c'eſt que ſi on multiplie l'une par l'autre deux Fonctions rationelles, de dégrés quelconques, d'une même variable; le produit ſera une Fonction d'un dégré égal à la ſomme de leurs dégrés. Si donc il eſt vrai de dire de deux *Facteurs-ſeconds* multipliés l'un par l'autre, que chacun eſt une Fonction rationelle de y, où elle n'a point d'expoſant ſupérieur à la ſomme des chiffres de leurs *Facteurs-prémiers*; cela ſera également vrai de leur produit, & par conſéquent de tous les *Facteurs-ſeconds* qui compoſent ce produit. Or on a vû au commencement de ce §. que

cela

cela est vrai des *Facteurs-seconds* [1], [1^2] .... [1^n] de la prémiére ligne. Donc cela est vrai des *Facteurs-seconds* sans exception; puisqu'ils sont tous produits, immédiatement ou médiatement, par la multiplication des *Facteurs* de la prémiére ligne (§. 12).

Ainsi, pour prouver que y ne passe pas le 6e. dégré dans [123], il suffit de faire voir qu'elle ne passe par le 4e. dégré dans [112], ni le 2e. dans [2]. Car, comme [112] $\times$ [2] $=$ [114] $+$ [123] $+$ 2 [1122], le *Facteur* [123] est une des parties qui composent le produit de [112] par [2]. Or on prouve que y ne passe pas le 4e. dégré dans [112], ni le 2e. dans [2], par une semblable décomposition. [1] $\times$ [1] $=$ [2] $+$ 2 [11]. Donc y, ne passant pas le 1er dégré dans [1], ne passera pas le 2e dans [1] $\times$ [1], ou dans [2], qui n'est qu'une partie du produit [1] $\times$ [1]. De même, puisque [111] $\times$ [1] $=$ [112] $+$ 4 [1^4], & que y ne passe pas le 3e. dégré dans [1^3] ni le 1er dans [1], elle ne passera pas le 4e. dans [1^3] $\times$ [1], ni par conséquent dans [112], qui n'est qu'une partie de ce produit.

Par de semblables raisonnemens, remontant d'un *Facteur-second* quelconque à ceux du produit desquels il fait partie, & de ceux-là à d'autres, & ainsi jusqu'aux *Facteurs* [1], [1^2] &c. de la prémiére ligne, on prouvera toujours que dans aucun *Facteur-second* de l'éq: C, la variable y ne monte à un dégré plus haut que celui dont l'exposant est la somme des chiffres de son *Facteur-prémier.*

2°. D'un autre côté, l'éq: B étant de l'ordre m, elle ne contient aucun terme où les exposants de x & de y ensemble fassent une somme plus grande que m. Donc y dans la Fonction (0) ne passe pas le dégré m, & dans (1) elle ne passe pas le dégré $m - 1$, ni dans (2) le dégré $m - 2$, &c.

Par conséquent dans aucun *Facteur-prémier* de l'éq: C,

 il

il n'y aura aucune puiſſance de y dont l'expoſant paſſe le nombre qui reſte quand de mn on ôte la ſomme des chiffres de ce *Facteur.* Ainſi dans $(o^{n-3}123)$, y ne ſauroit paſſer le dégré $mn - 6$. Car dans (3), y ne paſſe pas le dégré $m - 3$, ni dans (2) le dégré $m - 2$, ni dans (1) le dégré $m - 1$, ni dans (o) le dégré m, ni par conſéquent dans (o^{n-3}) le dégré $m \times (n - 3) = mn - 3m$. Donc dans $(o^{n-3}123) = (o^{n-3}) \times (1) \times (2) \times (3)$, y ne paſſe pas le dégré $mn - 3m, + m - 1, + m - 2, + m - 3 = mn - 1 - 2 - 3 = mn - 6$.

3°. Cela étant ainſi, qu'on prenne dans l'éq: C quel terme on voudra, & ſi l'on cherche qu'elle peut être la plus haute puiſſance de y dans ce terme-là, on trouvera que y ne peut s'élever dans le *Facteur-ſecond* à un dégré plus haut que la ſomme des chiffres du *Facteur-prémier* (*n°.* 1), ni dans le *Facteur-prémier* à un dégré plus haut que le nombre qui reſte quand on ôte de mn la ſomme de ces chiffres (*n°.* 2). Donc dans le terme complet, qui eſt le produit du *Facteur-prémier* par le *Facteur-ſecond*, y ne montera point à un dégré plus haut que mn, qui réſulte de l'addition de cette ſomme & de ce reſte.

Ainſi, dans aucun terme de l'équation finale C, y ne monte à une puiſſance plus haute que celle dont mn eſt l'expoſant. L'équation C n'eſt donc, au plus, que du dégré mn: elle ne peut avoir plus de mn racines. *Ce qu'il faloit démontrer.*

N°. III.

N°. III.

Démonstration de la Règle de Mr. HUDDE.

LEMME.

Si on multiplie la suite bien ordonnée des termes d'un binome v + y *élevé à une puissance quelconque dont l'exposant soit* l, *par les termes de la progression arithmétique* 0, 1, 2, 3, 4, &c. *le produit sera la puissance* l — 1 *de ce binome multipliée par* ly.

La seule inspection du calcul peut tenir lieu de preuve.

$$(v+y)^l = v^l + lv^{l-1}y + \frac{l.(l-1)}{1.2.}v^{l-2}y^2 + \frac{l.(l-1).(l-2)}{1.2.3}v^{l-3}y^3 + \&c.$$

$$0 \qquad 1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad 3$$

$$lv^{l-1}y + \frac{l.(l-1)}{1}v^{l-2}y^2 + \frac{l.(l-1).(l-2)}{1.\ 2}v^{l-3}y^3 + \&c.$$

$$= ly \times (v^{l-1} + (l-1)\,v^{l-2}y + \frac{(l-1).(l-2)}{1.\ 2}v^{l-3}\,y^2 + \&c.$$

$$= ly \times (v+y)^{l-1}$$

Coroll. I. Si au lieu de la progression 0, 1, 2, 3, 4, &c. on avoit multiplié la suite des termes de la puissance

l fois par $v+y$, c'eſt-à-dire diviſible par $(v+y)^l$. On peut donc repréſenter l'Egalité par cette Formule $(v+y)^l \times (p+qy+ry^2+fy^3+ \&c)$: la grandeur $p+qy+ry^2+fy^3+\&c.$ étant ſuppoſée le produit de toutes les racines différentes de $y+v=0$. Si on dévelope la puiſſance $(v+y)^l$, l'Egalité ordonnée ſera

$$\begin{array}{llll} 0=pv^l+lpv^{l-1}y+\frac{l.(l-1)}{1.2}pv^{l-2}y^2+\frac{l.(l-1).(l-2)}{1.2.3}pv^{l-3}y^3 & & \&c... & =p(v+y)^l \\ +qv^ly+lqv^{l-1}y^2 & +\frac{l.(l-1)}{1.2}qv^{l-2}y^3 & \&c... & =qy(v+y)^l \\ +rv^ly^2 & +lrv^{l-1}y^3 & \&c... & =ry^2(v+y)^l \\ & +fv^ly^3 & \&c... & =fy^3(v+y)^l \\ & & \&c... & =\&c. \end{array}$$

& ſi on multiplie la ſuite de ces termes par la progreſſion arithmétique

$$n \quad n+m \quad n+2m \quad n+3m \quad \&c.$$

on voit que chaque ligne ſera multipliée par une progreſſion arithmétique, la prémiére par la progreſſion entiére $n, n+m, n+2m, \&c.$ la ſeconde par $n+m, n+2m, n+3m, \&c.$ la troiſiéme par $n+2m, n+3m, \&c.$ Or chaque ligne eſt la puiſſance l de $v+y$; & n'importe qu'elle ſoit multipliée dans la prémiére ligne par p, dans la ſeconde par qy, dans la troiſiéme par ry^2, &c. il ſera toujours vrai [*Cor. préc.*] que le produit de chaque ligne eſt diviſible par $(v+y)^{l-1}$. Donc toute l'Egalité multipliée par la progreſſion, $n, n+m, n+2m, \&c.$ eſt diviſible par $(v+y)^{l-1}$. Donc de l racines égales qu'elle

le avoit avant la multiplication, elle en conserve $l-1$ après la multiplication.

Cor. Ainsi, une Egalité, qui a une ou plusieurs racines doubles, les conserve, mais simples, après qu'on a multiplié la suite de ses termes par une progression arithmétique quelconque.



INDI-

INDICE

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES.

CHAPITRE PREMIER.

De la Nature des Lignes Courbes en général, & de leurs Equations.

CHAPITRE II.

Des transformations que subit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées.

CHAPITRE III.

Des différens Ordres des Lignes algébriques.

CHAPITRE IV.

Quelques Remarques sur la construction géométrique des Egalités.

 CHA-

CHAPITRE V.

Valeur du produit de toutes les Ordonnées d'une même Abſciſſe.

CHAPITRE VI.

Des Diamètres, Contre-Diamètres, & Centres des Lignes Courbes.

CHAPITRE VII.

Détermination des plus grands termes d'une Equation. Principes de la Méthode des Séries, ou Suites infinies.

CHAPITRE VIII.

Des Branches infinies des Courbes.

129. Les

CHAPITRE IX.

Diviſions générales des Lignes des cinq premiers Ordres.

CHAPITRE X.

Des Points ſinguliers; Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpentement.

CHAPITRE XI.

De la Méthode des Tangentes : Des Points d'Inflexion, &c. Des plus grandes & des plus petites abscisses & ordonnées, &c.

CHAPITRE XII.

De la Courbure des Lignes Courbes en leurs différens Points.

CHAPITRE XIII.

Des différentes espéces de Points multiples dont peuvent être susceptibles les Courbes des six premiers Ordres.

APPENDICE.

FAU-

FAUTES A CORRIGER.

Page.	*Ligne.*	*Faute.*	*Correction.*
26.	1.	impair	pair
45.	3.	$(z)y^2$.	$(1)\ zy^2$.
76.	*Note * l. dern.*	N°. 3.	N°. 2.
77.	*en marge.*	*Fig.* 23.	*Fig.* 24.
87.	11.	$-15ax$.	$+15ax$
109.	12.	$PS\times PT$	$PR\times PS$
110.	16.	troisiéme	second
121.	12.	$\alpha\beta$	αB
169.	*pénult.*	$R\pm o$	$R=o$
198.	11.	qO	QO
207.	14.	$AA=4A$	$AA-4A$
228.	13.	$\frac{b}{l}$ ou k	b ou $\frac{k}{l}$
233.	7.	AB [x]	AP [x]
289.	7.	2	$\sqrt[3]{2}$
300.	18.	-9	9
373.	*derniére.*	$-\frac{D}{D'}=1$	$\frac{D}{D'}=-1$
389.	18.	simple	double
402.	22.	trois	en trois
405.	10.	$-bx^3$	$-bx^2$
407.	14. *en marge.*	*Fig.* 122.	*Fig.* 121.
430.	2.	$-3a^3y$	$-8a^3y$
451.	19.	$-4ayy$	$-4aayy$
509.	5.	$\sqrt{\frac{15+23}{2}}$	$\sqrt{\frac{15+\sqrt{23}}{2}}$
520.	26.	ρ	$\gamma\rho$
585.	22.	positif	négatif
	23.	négatif	positif.
590.	9.	$bb > \frac{1}{4}aa$	$bb < \frac{3}{4}aa$





